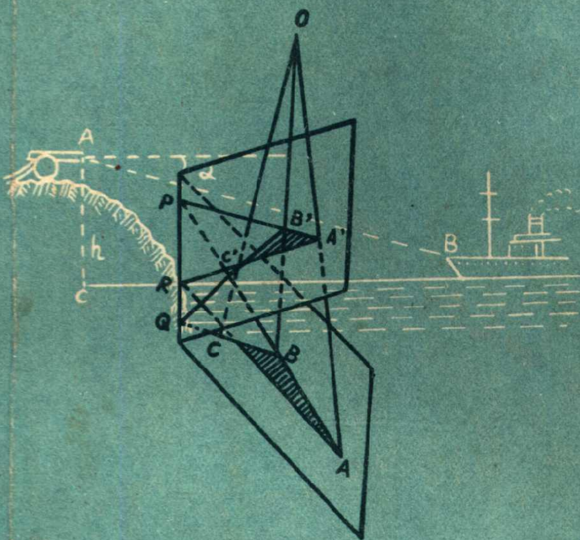

高中数学复习资料

江西省教育厅教学研究室编

新 知 識 出 版 社

高中数学复习資料

江西省教育厅教学研究室編

新知識出版社

一九五七年·上海

高 中 数 学 复 习 資 料

江西省教育厅教学研究室編

*

新 知 識 出 版 社 出 版
(上 海 湖 南 路 9 号)
上海市書刊出版業营業許可証出 015 号

上海集成印制厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：850×1168 1/32　印張：4 1/4　字数：110,000
1957年5月第1版　1957年5月第1次印刷
印数：1—150,000 本

統一書号： 13076·75
定　价：(7)0.46元

編者的話

几年来，我省高中学生在党和政府的关怀及广大教师的努力教导下，学习質量正在不断提高。但根据形势发展的需要与高等学校在招生質量方面的要求来衡量，则还存在着一定的缺陷。我們曾进行过几次高中毕业生考高等学校的試卷質量檢查，发現学生在知識上的缺陷很多。以数学科来說，諸如基本概念不清、数学各科之間的知識联系不起来、独立思考和理解能力較差、不善于运用学得的知識来解决实际問題等，都不同程度地存在着。因此，当問題涉及的知識面較广，或略微轉一个弯时，便束手无策，不知从何下手。針对这种情况，我們着重研究了改进的办法，認为除在教学工作上应作更大的努力外，必需帮助学生系統地复习，借以巩固学得的知識，这对提高学生学习質量將具有一定意义。我省有的学校在这方面已經摸索了一些經驗，在这个基础上，我們决定編輯一本供高中数学教师指导学生复习和学生自修用的参考資料。

这本参考資料主要是根据中学数学教学大綱的精神及其所規定的知識范圍，針对目前学生在数学学习上的不足来編輯的。着力于指导学生对基本概念的掌握与消化，数学本身各科之間知識的联系与活用，以及独立思考与理解能力的培养和提高。讀者如配合教科書进行复习，对巩固在高中阶段所学习的数学知識或者不无少补。

但限于我們的水平，其中缺点或不足之处还在所难免，倘望先进地区、先进学校的教师們多多提供意見。假使这本参考資料能在提高学生数学学习質量方面有一点小小的补益，那將是我們最大的安慰，也正是我們的期望。

江西省教育厅教学研究室 1957.3.1.

目 录

第一部分 代 数

第二部分 平面几何

第三部分 立体几何

第四部分 三 角

第一部分 代 数

第一章 数的概念发展

§1. **自然数** 以"1"为單位，由一个和若干个單位所組成的数的集合中的每一个数都叫做自然数（即正整数）。

即：1，2，3，4，5，…………

性質：1）有順序性 任意两自然数都可以比較它們的大小；

2）自然数集合中有最小数"1"，但无最大数；

3）在自然数集合中，永远可以施行加、乘两种运算。

§2. **整数** 整数包括自然数和零及与自然数相反的数。

即：……，−4，−3，−2，−1，0，1，2，3，4，……

性質：1）有順序性 整数集合与数軸上的整数点建立一一对应关系，任意两整数都可以比較它們的大小；

2）在整数集合中无最小数，也无最大数；

3）在整数集合中永远可以施行加、减、乘三种运算。

§3. **有理数** 能用既約分数形式表示的数叫做有理数。有理数包括整数、分数、有限小数和无限循环小数。

性質：1）有順序性 有理数集合可用数軸上的点表示，任意两有理数都可以比較它們的大小；

2）有稠密性 在有理数集合中，任意两有理数之間必然还有有理数，如：a、b 为二有理数，则必有有理数 $\frac{a+b}{2}$ 在 a 与 b 之間；

3）有間断性 有理数集合不能与数軸上的点建立一一对

应关系，任意兩有理数之間有非有理数存在，如：1.4 与 1.5 之間有 $\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$，而 $\sqrt{2}$ 能用数軸上的点表示；

