方 程 組 與 行 列 式

行列式 (題號 1 ～41)

1. 定義

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 叫做二階行列式，其展開式爲 $ad-bc$。

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 叫做三階行列式，其展開式爲

$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$

2. 性質

(1) 行列式依次互換，行列式之值不變。

(2) 行列式中兩列互調，其值變號；兩行互調，其值亦變號。

(3) 一行列式中，同一列可提出公因數，同一行亦可提出公因數。

(4) 一行列式中，兩列元素成比例時，其值爲0；兩行成比例時，其值亦爲0 。

(5) 把一行列式某一列(行)的 k 倍加於另一列(行)，其值不變。

3. 行列式的降階

(1) 子行列式

設A爲一 n 階行列式，將A之第 i 列，第j 行的元素刪去後，所得之行列式，稱爲A之子行列式，以A_{ij} 表示之。

(2) 設$\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$爲一 $n\times n$ 矩陣，亦即

$$\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

則定義矩陣$\mathbf{A}$之行列式爲

$$det\mathbf{A}=\delta(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+\cdots\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}A_{1n}$$

$$=(-1)^{i+1}\left[a_{i1}A_{i1}-a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}A_{in}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}A_{ik}$$

其中$i=1,2,\cdots\cdots,n$

(3) 說明例

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

②
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

4. 特殊行列式

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

(4) $$\begin{vmatrix} a+c & b & b \\ c & a+b & c \\ a & a & b+c \end{vmatrix} = 4abc$$

$$(5)\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$(6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}=ab$$

$$(7)\begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+1$$

$$(8)\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}=4a^2b^2c^2$$

$$(9)\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$(10)\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}=(af-be+cd)^2$$

◉ 行列式的應用(題號42～50)

1. 三角形面積

設 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$，則$\triangle ABC$的面積為

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$（取絕對值）

2. 三點共線

若三點$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$共線，則

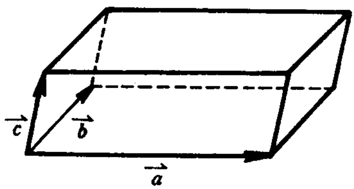
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

3. 平行六面體的體積

空間三向量$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$所張平行六面體的體積爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$（取絕對值）



4. 三線共點

若平面上三直線$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$

$a_3x+b_3y+c_3=0$共點，則

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

5. 四點共圓

設坐標上四點(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)，

若四點共圓，則

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

6. 四點共平面

設空間中四點$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$，若四點共平面，則

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

7. 五點共球

設空間中五點(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5)，若五點共球，則

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}=0$$

◉ 二元一次方程組(題號51～112)

1. 利用加減消去法與代入消去法，解二元一次方程組。

2. 方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ ， $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$， $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(1) $\Delta \neq 0$，則$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，為相容方程組。

(2) $\Delta=0$, $\Delta_x \neq 0$或$\Delta_y \neq 0$，則(x, y)無解，為矛盾方程組。

(3) $\Delta=0$, $\Delta_x=\Delta_y=0$，則(x, y)有無限多組解，為相依方程組。

3. 解係數為文字的二元一次方程組時，須詳加討論。
其原則是利用2. 中所提到的三種狀況。

4. 二元一次齊次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$

有異於(0, 0)之解之充要條件為 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$

5. 二元一次方程組

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 恰有一組解之必要條件為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

◉ 三元一次方程組(題號113～151)

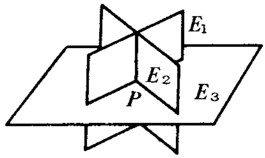
1. 利用加減消去法，代入消去法，解三元一次方程組。

2. 方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(1) $\Delta \neq 0$，則三個平面 E_1, E_2, E_3相交於一點，此時恰有一組解爲

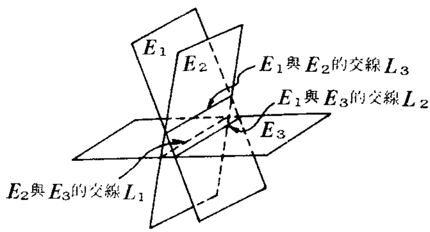


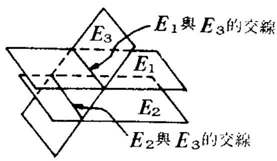
$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

