高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷　第一分册

(初　稿)

关肇直編

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷 第一分册

(初稿)

高等教育出版社

序

这一套高等数学教程是試图作为应用数学专业的基础数学課的教材而写的。应用数学牵涉极广，因此应用数学专业的学生到了高年級要按照不同专門方向讀各种不同的課程，包括数学的以及有关的自然科学、工程技术等各方面的知識。但在学习这些专門課程之前，学生应当对数学本身有札实而足够广博的基础，并且受到足够的訓練，培养他們初步运用这些数学知識处理自然科学的問題或初步解决工程技术中的数学問題的能力。为此，我們企图自編的教材，与目前流行的教本有所不同。我們的想法是，希望用尽可能短的时間教給学生以最新、最有用的数学知識。我們也認为，关鍵在于給予学生严格的基本訓練，而不在于灌輸給学生尽可能多的知識。我們特別注意避免在两三年的过程中只使学生增加同一水平的知識，而是試图尽快地、但是逐步地提高他們的水平。一方面，我們注重联系到物理、力学、工程等方面的实例，避免追求过細的单純理論探討。另一方面，我們也反对忽視理論严謹而单純堆积一些方法。例如在講数学分析的一开始，我們要严格地講授实数理論，但这里的理論叙述应尽可能接近实际的考慮与中等学校已有的知識，因此不采用一般教科書中那些对初学的人难于接受的講法。为了完整，有时也把一些对初学者不是十分必要的理論写进来，但一般是放在附录里或用小字排，初学的人可以略过，对学习后面不发生影响。我們也注意貫徹辯証唯物主义的观点，使学生通过教程了解各种重要理論的实际来源，及如何运用到实际中去。我們也比較注意实际可行的計算方法。对于重要定理的証明，尽量采用启发式的叙述，使学生看出寻求証明的思維过

程。

从内容上說，本敎程将包括平常一个变量的微积分学、解析几何、多个变量的微积分学、綫性代数、常微分方程、矢量分析、張量分析、微分几何、群論、理論力学、数学物理方程、复变量函数論、实函数論、概率論、泛函分析等課程的初步知識，而我們的叙述将力求以說明自然現象和处理实际問題为目标，因此，物理和力学的問題将貫穿着全書。

为了达到培养学生运用数学处理自然科学工程技术中的实际問題的能力，只凭講課是絕对不够的。本敎程目标的实現将有賴于选擇得很好的习題課的配合。在这个习題課中将敎給学生更多的解决問題的技巧，特别着重取自物理、力学等方面的数学問題。由于时間的关系，习題集的出版还有待于将来。

这里作者为自己悬了一个較高的目标，与作者的能力很不相称，其所以不等使用几年后再行出版，只不过是想通过它的流行听取到更多的批評和意見，以求它在广大讀者的帮助下更快地得到改进。为此，本書初稿的出版与其說是为了作大家使用的敎科書，勿宁是供敎师和学生閱讀的参考書。

第一卷(共二分册)的內容主要是講一个变量的微积分学与解析几何。这些材料曾大部分在中国科学技术大学的物理类型的专业一年級的高等数学課上試用过。在使用中，共同工作的周云龙同志、常庚哲同志提出过不少意見，对本稿的改进帮助很多，特在此向他們致謝。在采用一些新的叙述方式时，曾受到很多同志的启发，特别是华罗庚先生的启发，也在此向他致謝。在这里編者很伤感地回忆到最近逝世的晋曾毅同志，他对于这份敎材一直非常关心，并經常提出一些修改的意見。甚至在他的病中，也还向編者問起这份敎材的情况。

最重要的乃是，如果不是中国共产党中国科学技术大学委員

会的鼓励，这里按照一定想法試編新教材的尝試是根本不可能实现的。

总之，本教程乃是极不成熟的，希望国内同道批評指正。

关肇直

1959年10月

目　录

第一章　实数理論

引言　由量測到实数

在人类生产实踐中，我們遇到的最簡单的量有两种。一种是可以“数出个数来的”，例如一間屋子里的人数、某一羊群中羊的头数、某生产队的生产工具（例如鋤头）的个数等等。这种量叫做离散量，用数学表示，乃是自然数（正整数）。关于自然数的运算，大家在中等学校里已經比較熟悉了①。有时，对于离散量我們也还要分細，例如在 10 个人分 5 个饅头时，每个人只分到“半个”，即 $\frac{1}{2}$ 个。于是我們有分数，关于分数的基本运算，大家也是足够熟悉的了②。

