精编2005年教辅书　考场竞技必备掌中宝

诊断超越三级跳

高一数学

本册主编　章志学

名校名师精心打造

分类诊断　夯实基础知能

思维教学　把握思考方法

超越课堂　提升综合能力

金盾出版社
JINDUN CHUBANSHE

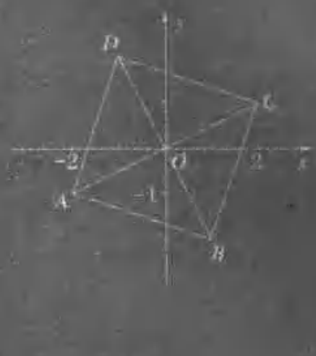
诊断超越

三级跳

ZhenDuanChaoYue

高一数学

本册主编 章志学



金盾出版社

图书在版编目(CIP)数据

诊断超越三级跳丛书．高一数学/章志学主编．—北京:金盾出版社,2003.6
ISBN 7-5082-2498-1

Ⅰ.诊… Ⅱ.章… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 028069 号

金盾出版社出版、总发行
北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)
邮政编码:100036 电话:68214039 66882412
传真:68276683 电挂:0234
封面印刷:北京精美彩印有限公司
正文印刷:北京金盾印刷厂
各地新华书店经销
开本:850×1168 1/16 印张:16.25 字数:518 千字
2004 年 4 月第 1 版第 2 次印刷
印数:25001—27000 册 定价:18.00 元

前 言

科学诊断 成功超越

诊断既是一种针对性很强的检测方式，又是一种快速有效的突破方式。一年多来，我们和几位教育专家一起研究、构思了这套《诊断超越三级跳》系列丛书，试图在精心创建的特效诊断平台上，让学生自我诊断知识、能力达到的程度、层次和水平，并实现成功的超越。实际上，这种从诊断到检测的过程，就是一种知识能力的攀升和超越教材、超越课堂、超越自我，实现"三级跳"的飞跃过程。

这套丛书，科学地抓住打基础，讲方法，重能力，看过程四个方面，立意深刻，内涵丰富，方法实用。这套丛书的特色集中表现在以下几个方面：

分类诊断，切入创新。以分类诊断为切入点，以练带讲，环环相扣，紧紧把握综合知识能力的脉搏，在传授典型解题技巧的同时，精心检测学习和应试中容易出现的差错、失误。"病症"诊断，"病因"探源。通过做题，对基础知识、思维方法和综合应用能力等，进行精心点拨。

把握核心，纵横迁移。通过做题，深刻揭示教材中的主干知识和核心内容，归纳中考、高考的常考知识点以及失分率较高的知识点。"基础知识诊断"，是汇聚知识的聚焦镜，涵盖了全部核心知识，并把离散的知识归纳出清晰的脉络。"知识迁移诊断"，脉络分明，巧妙延伸。通过做题，实现由知识迁移、知识整合向能力发展和升级的转化。

注重方法，激发潜能。方法是知识和能力之间的纽带。正确的思维方法是跨向成功的桥梁。通过对学生进行多方位、主体式引导，在知识、方法、能力的结合上形成鲜明亮点。领略众多方法，激发学生思维潜能，铸就正确的思维取向。以命题目的、技巧评析、误点矫正等作为激活思维的触点，并精辟点拨在做题中如何避开曲折、错误的思维过程，这样可使学生真正做到举一反三，触类旁通。

理念新颖，超越教材。突出新大纲和新课标的要求、新考纲的范围、新教材的内容。结合中考、高考的要求，将考点渗速和凝聚到知识、方法、能力的诊断中，更好地实现由知识、能力诊断到知识、能力飞跃。丛书还采用了互动教学和交互讲练的新颖形式。

参加本套丛书编写的作者，都是国内知名中学的优秀特级、高级教师，丛书中凝集着他们多年的教学经验。

本册的编著者，还有陈其农、范方洪、甘本娟、葛玉青、刘东方、黄洁云、张家武、王春来、许专根、姚何生、李田、孙方达、宋春来、郝咏、刘江、赵文华、范剑、朱莹莹、肖兵、葛佳等。

我们深信，这套丛书一定会为中学生朋友的学习撑起一片希望无限的蓝天。在这片美好的蓝天下，希望广大中学生朋友们挑战自我，超越自我，能叩响成功的大门，奔向美好的来来。

丛书总策划： *卢禄之 方明*

CONTENTS

目　录

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集 合

基础知识诊断

【例1】 下列各组对象,能构成集合的是那几组?

①高一年级全体女生;②高一(1)班全体学生家长;③高一年级开设的课程;④高一年级高个子学生;⑤高一数学课本中的难题.

命题目的 考查集合的概念.

【解】 ①、②、③的对象具有确定性,能形成集合.④、⑤中的对象因未规定标准,对象不确定,故④、⑤中对象不能形成集合.

技巧评析 判断指定的对象能不能形成集合,关键在于能否找到一个明确标准,对于任何一个对象,都能确定它是不是这个集合中的元素.

