解析函数边值问题（第二版）

路见可 著

解析函数边值问题是复分析研究的一个重要方面，它既有理论意义又有广泛的应用。本书阐述各种基本边值问题及其在奇异积分方程中的应用。书中许多内容是著者的研究成果。

武汉大学学术丛书

WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY

全国优秀出版社 武汉大学出版社

武汉大学学术丛书

解析函数边值问题

（第二版）

路见可 著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析函数边值问题/路见可著.—2版.—武汉：武汉大学出版社,2004.10

(武汉大学学术丛书)

ISBN 7-307-04253-3

Ⅰ.解…　Ⅱ.路…　Ⅲ.解析函数—边值问题　Ⅳ.O175.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第049669号

责任编辑:顾素萍　责任校对:汪欣怡　版式设计:支笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：武汉中远印务有限公司

开本：850×1168　1/32　印张：18.375　字数：470千字　插页：3

版次：上海科学技术出版社　1987年2月第1版

2004年10月第2版　2004年10月第2版第1次印刷

ISBN 7-307-04253-3/O·299　定价：29.00元

内容提要

本书系统地论述了解析函数的边值问题及其在奇异积分方程上应用的最基本的内容，也包括了著者本人的一些研究工作，是函数论分支方面的一本专著。具备数学分析、线性代数和复变函数基本知识的读者可顺利阅读本书。它可作为大学数学专业、应用数学专业高年级学生和研究生的教材或教学参考书。由于这一分支在实际问题中有着广泛的应用，本书也可作为有关科技研究人员的参考用书。

第二版序

本书第二版除改正一些错字、改进和完善某些论述外，还增添了一些内容：主要为第二章 2.11～2.13 节，第七章 7.5 节．著者和同事们还有许多与本书内容直接相关的工作，由于篇幅关系，未能一一列入，只在适当地方提出，并给出参考文献，以供有兴趣的读者参阅．即便如此，也难免挂一漏万，敬请原谅．此外，解析函数边值问题在平面弹性理论中有重要应用，本书完全未涉及，因为已另有著者的专著[100]系统论述．

在改版过程中，得到了同事们特别是钟寿国教授的大力帮助，在此谨表深深的谢意．本书第一版原由上海科学技术出版社出版．经其同意，第二版改由武汉大学出版社出版，借此机会，一并向两出版社致以衷心的谢忱．

本书难免仍有欠缺和不妥之处，尚祈广大读者指正．

路见可

2004 年 9 月

前　言

解析函数的边值问题是复变函数论中极为重要的分支之一. 由于许多力学的、物理学的、工程技术中的实际问题往往可化为这类问题或者化为奇异积分方程，而后者又与这类问题有着紧密的联系，所以它有着广泛的应用. 以 Н. И. Мусхелишвили 为首的前苏联学派，在这方面做出了许多杰出的工作，并以其专著[42]闻名于世. Ф. Д. Гахов 的专著[36]也总结了这方面的工作. 在我们国内，从 20 世纪 50 年代起也有不少同志关心和从事这方面的研究工作，并进行与此有关的一些其他方面的工作，如数学弹性力学、广义解析函数及其在偏微分方程中的应用等.

上面提到的两本专著内容丰富，但篇幅过大，不便于初学. 本书的目的之一就是力图以较少的篇幅将读者带进这一领域中，因此取材尽量选择著者认为最基本的内容. 另一方面，书中也适当地收入了著者以及有关同志在这方面的某些工作.

由于设想的读者对象不只限于数学工作者，也包括广大的科技工作者，因此本书要求的预备知识只限于数学分析、线性代数和复变函数. 此外，还用到了一点有关 Fredholm 积分方程的知识，已列入附录中.

由于着眼于实际的需要，因此一些定理的条件并不要求放得很宽，这样既可使论证简洁又无损于应用. 但在所给条件下，则力求论证严谨，说理清楚；而对某些直观上很明显易于接受的事实则略而不证，对要用到的离主题较远的某些结果则仅指出参考文献而不加证明，以省篇幅.