在人类生产实踐中，也需要量測另一种量，常称作連續量。例如长度、重量、溫度等等，在平常大小范圍內（即在物理学所謂宏观現象中）都可以看成是这样的量。举量长度为例，我們最初只能比較两个东西的长短，（例如先将两把鋤头的把的一端 A, A' 放齐，再把它們向同一方向擱置，那末当一个东西 $A'B'$ 的另外一端 B' 落在东西 AB 的两端之間（見图 1.1）时，我們說 AB 比 $A'B'$ 长。随着人类生产实踐的經驗逐漸积累，人們逐漸从任意两个东西的相互比較过渡到把任何东西同一个固定的东西相比較，也就是取这个固定的东西的长作为标准长度，或叫做“长度单位”，而把要量的东西

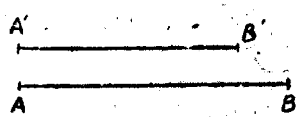

图 1.1

---

① ② 关于它的理論的簡略描述，請看本章附录。

和它从长短上加以比較。这种标准长有时是"近取諸身"(即从自己身体上选擇)的。例如用足长、用臂肘到中指尖端的长等等①。在这样量时，我們遇到了新問題：即当我們用一个具有标准长 l(例如一尺)的杆 AB(例如平常的尺)量度一个綫段 CD 的长时，先把 A 放在 C 处，使 AB 綫与 CD 綫叠合。如果 D 与 B 重合，那末 CD 与 AB 一样长(即 CD 的长也是一尺)。如果 B 落在 CD 之間的一点 B' 处，CD 就比 AB 长；于是再把 A 放在 B' 处，仍使 AB 綫与 CD 綫叠合。設 B 落在 CD 之間一点 B'' 处，…，如此进行下去，直到最后一次 B 落到 D 处为止。这时，如果上述程序共施行过 n 次，那末我們說，CD 的长含有 n 个 AB 的长，也就是它的长是 n 个单位(例如 n 尺长)。但是，象这样継續进行若干次后 B 恰巧落在 D 处，只在特殊的情况才是可能的。往往最后得一点 $B^{(n)}$，使得 $B^{(n)}D$ 不够 AB 那么长，从而上述程序不能継續施行。人类由生产实践的經驗发现如下的作法，即把 AB 分成更小的单位，例如把 AB 分成 10 个等分，而在 AB 上取一段 AA_1，它的长是 AB 的 $\frac{1}{10}$，再用 AA_1 作标准长。用它仿上述方式量度 $B^{(n)}D$，如将这种程序进行 a_1 次終止，而恰好在最后一次 A_1 落在 D 上，我們說，按标准长 l，CD 的长是

$$n+\frac{a_1}{10}.$$

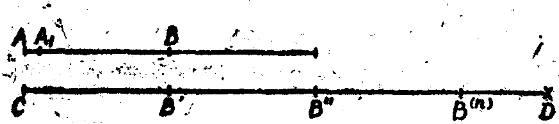

图 1.2

① 例如中国古代用过仞、寻等长度单位。顾炎武"日知录"卷十引"說文"："仞，伸臂一寻八尺"，原注："'家語'孔子所謂舒肘知寻"。又如英語中的呎(foot)和碼(yard)也都是由人身上的长度規定的(参看，例如 И. Я. Депман, Меры и Метрическая система, 1954)。

这里須用“分数”概念：10分之a_1，而a_1是在0与9之間的数。如果最后一次A_1仍不能落在D上，于是剩余的这一段比AA_1为短，我們再把AA_1分成10等分，把AA_1上这样一分AA_2（它的长是AA_1的$\frac{1}{10}$）用作标准长。再仿上述方式进行。如果經过作r次等分后，恰好程序終止，于是用最后一次的单位AA_r便把CD“量尽”，即最后一次A_r落在D上，那末用AB作单位，CD的长可以用分数

$$n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_r}{10^r}\quad(0\leqslant a_i\leqslant 9)$$