思维发散 集合中元素的特征有:(1)确定性:$x\in A$ 与 $x\notin A$ 二者必居其一.例如"由$\sqrt{2}$的近似值"就不能组成集合,这个$\sqrt{2}$的近似值没有严格标准,不具有确定性.(2)互异性:$x_1\in A$,$x_2\in A$,则 $x_1\neq x_2$,例如方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个等根,$x=x_2=1$,其解集只能记为$\{1\}$,而不能记为$\{1,1\}$.(3)无序性:$\{a,b\}=\{b,a\}$,即集合中的元素相互交换次序所得的集合与原来的集合是同一个集合.

【例2】 用适当的方法表示下列集合,并指出是无限集还是有限集.

(1)由所有非负奇数组成的集合;(2)由所有小于20的既是奇数又是质数的数组成的集合;(3)方程 $x^2-x+1=0$的实数解组成的集合;(4)平面直角坐标系内所有第二象限的点组成的集合.

命题目的 理解无限集、有限集、空集的意义,运用列举法、描述法表示集合.

【解】 (1)用描述法表示为$\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{N}\}$,是无限集.

(2)用列举法表示为$\{3,5,7,11,13,17,19\}$,是有限集.

(3)因为方程 $x^2-x+1=0$ 的判别式 $\Delta=-3<0$,所以方程无实根,解集可表示为$\varnothing$,既不是有限集也不是无限集.

(4)第二象限的点的坐标特征是横坐标小于0,纵坐标大于0,所以可以用描述法表示为$\{(x,y)\mid x<0,y>0\}$.

技巧评析 在没有限定集合的表示方法时,一般地,能明确表示的要用列举法表示,能用数学符号语言表示要用数学符号表示.

思维发散 (1)注意空集$\varnothing$的意义,如下列集合中,表示空集的是 ( )

A. $\{0\}$ B. $\{(x,y)\mid y=\sqrt{-x}\}$ C. $\{x\mid x^2+3x+2=0,x\in\mathbf{N}\}$ D. $\{x\in\mathbf{R}\mid 1<|x|\leqslant 3\}$

(2)下列集合中是有限集的是 ( )

A. {能被3整除的数} B. {正方形} C. {实系数一元二次方程的解} D. $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<2\}$

答案:(1)C. (2)C.

知识迁移诊断

【例3】 用符"$\in$"或"$\notin$"填空.

(1)0 ______ $\varnothing$,0 ______ $\mathbf{N}$,$\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{Z}$,π ______ Q;

(2)$2\sqrt{3}$ ______ $\{x\mid x<\sqrt{11}\}$,$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ______ $\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$;

(3)3 ______ $\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$,5 ______ $\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$;

(4)$(-1,1)$ ______ $\{y\mid y=x^2\}$,$(-1,1)$ ______ $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

命题目的 准确理解集合中元素的意义,掌握常见数集符号及"$\in$"或"$\notin$"的用法.

【解】 (1) $\notin$,$\in$,$\notin$,$\notin$;(2) $\notin$,$\in$;(3) $\notin$,$\in$;(4) $\notin$,$\in$.

技巧评析 判断一个元素属于或不属于某个集合,首先必须准确对集合中对象的意义的理解,例如(4)中集合$\{y\mid y=x^2\}$的元素是非负数,而$\{(x,y)\mid y=x^2\}$表示抛物线 $y=x^2$ 上的点的集合,所以$(-1,1)\in\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

思维发散 (1)判断 $y=14m+36n$,$m,n\in\mathbf{Z}$,与集合 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$的关系;

(2)判断 $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$与集合 $M=\{a+b\sqrt{6}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$的关系.

答案:(1)$y\in A$;(2)$x\in M$.

【例4】 用列举法把下列集合表示出来.

(1)$A=\{x\mid \frac{9}{9-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\}$;(2)$B=\{\frac{9}{9-x}\mid x\in\mathbf{N}$且$\frac{9}{9-x}\in\mathbf{N}\}$;

(3)$C=\{y\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;(4)$D=\{(x,y)\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

命题目的 准确地理解集合,并求出集合中元素.

【解】 (1)当 $x=0,6,8$ 时,这三个自然数代人$\frac{9}{9-x}$得$\frac{9}{9-x}=1,3,9$也为自然数. $\therefore A=\{0,6,8\}$.(2)由(1)知 $B=\{1,3,9\}$.(3)由 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$ 知 $y\leqslant 6$.

$\therefore x=0,1,2$ 时,$y=6,5,2$ 符合题意,$\therefore C=\{6,5,2\}$.

(4)点(x,y)满足条件 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$.

则有$\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ $\therefore D=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$.

技巧评析 认识一个集合应从两方面入手:第一,集合中元素是什么? 第二,考查集合中元素有何属性? 如 $A=\{y\mid y=x^2+1\}$与 $B=\{x\mid x=t^2+1\}$表示同一个数集,表示集合时与选用的字母名称无关,而$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$表示一个点集,与集合 A 是不同的集合.