书末所附参考文献也只列入本书所直接涉及的，因此并不是完备的．前述两专著中可找到极丰富的文献资料．

本书原稿曾在武汉大学数学系高年级学生和研究生中试用过．我的同事们，特别是林玉波教授，以及阅读过原稿的同志们，曾提出了不少很好的意见，使书稿有很多改进，著者在此表示衷心的感谢．

由于著者学识所限，书中缺点错误在所难免，尚祈广大读者不吝指正．

路见可

1984年6月于武汉大学

目 录

第一章 Cauchy 型积分 …… 1
1.1 Cauchy 型积分的意义 …… 1
1.1.1 Cauchy 型积分的定义 …… 1
1.1.2 分区全纯函数 …… 4
1.2 Plemelj 公式 …… 7
1.2.1 Cauchy 主值积分 …… 7
1.2.2 曲线上弧长与弦长的关系 …… 11
1.2.3 Hölder 条件 …… 16
1.2.4 Cauchy 主值积分存在的一个充分条件 …… 21
1.2.5 Plemelj 公式 …… 23
1.3 Cauchy 型积分边值的性质 …… 29
1.3.1 Privalov 定理 …… 29
1.3.2 Cauchy 型积分边值的导数 …… 37
1.4 核密度中含有参数的 Cauchy 主值积分和积分换序问题 …… 38
1.4.1 核密度带参数的 Cauchy 主值积分 …… 38
1.4.2 积分换序问题 …… 44
1.4.3 Cauchy 主值积分反演公式 …… 52
1.5 无穷直线上的 Cauchy 型积分 …… 56
1.5.1 $\hat{H}$ 类 …… 56
1.5.2 实轴上的 Cauchy 型积分及其性质 …… 58
1.6 解析函数边值的条件 …… 62

1.6.1 全纯函数边值的条件 …… 62
1.6.2 亚纯函数边值的条件 …… 65
1.7 高阶奇异积分和留数定理的推广 …… 68
1.7.1 Cauchy 定理的推广 …… 68
1.7.2 高阶奇异积分 …… 71
1.7.3 留数定理的推广 …… 77

第二章 封闭曲线情况下的基本边值问题 …… 87
2.1 引言 …… 87
2.1.1 Riemann 边值问题的提法 …… 87
2.1.2 跳跃问题及其解法 …… 88
2.2 齐次 Riemann 边值问题 …… 90
2.2.1 齐次 R 问题与指标概念 …… 90
2.2.2 齐次 R 问题的解法——简单情况 …… 91
2.2.3 典则函数 …… 94
2.2.4 齐次 R 问题的解法——一般情况 …… 95
2.3 非齐次 Riemann 边值问题 …… 97
2.3.1 非齐次 R 问题的求解 …… 97
2.3.2 相联 R 问题 …… 100
2.4 无穷曲线上的 Riemann 边值问题 …… 101
2.4.1 实轴上的 R 问题 …… 101
2.4.2 几点说明 …… 106
2.5 非正则型的 Riemann 边值问题 …… 107
2.5.1 齐次问题 …… 107
2.5.2 非齐次问题 …… 109
2.6 Hilbert 边值问题 …… 112
2.6.1 问题的提法 …… 112
2.6.2 单位圆内的函数在圆外的对称扩张 …… 113
2.6.3 单位圆的 H 问题 …… 115

2.6.4 半平面中的 H 问题 …… 122
2.7 复合边值问题…… 127
2.7.1 复合边值问题的提法与转化 …… 127
2.7.2 RH 问题的求解 …… 130
2.8 周期边值问题…… 133
2.8.1 周期 Riemann 边值问题的提法与转化 …… 133
2.8.2 齐次 PR 问题…… 137
2.8.3 非齐次 PR 问题 …… 142
2.8.4 周期 Hilbert 边值问题…… 148
2.9 双周期 Riemann 边值问题 …… 154
2.9.1 椭圆函数 …… 154
2.9.2 双周期 Riemann 边值问题的提法与跳跃问题的解法 …… 157
2.9.3 一般 DR 边值问题的解法 …… 159
2.10 双准周期的 Riemann 边值问题 …… 164
2.10.1 双准周期解析函数 …… 164
2.10.2 加法双准周期的 R 问题 …… 167
2.10.3 乘法双准周期的 R 问题 …… 168
2.11 双周期解析函数 Dirichlet 问题 …… 174
2.11.1 双周期解析函数的积分表示式 …… 174
2.11.2 双周期 Dirichlet 问题 …… 178
2.12 双准周期解析函数 Dirichlet 问题 …… 182
2.12.1 加法双准周期 Dirichlet 问题 …… 182
2.12.2 乘法双准周期的齐次 Dirichlet 问题 …… 188
2.12.3 乘法双准周期解析函数的积分表示式 …… 192
2.12.4 乘法双准周期的非齐次 Dirichlet 问题 …… 196
2.13 双周期解析函数的 Hilbert 问题 …… 200
2.13.1 MQ 正规化 …… 200
2.13.2 双周期 Hilbert 边值问题 …… 203