表示。这数仍是“有理数”，即經过通分，可以表示成分子分母都是正整数的分数。

在一个特定的具体問題中，即使不能当眞达到“量尽”的地步，但往往当取r足够大时，单位AA_r已經足够小，再把它細分已經难于辨識了，从而作到第r步也就可以終止了。例如在我們日常生活中，尺分十寸，寸分十分，而到了分，对于一般用途已是足够精确的了，从而我們在量长度时，量到几尺几寸几分就够了。

但由于我們对自然界的認識逐漸精密，很多技术上的問題要求准确度很高的量測。例如現在研究原子核內部結构就接触到一些很小的量，需要很高度的精密量測。这时不但用尺嫌太大，即使用分，也都过大。我們知道，电子的質量是$(9.1085\pm0.0006)\times$ $\times10^{-28}$克，这里的精确程度要求到小于10^{-34}公斤；这当然絕不是不可再超过的精确度。

但我們認为，人类对自然界的認識的精确程度是无止境的。在今天，我們認为10^{-34}公斤已是足够微小了，沒有再进一步細分的必要了。但再过一些时候，人类对于微观世界的認識更深刻了，10^{-34}公斤的重量仍嫌太大，我們就有再进一步細分的必要。于是从人类整个認識过程来看，而不是从認識的某一特定阶段来看，我

們对自然界的認識旣然是可以无限地日益精密，我們就必須設想上述那种量测也是可以无限地日益精确的。也就是說，有必要无限地細分下去。在某情况，也确实有此必要。首先注意上面談到分十份，只是为便利起見，实际上还可以分成任意多分（例如我国旧用市斤分 16 两，1 小时分 60 分鐘等）。早在古希腊时代，人們就已发現，給定两个綫段 CD 与 BA，不論如何細分 AB，有可能 CD 永远不能用 AB 及它的几分之几量尽，也就是我們不能按标准长 AB 用一个有理数表示 CD 的长。下面介紹古希腊人的那个例子。

設 $ABCD$ 是正方形。假定对角綫 AC 与边长 AB 是"可通約的"，即把 AB, AC 細分到一定程度，就可以找到一个长度单位 l，使 AC 与 AB 都是长 l 的整数倍。在 AC 上取一段 $AB'=AB$，在 B' 上作 AC 的垂綫，与 BC 交于 C'。于是 $BC'=B'C'==B'C$，从而 $B'C$ 的长也是 l 的整数倍。于是 $CC'=BC-BC'$ 的长也是 l 的整数倍。但 CC' 恰是以 $B'C$ 为边的正方形的对角綫，因而 $BC'<CC'$，所以这个正方形的边比 $ABCD$ 的边长小一倍以上：

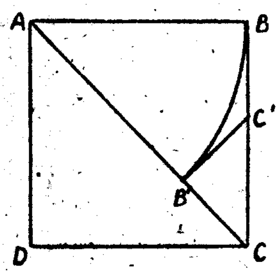

图 1.8

$$B'C'<\frac{1}{2}BC.$$

对于这个小正方形引用上述对于 $ABCD$ 所作的同样推理，并如此无限継續下去，不难看出，各小正方形的边长总是 l 的整数倍。但旣然每次正方形的边长縮小一倍以上，这样継續下去可以得出一个边长小于 l 的正方形，这与剛才所說的，这种边长应当永远是 l 的整数倍，恰恰矛盾！于是証明了 AB 与 AC "不可通約"。