思维发散 判断集合 $A=\{(x,y)\mid x>0$且$y<0\}$,$B=\{(x,y)\mid x-y>0$且$xy<0\}$是否为同一集合,并说明理由.

答案:$A=B$,都表示坐标平面内第四象限的点集.

思维方法诊断

【例5】 已知数集$\{1,a,a^2-a\}$,求实数 a 应满足的条件.

命题目的 训练对集合中元素特征的理解.

【解】 根据集合中元素的互异性,得

$$\begin{cases} a\neq 1 \\ a^2-a\neq 1 \\ a^2-a\neq a \end{cases}$$ 解得 $a\neq 1, a\neq 2, a\neq 0, a\neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

技巧评析　集合中元素是互异的,要求集合中任两个元素互不相等,本例集合中有3个元素,应有3个不等关系,不要遗漏其中1个.

思维发散　已知集合 $M=\{-1,m\}$, $N=\{1,|m|\}$. (1)若集合 M 与 N 没有公共元素,求实数 m 的取值范围;(2)若集合 M 与 N 有且只有一个公共元素,求实数 m 的取值范围.

答案:(1) $m<0$ 且 $m\neq -1$;(2) $m\geqslant 0$ 且 $m\neq 1$.

【例6】　设集合 $S=\{x\mid x=m+n\sqrt{2}, m,n\in \mathbf{Z}\}$.

(1)若 $a\in\mathbf{Z}$,则 a 是否为集合 S 的元素?

(2)对 S 中任两个元素 x_1, x_2,问 x_1+x_2, x_1x_2 是否属于集合 S?

命题目的　考查元素与集合的关系.

【解】　(1) $a\in\mathbf{Z}$,则 a 可以表示为 $a=a+0\sqrt{2}$, $a,0\in\mathbf{Z}$, $\therefore a\in S$.

(2) $x_1\in S, x_2\in S$,则 $x_1=m+n\sqrt{2}$, $x_2=p+q\sqrt{2}$, $m,n,p,q\in\mathbf{Z}$.

$\therefore x_1+x_2=(m+p)+(n+q)\sqrt{2}$,且 $(m+p),(n+q)\in\mathbf{Z}$, $\therefore (x_1+x_2)\in S$. 同理, $x_1x_2=(mp+2nq)+(mq+np)\sqrt{2}\in S$.

技巧评析　判断某对象是否属于某个集合,首先应分析该集合中元素具有什么特征,本例集合 S 中元素特征是"整数与整数的 $\sqrt{2}$ 倍的和",进而对对象进行变形分析是否具有这一特征.

思维发散　设集合 $M=\{x\mid x=a+b\sqrt{5}, a,b\in\mathbf{Z}\}$,若 $x\in M, y\in M$,试判断 xy, $\frac{x}{y}$ 是否属于集合 M.

【解】　$xy\in M$,解法同例6.

$$\frac{x}{y}=\frac{a_1+b_1\sqrt{5}}{a_2+b_2\sqrt{5}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{5})(a_2-b_2\sqrt{5})}{a_2^2-5b_2^2}=\frac{(a_1a_2-5b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{5}}{a_2^2-5b_2^2}$$

虽 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{Z}$,但 $\frac{a_1a_2-5b_1b_2}{a_2^2-5b_2^2}$ 及 $\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-5b_2^2}$ 不一定为整数, $\therefore \frac{x}{y}$ 不一定属于 M.

综合应用能力诊断

【例7】　已知集合 $M=\{m\mid x^2+2(m-1)x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$ 求一次函数 $y=2x-1(x\in M)$ 的取值集合.

命题目的　运用集合中元素特征解题.

【解】　由题设,集合 M 应为非空集合,此时 $\Delta=4(m-1)^2-4\geqslant 0$,解之得 $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant 0$. $\therefore$ 集合 $M=\{m\mid m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant 0\}$.

又 $\because x\in M$, $\therefore x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0$, $\therefore 2x-1\geqslant 3$ 或 $2x-1\leqslant -1$, $\therefore y$ 的取值范围为 $\{y\mid y\geqslant 3$ 或 $y\leqslant -1\}$.

技巧评析　本题求解的切入点为 $x\in M$,所以必须首先探求集合 M 的具体组成,而方程 $x^2+2(m-1)x+1=0, x\in\mathbf{R}$. 隐含一元二次方程必有实数解,因而 m 取值范围可以确定,从而集合 M 的元素得以确定.

思维发散　挖掘集合元素的本质特征,利用隐含条件作用解题可在下题的求解过程得到进一步的启示.

已知集合 $A=\{x\mid x^2+mx-n=0\}$, $B=\{t\mid (t+m+6)^2+n=0\}$,若 $A=\{3\}$,求集合 B.

本例由 $A=\{3\}$ 得到的隐含条件是方程 $x^2+mx-n=0$ 有等根 $x=3$,

$\therefore \begin{cases} 9+3m-n=0 \\ \Delta=m^2+4n=0 \end{cases}$,　解得 $m=-6, n=-9$,　从而可得 $B=\{3,-3\}$.