(2) 若$\Delta=0$, 而Δ_x, Δ_y, Δ_z至少有一不爲0，則方程組無解，即三平面無公共點，可能情形有：

① 三平面E_1, E_2, E_3兩兩相交於一直線且交線兩兩平行

② 其中有二平面平行，而另一平面與此二平行平面分別相交於一直線





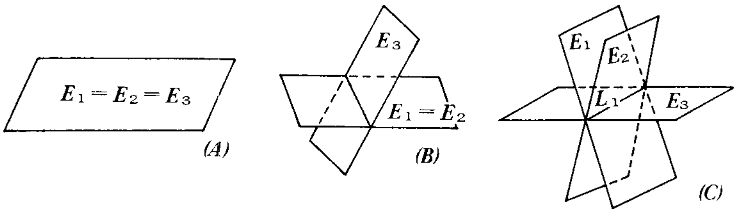
(3) 若$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

① 當方程組有無限多組解時，平面E_1, E_2與E_3間有下列三種情形：

(A) 三平面重合。

(B) 其中有二平面重合，另一平面與之相交於一直線。

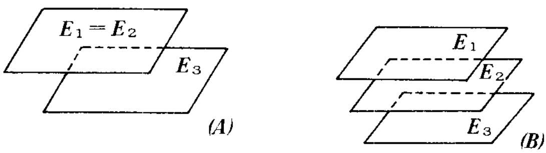
(C) 兩兩不重合，但三平面相交於一直線。



② 當方程組無解時，平面E_1, E_2與E_3有下列二種情形：

(A) 其中有二平面重合，而另一平面與之平行。

(B) 兩兩平行。



1 Ⅲ 二 ★

試求 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 之值。

【詳解】 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12-4+15-(-2-18-20)$

$= 23-(-40) = 23+40 = 63$

2 Ⅲ 二 ★

試求 $\begin{vmatrix} 35 & 6 & 2 \\ 28 & 15 & 1 \\ 21 & 36 & 4 \end{vmatrix}$ 之值。

【詳解】 $\begin{vmatrix} 35 & 6 & 2 \\ 28 & 15 & 1 \\ 21 & 36 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{array}{c} +1 \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 4 & 15 & 1 \\ 3 & 36 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = 7\begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 1 \\ 3 & 40 & 4 \end{vmatrix}$

$= 56\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 56(40+40+3-12-25-16)$

$= 56 \times 30$

$= 1680$

3 Ⅲ 二 ★

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$，則 $\begin{vmatrix} 3a-2b & 4b \\ 3c-2d & 4d \end{vmatrix} =$ ______。

【詳解】 $\begin{vmatrix} 3a-2b & 4b \\ 3c-2d & 4d \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 3a-2b & b \\ 3c-2d & d \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$

$= 12 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$= 12\cdot(-2)$

$= -24$

4 Ⅲ 二 ★★

試問 $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ 與下列何者相等？(設 $abc \neq 0$)

(A) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

(D) $\dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

【詳解】 $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & \dfrac{abc}{a} \\ b & b^2 & \dfrac{abc}{b} \\ c & c^2 & \dfrac{abc}{c} \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & a^2 & \dfrac{1}{a} \\ b & b^2 & \dfrac{1}{b} \\ c & c^2 & \dfrac{1}{c} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$ (第一、二、三列分別乘以 a, b, c)

(A) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a^3 \\ b^2 & 1 & b^3 \\ c^2 & 1 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$

(D) $\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$

(E) $\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$

故選(A)(B)(C)(D)

5 Ⅲ 二 ★★

(1) 證明 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) 設 a, b, c 爲方程式 $x^3+3x^2+4x-24=0$ 之三根，

試求 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 之值。

【證明】 (1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix}$

$= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= -(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

【詳解】 (2) 依題意 $a+b+c=-3,\ ab+bc+ca=4,\ abc=24$

$\therefore$ 所求之值

$$=-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=-(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]$$

$$=-(-3)\left[(-3)^2-3\cdot 4\right]=-9$$

6 Ⅲ 二 ★★

證明 $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

【證明】

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(b+c) & 2(c+a) & 2(a+b) \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=4abc$$

7 Ⅲ 二 ★★

(1) 證明 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$。

(2) 求 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} =$ ______。

【證明】 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

【另證】

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - a^2b - b^2c - c^2a$$

$$= (bc^2 - b^2c) + (ca^2 - a^2b) + (ab^2 - c^2a)$$

$$= bc(c-b) + a^2(c-b) + a(b^2 - c^2)$$

$$= (c-b)[bc + a^2 - ab - ac]$$

$$= (c-b)(a-b)(a-c)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$