如果用 AB 作单位量測 AC，我們每次把标准长分为 10 等分，所得的是如下一串数据(这里 a 表示 AC 的长)：

$$1<a<2,$$

$$1.4<a<1.5,$$

$$1.41<a<1.42,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

我們用通常的十进小数表示：

$$1.41\cdots=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots$$

等等。这个程序可以无限継續下去，永不休止，因为否則 a 便成为 AB 长的有理数倍，从而 AB 与 AC 便成为"可通約"的了。于是 a 的准确值只有經过这个无穷过程才能得出，我們写成：

$$a=1.4142\cdots,$$

卽用一个无尽十进小数表示它的值。这我們在中等学校中已經学过。这里主要想說明这种无尽小数的意义。由前面的討論可以看出，在量测的某一特定結果中，无論精确到什么程度，量测的結果永远用有理数表达，卽被量测的长是所取单位(例如尺)的有理数倍，但为了表达量测精确度可以无限地改进这一事实，我們創造了实数概念(卽凡如上述用无尽小数表示的数)，用实数表达被量测的长度。卽在一特定量测中，受到所能达到的精确度的限制，只能精确到"小数点后若干位"，从而所考虑的长度用有理数近似地表达。实数則表达在人类認識的无限过程中，可以无限地冲破任何精确度的限度，从而得出被量測的长度的准确值来。举上面正方形对角綫为例，如以边长为单位(卽标准长)，那末对角綫长既不是 1，也不是 1.4，也不是 1.41，也不是 1.414，等等。但在一特定的具体問題中，我們却不必追究这个"精确值"，而只須使用它的具有一定精确程度的近似值：1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …。这里必須

反对两种錯誤观点。一方面，我們反对那种把准确性絕对化的观点——这种观点認为只有$\sqrt{2}$才是上述对角綫长的眞正准确值，而实用工作者們使用的 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …，都是不准确的，因而覚得这些都是錯誤的，无益的。这种看法实質上是把絕对眞理和相对眞理对立隔离起来，否認"拥有无条件的眞理权的那种認識，实現于相对的錯誤的系列之中"(反杜林論，人民出版社，1956年版，88頁)，否認相对眞理无限接近絕对眞理的可能性，否認絕对眞理也只有靠这一无限列的相对眞理的逐步精确化来实現。另一方面，我們反对那种只承認相对眞理而否認絕对眞理的看法——这种看法認为創立实数概念和理論乃是徒劳的，因为在任何实用問題中，只可能出現有理数，任何无理数不可能出現在实际計算的任何步驟之中。这种看法实質上是否認絕对眞理的存在，否認認識世界的可能性或至少是否認彻底認識世界的可能性，因为他們只承認具有一定程度精确性的近似値，而否認准确值的客观意义。列宁說："从現代唯物主义即馬克思主义的观点来看，我們的知識向客观的、絕对的眞理接近的界限是受历史条件制約的，但是这个眞理的存在是无条件的，我們向它的接近也是无条件的"(列宁全集，第 14 卷，人民出版社，1957 年版 135 頁)①。

綜上所述，在量測的每一特定阶段，所得的一般只是被測的量的近似值，用有理数表达；而那个被測的量的准确值只能用一串这种近似值来无限地接近。换句話說，它的准确值用一个实数来表达，而这个实数不是别的，恰恰就是一串有理数，而这串有理数是无限地接近这个实数的。习慣上，我們把这种具特殊形式的有理数列写成无尽小数的形式，这是我們在中学里已經接触到的。用上述正方形对角綫长的例来說，它的长$\sqrt{2}$就是一串有理数：1,

① 詳見关肇直："关于高等数学中的辯証法的問題的几点体会"；自然辯証法研究通訊 1959:1, 28—31 頁。

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …, 我們常写成 1.4142…。換句話說，实数就是用来表达量測中无限精确化的过程的，用十进制表示，它可以写成一个无尽小数 $n.a_1a_2a_3\cdots$，而这个无尽小数乃是指一串有尽小数

$$n,\ n.a_1,\ n.a_1a_2,\ n.a_1a_2a_3\cdots.$$

下面談到"数"时，如果不加特殊声明，常是指实数而言。

有了上面引入的正实数，我們还可以引入負实数，卽負实数

(1)　$$-n.a_1a_2a_3\cdots.$$

由有理数串 $-n,\ -n.a_1, -n.a_1a_2, -n.a_1a_2a_3,\cdots$ 决定的实数。下面当定义了实数的四則运算时，才可以看到数 (1) 与实数 $n.a_1a_2a_3,\cdots$ 之間的关系。