【例8】　已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,\ x\in\mathbf{R}, a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 是空集,求 a 的取值范围;

(2)若 A 中只含有一个元素,求 a 的值,并求出这个元素;

(3)若 A 中至多只含有一个元素,求 a 的取值范围.

命题目的 运用空集、单元素集的意义解题.

【解】 (1)A 为空集,即方程 $ax^2-3x+2=0$ 无实数解.当 $a=0$ 时,方程有解;当 $a\neq0$ 时,欲使方程无解,则要使 $\Delta=9-8a<0$,$\therefore a>\frac{9}{8}$时,A 为空集.

(2)A 是单元素集,即方程 $ax^2-3x+2=0$ 有一个解,当 $a=0$ 时,方程有一解 $x=\frac{2}{3}$;当 $a\neq0$ 时,$\Delta=9-8a=0$,即 $a=\frac{9}{8}$时,这时 A 中只有一个元素,为 $x=\frac{4}{3}$.

$\therefore a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$ 时,A 为单元素集,分别为$\{\frac{2}{3}\}$或$\{\frac{4}{3}\}$.

(3)A 中至多只有一个元素,包括 A 为空集或 A 中只有一个元素 2 种情形,根据(1)、(2)结果,得 $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$ 时,A 中至多只有一个元素.

技巧评析 本例在讨论方程无解和只有一个解时,对字母系数 a 进行讨论,分类讨论是一种重要的数学思想方法.在讨论 A 为单元素集时,只考虑方程为一元二次方程的可能而忽略 $a=0$ 时的情形要予以注意.

思维发散 已知集合 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$, $B=\{x\mid qx^2+px+1=0\}(p,q\neq0)$, 同时满足:①$A$、$B$ 有一个公共元素 α;②$-2\in A$,$-2\notin B$,求 p,q 的值.

【略解】 $\alpha\in A$,则 $\alpha^2+p\alpha+qx=0$,$\alpha\in B$,则 $q\alpha^2+p\alpha+1=0$,解得:$\alpha=\pm1$;$\therefore A=\{-2,-1\}$或 $A=\{-2,1\}$,由韦达定理,可得$\begin{cases}p=1\\q=-2\end{cases}$ 或$\begin{cases}p=3\\q=2\end{cases}$.

【例 9】 设 A 为满足下列两个条件的实数所构成的集合:①A 内不含 1;②若 $a\in A$,则$\frac{1}{1-a}\in A$,解答下列问题:

(1)若 $2\in A$,则 A 中必有其他两个数,求出这两个数;(2)求证:若 $a\in A$,则 $1-\frac{1}{a}\in A$.

命题目的 综合运用元素和集合的有关知识.

【解】 (1)若 $2\in A$,则$\frac{1}{1-2}\in A$,即 $-1\in A$,同理,$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$,而

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$。所以当 $2\in A$ 时,A 中还有两个元素,即为 -1,$\frac{1}{2}$;

(2)若 $a\in A$,且 $a\neq1$,由已知$\frac{1}{1-a}\in A$,且$\frac{1}{1-a}\neq1$,$\therefore\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{1-a-1}=1-\frac{1}{a}\in A$.

技巧评析 本例反复依据题设条件②,由元素属于某个集合的概念求解.

思维发散 本例可作如下拓展:(1)在集合 A 中的元素个数能否只有一个?为什么?(2)A 中至少有几个元素?

对于(1)可假设 A 中元素只有一个 a,由题设$\frac{1}{1-a}\in A$,则 $a=\frac{1}{1-a}$,得 $a^2-a+1=0$.因 $\Delta=-3<0$,a 无实数解, $\therefore a\neq\frac{1}{1-a}$.$\therefore A$ 中元素只有一个是不可能的. (2)可由本例题设及证明可知,若 $a\in A$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$,$1-\frac{1}{a}\in A$,故 A 中至少有 3 个元素.

【例 10】 已知 $f(x)=x^2-ax+b$,$(a,b\in\mathbf{R})$,$A=\{x\mid f(x)-x=0\}$,$B=\{x\mid f(x)-ax=0\}$,若 $A=\{1,-3\}$,试用列举法表示集合 B.

命题目的 培养灵活运用集合知识的能力.

【解】　由 $f(x)-x=0$ 即 $x^2-(a+1)x+b=0$，$\because A=\{1,-3\}$，$\therefore x_1=1,x_2=-3$ 是方程 $x^2-(a+1)x+b=0$ 的根，由韦达定理 $\begin{cases}1+(-3)=a+1\\1\cdot(-3)=b\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=-3\\b=-3\end{cases}$，$\therefore f(x)=x^2+3x-3$.

$f(x)-ax=0$，即 $x^2+6x-3=0$，解得 $x_1=-3-2\sqrt{3},x_2=-3+2\sqrt{3}$，$\therefore B=\{-3-2\sqrt{3},-3+2\sqrt{3}\}$.