第三章 封闭曲线情况下的奇异积分方程 ······ 207
3.1 Cauchy 核的奇异积分方程和奇异算子 ······ 207
3.1.1 一般概念 ······ 207
3.1.2 奇异算子的性质 ······ 210
3.2 特征方程及其相联方程的解法 ······ 212
3.2.1 特征方程的解法 ······ 212
3.2.2 特征方程的相联方程的解法 ······ 215
3.2.3 特征方程的 Noether 定理 ······ 217
3.3 奇异积分方程的正则化及一般的 Noether 定理 ······ 219
3.3.1 奇异积分方程的正则化 ······ 219
3.3.2 Noether 定理 ······ 220
3.4 含周期核的奇异积分方程 ······ 223
3.4.1 Hilbert 核的奇异积分方程 ······ 223
3.4.2 含 ζ 函数核的奇异积分方程 ······ 231
3.5 一类奇异积分方程的直接解法 ······ 237
3.5.1 引言 ······ 237
3.5.2 求解的一般方法 ······ 240
3.5.3 $a(z)\pm b(z)$无相同零点的正则型情况 ······ 244
3.5.4 $a(z)\pm b(z)$无相同零点的非正则型情况 ······ 248
3.5.5 $a(z)\pm b(z)$有相同零点的情况 ······ 258
3.5.6 一些应用 ······ 264

第四章 一般情况下的边值问题 ······ 268
4.1 Cauchy 型积分在端点附近的性质 ······ 268
4.1.1 核密度属 H 类的情况 ······ 268
4.1.2 H^* 类函数 ······ 271
4.1.3 核密度属 H^* 类时 Cauchy 型积分的性质 ······ 276
4.1.4 核密度属 H^* 类时 Cauchy 主值积分的性质 ······ 282
4.1.5 积分路径具有节点的情况 ······ 285

4.2　一般 Riemann 边值问题 …… 286
4.2.1　开口弧段上的 R 问题 …… 286
4.2.2　带节点曲线上的 R 问题 …… 294
4.2.3　相联 R 问题 …… 297
4.2.4　几种重要特殊情况 …… 298
4.3　间断系数的 Hilbert 边值问题 …… 303
4.3.1　单位圆情况 …… 303
4.3.2　半平面情况 …… 306
4.4　其他边值问题 …… 312
4.4.1　一般复合边值问题 …… 312
4.4.2　一般的 PR 问题 …… 315
4.4.3　开口弧段的 DR 问题 …… 321
4.4.4　开口弧段的 QR 问题 …… 333

第五章　一般情况下的奇异积分方程 …… 345
5.1　特征方程及其相联方程 …… 345
5.1.1　特征方程 …… 345
5.1.2　相联方程 …… 349
5.1.3　一般 Cauchy 主值积分的反演 …… 351
5.2　完全奇异积分方程 …… 354
5.2.1　正则化问题 …… 354
5.2.2　正则化方程的讨论 …… 357
5.2.3　一般情况下的 Noether 定理 …… 361
5.3　一般带周期核的奇异积分方程 …… 368
5.3.1　曲线带节点的 Hilbert 核奇异积分方程 …… 368
5.3.2　一般 Hilbert 核积分的反演 …… 370
5.3.3　实轴上的 Hilbert 核积分的反演 …… 383
5.3.4　修改的反演问题 …… 389
5.3.5　开口弧段上带 ζ 函数核的奇异积分方程 …… 399

5.4 方程具有一阶奇异性解的情况…… 404
5.4.1 Fredholm 方程情况…… 404
5.4.2 Cauchy 核奇异方程情况…… 407
5.4.3 特征方程及其相联方程的解…… 410

第六章 函数组的边值问题与奇异积分方程组…… 417
6.1 函数组的 Riemann 边值问题…… 417
6.1.1 一些记号与名称…… 417
6.1.2 齐次 R 问题化为 Fredholm 方程…… 420
6.1.3 齐次 R 问题的典则解组…… 423
6.1.4 齐次 R 问题的一般解与指标…… 432
6.1.5 函数组的相联齐次 R 问题…… 437
6.1.6 函数组的非齐次 R 问题…… 440
6.2 函数组的 Hilbert 边值问题和复合边值问题…… 443
6.2.1 典则矩阵的一般表示…… 443
6.2.2 函数组的齐次 H 问题…… 446
6.2.3 函数组的非齐次 H 问题…… 453
6.2.4 函数组的 RH 问题…… 454
6.3 奇异积分方程组…… 457
6.3.1 特征奇异积分方程组…… 457
6.3.2 特征方程的相联方程…… 461
6.3.3 完全奇异积分方程组及其正则化…… 463
6.3.4 奇异积分方程组的 Noether 定理…… 468
6.4 某些直接有效解法…… 472
6.4.1 有理系数矩阵的 R 问题…… 472
6.4.2 核与系数具解析性的奇异积分方程组…… 476
6.4.3 解析核密度的奇异积分的反演…… 479