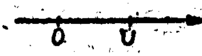

图 1.4

引入实数之后，我們还要介紹一下实数的几何表示。取一条标有方向的直綫，在它上面取任意一点 O，叫做原点。在这条直綫上取一点 U，使 $\overrightarrow{OU}$（卽从 O 到 U 的綫段）的方向与直綫上原有方向一致。对于这条直綫上任意一点 A，我們用 OU 作单位长来量測 $\overrightarrow{OA}$。設相应的正实数是 a，那末我們用 $+a$ 或 $-a$ 与 A 点相应，完全看 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OU}$ 方向一致或相反来决定。于是直綫上的每个点 A 与一个（正、負或 0）实数 a 相应。反之，給定任意实数 α，我們在直綫上取一点 A，使綫段 $\overrightarrow{OA}$ 之长等于 α 的絕对值 $|\alpha|$，并使 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OU}$ 的方向一致或相反，完全看 α 为正或为負来决定。如果 α 是有理数，这个点 A 的存在是可以証明的。如果 α 不是有理数，这个点 A 的存在，我們取作一个公理，叫做康托尔-狄德金 (Cantor-Dedekind) 公理，这乃是所謂解析几何学的基础假設。于是实数全体与直綫上的点之間建立了一一对应。我們称数 α 作为点 A 的坐标（按坐标系統 $\{O;\ \overrightarrow{OU}\}$）。

以上就是由量測的需要产生了实数的一般概念。下面我們将

規定实数的演算法則。

§1. 实数的表示与运算

把实数看作无尽小数并規定实数的四則运算，大家在中学本已学过。这里对这种講法給予严謹的論述。

定义 1 所謂实数，乃是指一个形如以下的有理数列:

(1) $$\alpha=(\alpha_n),\quad n=1,2,\cdots$$

由 $$\alpha_n=a.a_1a_2\cdots a_n\equiv a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$$

决定。这里符号(α_n)表示数列$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots$的縮写，$a$是整数(正、負或零)，而$a_i$都是在0与9之間的整数：$0\leqslant a_i\leqslant 9\quad(i=1,2,\cdots)$。

例 1 所謂实数$\sqrt{2}$就是有理数列

1, 1.4, 1.41, 1.4142, 1.41421,

1.414213, 1.4142135, ….

例 2 所謂实数π，就是有理数列

3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159,

3.141592, 3.1415926, 3.14159265, ….

例 3 $-4,\ -4+0.8,\ -4+0.85,\ -4+0.858,\ -4+0.8584,\cdots$ 决定一个实数。

注 为方便起見，我們不用数列的形式(1)来表示实数α，而用无尽小数的形式来表示它，卽写成

(2) $$\alpha=a.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}\cdots.$$

这样的实数概念与我們所熟悉的有理数概念的关系，由下面的討論說明。

定义 2 无尽小数(2)叫做循环的，是指从某一位(第n_0位)以后，相接連的l位是循环出現的，也就是說，从n_0+1到n_0+l位与从n_0+l+1位到n_0+2l位完全一样，等等。用公式表达，卽存

在标号 n_0, 及自然数 l, 使

(3) $$a_{n_0+k}=a_{n_0+k+l}. \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

这时我們写成

$$\alpha=a.a_1a_2\cdots a_{n_0}\dot{a}_{n_0+1}\cdots\dot{a}_{n_0+l}.$$

注 由(3)可知

$$a_{n_0+1}=a_{n_0+l+1}=a_{n_0+2l+1}=\cdots=a_{n_0+kl+1},$$

$$a_{n_0+2}=a_{n_0+l+2}=\cdots=\cdots=a_{n_0+kl+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n_0+l}=a_{n_0+2l}=\cdots=a_{n_0+(k+1)l}.$$

例 1 $0.142857142857142857 14\cdots$, 这里 $n_0=0$, $l=6$。

例 2 $0.166666\cdots$, 这里 $n_0=1$, $l=1$。

定理 1 每个循环无尽小数可以看作是一个有理数。

証 事实上,令 $\gamma=\underbrace{0.00\cdots0}_{n_0\text{位}}\dot{a}_{n_0+1}\cdots\dot{a}_{n_0+l}$,