技巧评析　集合 A、B 的元素的意义均为方程的根，通过 $A=\{1,-3\}$ 为突破口确定 a、b，进行而求解方程 $f(x)-ax=0$，可得集合 B.

思维发散　设 $f(x)=x^2+px+q,(p,q\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x)\}$，集合 $B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1)若 $x_0\in A$，证明 $x_0\in B$；

(2)若 $A=\{-1,3\}$，试用列举法表示 B.

【略解】　(1)由 $x_0\in A$，则 $f(x_0)=x_0$，$\therefore f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，$\therefore x_0\in B$. (2)由 $A=\{-1,3\}$，知方程 $x^2+(p-1)x+q=0$ 有根 $-1,3$，用韦达定理可得 $p=-1,q=-3$，$\therefore f(x)=x^2-x-3$. 由 $f[f(x)]=x$ 得 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$，整理为 $(x^2-3)(x^2-2x-3)=0$，解得 $x_1=-\sqrt{3},x_2=\sqrt{3},x_3=-1,x_4=3$. $\therefore B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

综合知识能力测试

一、选择题

1. 下列各组对象

①接近于0的数的全体；②比较小的正整数全体；③平面上到原点 O 的距离等于1的点的全体；④正三角形全体；⑤$\sqrt{2}$的近似值的全体.

其中能构成集合的组数是　（　）

A.2组　　B.3组　　C.4组　　D.5组

2. 下列写法正确的是　（　）

A. $0\in\varnothing$　B. {全体实数} $=\mathbf{R}$　C. $\{x=1\}=\{x\mid x=1\}$　D. $\{x\mid x^2-x+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$

3. 已知 x,y,z 为非零实数，代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的值所组成的集合 M，则下列判断正确的是　（　）

A. $0\notin M$　　B. $2\in M$　　C. $-4\notin M$　　D. $4\in M$

4. 设集合 $A=\{x\in N\mid 2x>-1\}$，则下列结论①$\sqrt{2}\in A$；②$\pi\notin A$；③$-1\notin A$；④$0\in A$ 中，正确的个数有（　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

5. 下列集合是有限集的是　（　）

A. {能被3整除的数}　B. {正方形}　C. {实系数一元二次方程的解}　D. $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<2\}$

6. 集合 $A=\{(x,y)\mid y=-2x^2+x-1,x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，若点 P 的坐标 $(x,y)\in A$ 则　（　）

A. 点 P 在第一象限或第二象限　　B. 点 P 在第一象限或第四象限

C. 点 P 在第二象限或第三象限　　D. 点 P 在第三象限或第四象限

7. 集合 $M=\{x\mid x=\frac{9-6t+t^2}{t-3},t\in Z,t\neq3\}$ 若 $x\in M$，则①$x\in\mathbf{N}$；②$x\in\mathbf{Q}$；③$x\in\mathbf{R}$；④$x\in Z$. 其中正确的个数有　（　）

A.4个　　B.3个　　C.2个　　D.1个

二、填空题

8. 设集合 $M=\{m\mid m\leqslant\sqrt{10}\}$，又 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，那么 a ______ M(填"$\in$"或"$\notin$").

9. 若集合 $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\mid y=x^2-4x+5,x\in\mathbf{R}\}$，则 M、N 之间的关系是______(填"相等"或"不等").

10. 集合 $\{2a,a^2-a\}$ 中 a 的取值范围是______.

11. 若集合$\{x|x^2+ax+1=0,x\in\mathbf{R}\}$中只含有一个元素,则 $a=$________.

三、解答题

12. 用列举法表示下列集合:

(1)$\{15$的正约数$\}$;　(2)$\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N},y=\mathbf{N}\}$.

13. 已知三元素集合 $A=\{x,xy,x-y\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,且 $A=B$,求 x 与 y 的值.

14. 设集合 $A=\{x|x^2-ax-\frac{5}{2}=0\}$,$B=\{x|x^2-\frac{19}{2}x-a=0\}$,若$\frac{1}{2}\in A$,用列举法表示集合 B.

15. 设集合 $A=\{x|x=a+b\sqrt{2},|a^2-2b^2|=1,a\in\mathbf{Z},b\in Z\}$.求证:当 $x\in A$ 时,有$\frac{1}{x}\in A$.

答案与特别提示

一、选择题

1.A　2.D　3.D　4.C　5.C　6.D　7.B

二、填空题

8.$\in$　9. 相等　10. $a\neq0$　且 $a\neq3$　11. -2或2

三、解答题

12.(1)$\{1,3,5,15\}$　(2)$\{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$,　13. $x=y=-1$　14. $B=\{\frac{1}{2},9\}$

15. 由 $x\in A$,则 $x=a+b\sqrt{2},a\in Z,b\in\mathbf{Z},|a^2-2b^2|=1$,$\therefore|a+\sqrt{2}b||a-\sqrt{2}b|=1$,$\therefore\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\pm(a-b\sqrt{2})$,$\therefore$当$\frac{1}{x}=a-b\sqrt{2}$时,有 $a\in\mathbf{Z},-b\in\mathbf{Z},|a^2-(-b\sqrt{2})^2|=1$,$\therefore\frac{1}{x}\in A$.同理$\frac{1}{x}=-a+b\sqrt{2}$时,也有$\frac{1}{x}\in A$.