第七章　其他问题 …… 482
7.1　与某些分式线性变换群相联系的边值问题与奇异积分方程 …… 482
7.1.1　分式线性变换群 …… 482
7.1.2　与有限分式线性变换群有关的 Riemann 边值问题 …… 486
7.1.3　与有限分式线性变换群有关的奇异积分方程 …… 490
7.2　带位移的边值问题和奇异积分方程 …… 497
7.2.1　带位移的 Riemann 边值问题 …… 497
7.2.2　保形粘合定理以及 SR 问题转化为 R 问题 …… 505
7.2.3　其他带位移的边值问题 …… 512
7.2.4　带位移的奇异积分方程 …… 522
7.3　卷积型线性方程组 …… 524
7.3.1　Laurent 变换 …… 524
7.3.2　(A)型方程组 …… 526
7.3.3　(B)型方程组 …… 528
7.4　Cauchy 主值积分的近似计算 …… 529
7.4.1　奇点分离法 …… 529
7.4.2　Gauss-Chebyshev 型求积公式 …… 531
7.4.3　用分段线性函数逼近 Cauchy 主值积分 …… 535
7.5　带根号的边值问题 …… 538
7.5.1　带根号的 Riemann 边值问题 …… 538
7.5.2　应用于一种非线性奇异积分方程 …… 542
7.5.3　带根号的 Hilbert 边值问题 …… 548

附录　有关 Fredholm 积分方程的结果 …… 552
1. Fredholm 定理 …… 552
2. 预解核 …… 554

3. 推广 ………………………………………………… 557

参考文献 ………………………………………………… 558

索引 ………………………………………………… 566

第一章　Cauchy 型积分

本章介绍研究解析函数边值问题的基本工具，主要是关于 Cauchy 型积分与 Cauchy 核主值积分的 Plemelj 公式及其相关性质. 特别还将 Cauchy 核主值积分推广到高阶奇异积分，并作出经典留数定理的推广. 这些在本书以后各章中都要具体用到.

1.1　Cauchy 型积分的意义

1.1.1　Cauchy 型积分的定义

解析函数边值问题中最重要的工具之一就是 Cauchy 型积分. 我们来说明其定义.

设 $L=\sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ 是复平面中一组互不相交的光滑(或分段光滑)曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_n$(开口或封闭)的集合(图 1-1). 在每一 L_j 上取定一指向为正向，记为 L_j^+，从而 L 也取定了正向

$$L^+=\sum_{j=1}^{n} L_j^+;$$

它们的反向称为负向，分别记为 L_j^- 和 L^-. 以后正向常常略去“+”这一上标，分别简记为 L_j 和 L.

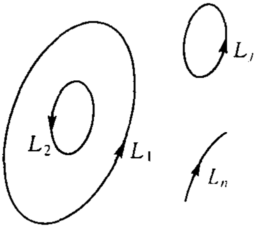

图 1-1

定义 1.1.1 设 $f(t)$为定义在 L 上的复函数，则称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-z}dt,\quad z\overline{\in}L \tag{1.1}$$

是以 $f(t)$为**核密度的 Cauchy 型积分**，只要此积分存在.

若无特别声明，我们恒认为 $f(t)$在 L 上有界可积①. 于是 Cauchy 型积分(1.1)对平面上任何 $z\overline{\in}L$ 都有意义，包括 $z=\infty$ 在内；且容易验证，$F(\infty)=0$. 亦即，$F(z)$定义在除 L 以外的整个扩充平面上.

当所有 L_j 都是封闭曲线，且 L 的正侧(即 L 的正向的左侧)围成一有界区域 D 时，Cauchy 型积分(1.1)与通常所说的区域 D 的边界 L 上的 Cauchy 积分不同. 后者的定义是：如果 $f(z)$在 D 内全纯(即单值解析)，在 $\overline{D}=D+L$ 上连续，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-z}dt,\quad z\overline{\in}L$$

叫做 $f(t)$在 L 上的 **Cauchy 积分**，且有 Cauchy 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-z}dt,\quad z\in D. \tag{1.2}$$

Cauchy 型积分(1.1)与这里的差别在于：(1.1)中的 $f(t)$只是定义在 L 上，而并不知道它是否为 D 中某全纯函数连续延拓到 L 上的边值(或即极限值)，即不知道是否存在着 D 中的全纯函数 $f(z)$，使得

$$f(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}}f(z),$$

当然也更谈不上(1.2)式是否成立.

所以，Cauchy 积分仅仅是 Cauchy 型积分的特殊情形；而对于(1.1)，一般也不能有

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}}F(z)=f(t),\quad t\in L.$$

① 若 $f(t)$无界，则认为其在 Riemann 意义下绝对可积.