那末,利用(1)中的符号 α_n, 可知

$$\alpha_{n_0+kl}=\alpha_{n_0}+\gamma+\frac{\gamma}{10^l}+\frac{\gamma}{10^{2l}}+\cdots+\frac{\gamma}{10^{(k-1)l}}=$$

$$=\alpha_{n_0}+\frac{\gamma\left(1-\frac{1}{10^{kl}}\right)}{1-\frac{1}{10^l}};$$

从而

$$\left|\alpha_{n_0+kl}-\left(\alpha_{n_0}+\frac{\gamma}{1-\frac{1}{10^l}}\right)\right|=$$

$$=\left|\left(\alpha_{n_0}+\frac{\gamma\left(1-\frac{1}{10^{kl}}\right)}{1-\frac{1}{10^l}}\right)-\left(\alpha_{n_0}+\frac{\gamma}{1-\frac{1}{10^l}}\right)\right|=\frac{\gamma}{1-\frac{1}{10^l}}\cdot\frac{1}{10^{kl}},$$

而不等式右边随 k 增大可以变得小于任意預給的数。由此可見，在上述假定下，所給的有理数列(α_n)无限地接近有理数

$$\alpha_{n_0}+\frac{\gamma}{1-\frac{1}{10^l}}. \tag{4}$$

也就是随着 n 增大，α_n 可以接近有理数(4) 到任意的程度。这时，我們把相应的实数(α_n)与有理数(4) 等同起来。于是可見循环无尽小数可以看作是有理数。証完。

反之，我們可以証明，凡有理数必可表示成循环无尽小数。

定理 1（之逆） 有理数 $\frac{a}{b}$(a, b 是互質的整数，$b>0$)必可表示成循环无尽小数。

証 我們分两步来証明。

1) 先考察 b 与 10 无大于 1 的公因子(即 b 与 10 互質)的情形。任何整数用 b 除(中学所謂长除法)，所得最后余数必小于 b，即必是 $0, 1, 2, \cdots, b-1$ 之中的一个数。又如一数 a 与 b 互質，而 a 被 b 除的余数是 r：$a=qb+r$ (q 是整数，$0\leqslant r<b$)，那末 r 与 b 也互質，因为如果 r 与 b 有大于 1 的公因子，这个数也必除尽 a，从而 b 变成与 a 有大于 1 的公因子了。設在 $0, 1, \cdots, b-1$ 之中恰有 h 个数与 b 互質，并把它們表示成 $r_1, r_2, \cdots, r_h$。注意，如两个数 x 与 y 之差不被 b 除尽，那末因 10 与 b 互質，$10x$ 与 $10y$ 的差也不被 b 除尽。由此可知，h 个数 $10r_1, 10r_2, \cdots, 10r_h$ 之中沒有任何两个数之差可以被 b 除尽。把它們用 b 除，最后所得小于 b 的余数必互不相同，从而如果令 $10r_1=q_1b+r_1', 10r_2=q_2b+r_2', \cdots, 10r_h=q_hb+r_h'$, $(0\leqslant r_1', r_2', \cdots, r_h'<b)$，那末 $r_1', r_2', \cdots, r_h'$ 实际上不过是 $r_1, r_2, \cdots, r_h$ 的另一种排列。于是

$$(q_1b+r_1')(q_2b+r_2')\cdots(q_hb+r_h')=10r_1\cdot 10r_2\cdot\cdots\cdot 10r_h,$$

換句話說

$$10^hr_1r_2\cdots r_h-r_1r_2\cdots r_h=10^hr_1r_2\cdots r_h-r_1'r_2'\cdots r_h'$$

被 b 除尽。既然 $r_1, \cdots, r_h$ 与 b 互質，所以 10^h-1 被 b 除尽。令

$$10^h-1=q_0b,$$

那末
$$\frac{a}{b}=\frac{aq_0}{bq_0}=\frac{aq_0}{10^h-1}=\frac{aq_0}{10^h}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^h}}=$$

$$=\frac{aq_0}{10^h}\left[1+\frac{1}{10^h}+\frac{1}{10^{2h}}+\cdots+\frac{1}{10^{kh}}+\frac{\frac{1}{10^{(k+1)h}}}{1-\frac{1}{10^h}}\right],$$