1.2　子集、全集、补集

基础知识诊断

【例1】 已知$\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$,求满足条件的集合 A.

命题目的　考查子集与真子集的概念.

【解】 因为 A 中必有元素 a,b,且 A 又是集合$\{a,b,c,d,e\}$的真子集,故满足条件的 A 有:$\{a,b\}$;$\{a,b,c\}$;$\{a,b,d\}$;$\{a,b,e\}$;$\{a,b,c,d\}$;$\{a,b,c,e\}$;$\{a,b,d,e\}$共7个.

技巧评析　此类问题应分清符合条件集合 A 的最大集合与最小集合是什么,写集合必须依字母顺序从2个元素、3个元素、4个元素写出,才能不至于多写或少写.

思维发散　设$\varnothing\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,求符合题设的集合 A 的个数的最大值.

【解】 集合 A 是集合$\{1,2,3,4,5\}$的非空子集,含有1个元素的集合 A 有5个,含有2个元素的集合 A 有10个,含有3个元素的集合 A 有10个,含有4个元素的集合 A 有5个,含有5个元素的集合 A 有1个,所以 A 的个数的最大值为31.

一般地,含有 n 个元素的集合的子集有 2^n 个,非空子集有(2^n-1)个,非空真子集有(2^n-2)个.

【例2】 已知 $U=\{$三角形$\}$,$A=\{$锐角三角形$\}$,$B=\{$等腰三角形$\}$,求$\complement_UA$、$\complement_UB$.

命题目的　考查补集的概念.

【解】 $\complement_UA=\{$钝角三角形或直角三角形$\}$,$\complement_UB=\{$不等边三角形$\}$.

技巧评析　在几何中应用补集的概念时,要注意几何图形的定义和性质,同时要注意问题反面的所有可能.

思维发散　(1)设 $U=\{$平面上的圆$\}$，$A=\{$过点 M 或过点 N 的圆$\}$，求 $\complement_U A$.

(2)设 $U=\{x\mid x\leqslant 10$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$，$A=\{x\mid x\in U, x$ 为质数$\}$，$B=\{x\mid x\in U, x$ 为奇数$\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

【解】　(1)求补集必须首先明确全集与子集的意义，本题子集 A 中元素有3类：过点 M 的圆；过点 N 的圆；过点 M 且过点 N 的圆. 因而，$\complement_U A=\{$不过点 M 且不过点 N 的圆$\}$.

(2)用列举法将全集 U，子集 A，B 表示出来，即 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$.

$\therefore \complement_U A=\{0,1,4,6,8,9,10\}$，$\complement_U B=\{0,2,4,6,8,10\}$.

知识迁移诊断

【例3】　设 $A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的集合.

命题目的　灵活运用子集的概念.

【解】　化简集合 $A=\{3,5\}$. 因为 $B\subseteq A$，所以若 $B=\varnothing$ 时，有 $a=0$；若 $B\neq\varnothing$ 时，则 $a\neq 0$，这时 $B=\{\frac{1}{a}\}$，有 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$，即 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{5}$.

$\therefore$ 由实数 a 组成的集合为 $\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{3}\}$.

技巧评析　$B\subseteq A$，表明集合 B 中的元素都是集合 A 中的元素，另一方面集合 B 也可能为空集，空集是任何集合的子集，这是解题时最容易遗漏的.

思维发散　(1)若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $B\subseteq A$，求满足条件 x 的集合.

(2)已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且满足 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值集合.

【略解】　(1).由 $B\subseteq A$，得 $x^2=3$ 或 $x^2=x$，解得 $x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=0$ 或 $x=1$(舍). $\therefore$ 所求集合为 $\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$.

(2)若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，得 $m<2$；若 $B\neq\varnothing$，则有 $\begin{cases} m+1\geqslant -2 \\ 2m-1\leqslant 5 \\ m+1\leqslant 2m-1 \end{cases}$，解得：$2\leqslant m\leqslant 3$. $\therefore m$ 的取值集合为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

【例4】　已知 $A=\{0,2,4,6\}$，$\complement_S A=\{-1,-3,1,3\}$，$\complement_S B=\{-1,0,2\}$，用列举法求出集合 B.

命题目的　灵活运用补集的概念和与补集有关的性质.

【解】　$\because A=\{0,2,4,6\}$，$\complement_S A=\{-1,-3,1,3\}$，由 $S=A\cup(\complement_S A)$ 得 $S=\{-3,-1,0,1,2,3,4,6\}$，而 $\complement_S B=\{-1,0,2\}$，$\therefore B=\complement_S(\complement_S B)=\{-3,1,3,4,6\}$.

技巧评析　在解决与补集有关的问题时，应首先明确全集，同时也要注意与补集有关的性质，如 $\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$，$U=A\cup(\complement_U A)$，$\complement_U(\complement_U A)=A$，若 $x\in\complement_U A$，则 $x\notin A$，等等.

思维发散　已知全集 $U=\{2,3,5\}$，$A=\{|a-5|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求 a 的值.

【略解】　由 $U=A\cup(\complement_U A)=\{5,2,|a-5|\}=\{2,3,5\}$，$\therefore |a-5|=3$，$\therefore a=8$ 或 $a=2$.

思维方法诊断

【例5】　设 S 为全集，集合 $M\subsetneqq S$，集合 $N\subsetneqq M$，则下列关系正确的是　(　)

A. $\complement_S M\supseteq\complement_S N$　　B. $M\subseteq\complement_S N$　　C. $\complement_S M\subseteq\complement_S N$　　D. $M\supseteq\complement_S N$

命题目的　考查集合之间的包含关系.

解法1　构造特例,令 $S=\{1,2,3\}$,$M=\{1,2\}$,$N=\{1\}$,则 $\complement_S M=\{3\}$,$\complement_S N=\{2,3\}$,所以 $\complement_S M\subseteq \complement_S N$,选 C.

解法2　用韦恩图表示如图 1.1,可以直观地得到 $\complement_S M\subseteq \complement_S N$.

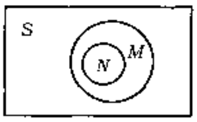


图 1.1

技巧评析　本例的两种解法都值得在解选择题时使用,构造符合条件的特例简单明了,用韦恩图更具一般性,且直观,特别在涉及补集时要善于运用集合示意图.

思维发散　(1)已知全集 S 和集合 M、N、P,$M=\complement_S N$,$N=\complement_S P$,求集合 M 与 P 间的关系.

(2)已知全集 U,M、N 是 U 的非空子集,若 $\complement_U M\supseteq N$,则必有　　(　)

A. $M\subseteq \complement_U N$　　B. $M\subsetneqq \complement_U N$　　C. $\complement_U M\subsetneqq \complement_U N$　　D. $M=N$

【略解】　(1)若 $N=\varnothing$,则 $M=\complement_S N=S$,又由 $\complement_S P=N=\varnothing$,则 $P=S$,$\therefore M=P$.

若 $N\neq\varnothing$,由韦恩图 1.2 得 $M=P$.

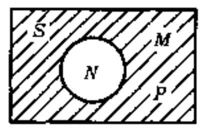


图 1.2

(2)由 $\complement_U M\supseteq N$,则 N 有两种情况,如图 1.3,①②. 对于图① $M=\complement_U N$,对于图② $M\subseteq\complement_U N$,∴选 A.

【例 6】　已知三元素集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$,$B=\{a,aq,aq^2\}$(a 为已知非零常数),若 $A=B$,求 d,q 的值.

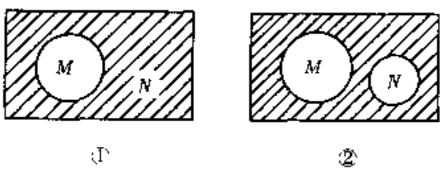


图 1.3

命题目的　应用集合相等概念和集合中元素特征解题.

【解】　由 $A=B$,则 $\begin{cases}a+d=aq\\a+2d=aq^2\end{cases}$①或 $\begin{cases}a+d=aq^2\\a+2d=aq\end{cases}$②

由①可解得 $q=1$,$d=0$,代入集合 A,B 与集合中元素互异性不合,故舍去.

由②解得 $q=-\frac{1}{2}$,$d=-\frac{3}{4}a$. 代入 $A=B=\{a,-\frac{1}{2}a,\frac{1}{4}a\}$,满足题设.

∴所求 d,q 的值为 $d=-\frac{3}{4}a$,$q=-\frac{1}{2}$.

技巧评析　集合 $A=B$ 则,A,B 中元素相同. 因集合中的元素具无序性,故相等关系有①、②两种. 由①解出的值需代入检验是否满足集合中元素互异性,不合则舍去,但得出①并解出 d,q 之值的过程是不可缺少的.

思维发散　(1)含有 3 个实数的集合可表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$,也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$,求 $a^{2001}+b^{2002}$ 的值.

(2)设集合 $A=\{x,x^2,xy\}$,$B=\{1,x,y\}$,且 $A=B$ 求实数 x,y 的值.

【略解】　(1)集合中三个数相乘得 $b=0$. 故两集合为 $\{a,0,1\}$ 和 $\{a^2,a,0\}$,$\therefore a^2=1$,$a=1$(舍),或 $a=-1$,$\therefore a^{2001}+b^{2002}=-1$.

(2)A,B 两集合三个数分别相乘仍相等,$\therefore x^4y=xy$,$\therefore xy=0$,或 $x^3=1$,$\therefore x=0$(舍)或 $y=0$ 或 $x=1$(舍),$\therefore A=\{x,x^2,0\}$　$B=\{1,x,0\}$　$\therefore x^2=1$,$\therefore x=1$(舍)或 $x=-1$,∴所求 x,y 的值分别为 $x=-1$,$y=0$.

综合应用能力诊断

【例 7】 已知 $a,x\in\mathbf{R}$, $A=\{2,4,x^2-5x+9\}$, $B=\{3,x^2+ax+a\}$, $C=\{x^2+(a+1)x-3,1\}$.
求(1)使 $A=\{2,3,4\}$ 的 x 值； (2)使 $2\in B$, $B\subsetneqq A$ 的 a,x 值； (3)使 $B=C$ 的 a,x 的值.

命题目的 考查综合运用集合关系的能力.

【解】 (1)由题设 $x^2-5x+9=3$. 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

(2)由 $2\in B$, $B\subsetneqq A$, 有 $x^2+ax+a=2$ 且 $x^2-5x+9=3$, $\therefore x=2, a=-\frac{2}{3}$. 或 $x=3, a=-\frac{7}{4}$.

(3)$B=C$ 时, 有 $\begin{cases}x^2+ax+a=1\\x^2+(a+1)x-3=3\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}x=-1\\a=-6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\x=3\end{cases}$.

技巧评析 掌握好集合相等. 包含关系的意义是解决此类问题的关键.

思维发散 已知全集 $S=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{x\in S\mid x^2-5x+a=0\}$, 求 $\complement_S A$ 和 a 的值.

【解】 由集合 A 的意义知, A 中的元素 $x\in S$ 且 $x^2-5x+a=0$, 设 $x_1\in A$, $x_2\in A$, 则 $x_1\in S$, $x_2\in S$, 且满足 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1x_2=a\end{cases}$, 且 $\Delta=25-4a\geqslant0$, $\therefore$ 可取 $a=6=2\times3$, 或 $a=4=1\times4$.

$\therefore A=\{2,3\}$ 或 $A=\{1,4\}$, 相应有 $\complement_S A=\{1,4,5\}$ 或 $\complement_S A=\{2,3,5\}$.

【例 8】 已知三个集合: $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$. 问同时满足 $B\subsetneqq A$, $C\subseteq A$ 的实数 a,b 是否存在? 若存在, 求出 a,b 的值; 若不存在, 请说出理由.

命题目的 考查综合运用集合关系的能力.

【解】 由题设可得 $A=\{1,2\}$, $\because B\subsetneqq A$, 故 B 有三种可能: $B=\varnothing$, $B=\{1\}$, $B=\{2\}$.

若 $B=\varnothing$, 则 B 中方程 $\Delta=a^2-4(a-1)<0$, 即 $a^2-4a+4<0$, a 无解, $\therefore B\neq\varnothing$.

若 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$, 则 B 中方程 $\Delta=a^2-4a+4=0$, 得 $a=2$, 此时 $B=\{1\}$, $\therefore a=2$ 满足 $B\subsetneqq A$.

又 $\because C\subseteq A$, 故 C 有四种可能, $C=\varnothing$, $C=\{1\}$, $C=\{2\}$, $C=\{1,2\}$.

若 $C=\varnothing$, 则 C 中方程的 $\Delta=b^2-8<0$, 得 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

若 $C=\{1\}$ 或 $C=\{2\}$, 则 C 中方程 $\Delta=b^2-8=0$, 得 $b=\pm2\sqrt{2}$. 但此时 C 中方程 $x^2\pm2\sqrt{2}+2=0$ 的等根为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$, 不合 $C=\{1\}$ 或 $C=\{2\}$.

若 $C=\{1,2\}$, 则根与系数的关系得 $b=3$, 且满足 C 中方程 $\Delta>0$.

$\therefore$ 当 $b=3$ 或 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$ 时, $C\subseteq A$.

综上所述, 存在 $a=2$ 且 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$ 或 $b=3$ 时, 满足题设.

技巧评析 本例除理解子集、真子集的概念之外, 结合一元二次方程的讨论及对集合的分类显得尤为重要.

思维发散 设集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x+4\}$, $B=\{m\mid m=ax^2-2x+4a\}$, 若 $A\subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【解】 化简得 $A=\{x\mid x\geqslant3\}$, 而 B 中元素 $m=ax^2-2x+4a$, 当 $a=0$ 时, $m=-2x$, 这时 m 可取一切实数, $\therefore B=\mathbf{R}$, 此时 $A\subseteq B$.

当 $a\neq0$ 时, $m=a(x-\frac{1}{a})^2+4a-\frac{1}{a}$, $a<0$ 时, $m\leqslant4a-\frac{1}{a}$, 与 $A\subseteq B$ 矛盾; $a>0$ 时, $m\geqslant4a-\frac{1}{a}$, 为使 $A\subseteq B$, 只要 $\begin{cases}a>0\\4a-\frac{1}{a}\leqslant3\end{cases}$, 解得 $0<a\leqslant1$.

综上所述, $A\subseteq B$ 实数 a 的取值范围为 $0\leqslant a\leqslant1$.