4) 在有理数集合中无最小数，也无最大数；

5) 在有理数集合中永远可以施行加、减、乘、除四种运算（除数不得为零）。

§4. 实数 有理数与无理数（即无限不循环小数）統称为实数。

性質：1) 有連續性和順序性 实数集合与数軸上的点能建立一一对应关系，任意兩实数都可以比較它們的大小；

2) 在实数集合中无最小数，也无最大数；

3) 在实数集合中永远能施行加、减、乘、除四种运算（除数不得为零）；

4) 实数的絕对值 a 为实数，則其絕对值为：

$$|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & 若\ a>0 \\ 0 & 若\ a=0 \\ -a & 若\ a<0 \end{cases}$$

§5. 复数 形如：$a+bi$（a、b 都是实数，$i=\sqrt{-1}$）的数叫做复数。当 $b=0$ 时則 $a+bi=a$ 是实数，当 $b\neq 0$ 时，則 $a+bi$ 是虛数；当 $a=0$ 和 $b\neq 0$ 时，則 $a+bi=bi$ 是純虛数。故复数是实数与虛数的总称。

性質：1) 无順序性 复数不能与数軸上的点建立一一对应关系，但能与平面上的点建立一一对应关系。任意兩复数无大小之别。只在 $a=c$ 和 $b=d$ 的条件下，等式 $a+bi=c+di$ 才能成立；只有在 $a=b=0$ 的条件下，才有 $a+bi=0$。

2) 在复数集合中永远可以施行加、减、乘、除、开方五种运算（除数不得为零）；

3) 复数的絕对值（即模数）是：$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$；

4) 复数可用三角函数式表示。如

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\theta=arc\,\mathrm{tg}\frac{b}{a}+n\pi\ (n\text{ 为整数})$$

总括数的概念的发展可列表如下:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{負整数}\end{array}\right\}\text{整数}\\ \text{分数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

复习思考题一

1．比較大小:

1) $\frac{7}{12}$ 与 $\frac{35}{66}$;　　2) $-3\frac{2}{5}$ 与 $-\sqrt{11}$;　　3) $\sqrt{10}$ 与 π;

4) $\sqrt[4]{4}$ 与 $\sqrt[6]{\frac{63}{8}}$;　　5) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ 与 $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$;　　6) $\sqrt{-4}$ 与 -2;

7) $1+i$ 与 $1-i$;　　8) $\log_2 1$ 与 $\log_2\frac{1}{4}$;　　9) $\mathrm{tg}\,1$ 与 $\mathrm{ctg}\,30°$;

10) $\sin 60°$ 与 $\log_2 2\sqrt{2}$;　　11) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 与 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$。

2．演算下列各式:

1) $\sqrt{(-2)^2}$;　　2) $\sqrt{(x-3)^2}$;　　3) $\sqrt[3]{(x-1)^3}$。

3．x 取什么值时，下列等式才能成立?（限用算术根）

1) $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$;　　2) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$。

4．在实数集合內，下列各式在什么条件下有意义?

1) $\frac{1-\sqrt[3]{x}}{2x+1}$;　　2) $\frac{\lg x}{x+1}$;　　3) $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{-x}}$;　5) $\frac{1}{|x|-x}$;　6) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$;　7) $\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}$。

5．下列各方程，哪些在自然数集合內有解?哪些在整数集合內有解?哪些在有理数集合內有解?哪些在实数集合內有解?哪些在复数集合內有解?哪些无

解?为什么?并將它們分类。

1) $|x-2|=1$;　2) $4x^2+1=0$;　3) $2x^2-3x-1=0$;

4) $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=0$;　5) $|x+1|+|x-1|=0$;　6) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=-1$;

7) $x^4-4=0$;　8) $x^4+4=0$;　9) $\log_{\sqrt{2}}x=-4$;　10) $(x+1)\lg x=0$。

6. 解下列方程:

1) $(x-2y\sqrt{-1})-(2y-3x\sqrt{-4})=(3x+\frac{2}{3}\sqrt{-9})-(2\frac{1}{3}-y)$;

2) $|x|-x=1-2i$;

3) $(1+i)^x=(1-i)^x$;

4) $(2+i)x^2-4x-2+i=0$。

7. 化下列各数为三角函数式:

1;　$-i$;　$\sqrt{2}i-\sqrt{2}$;　$-1-\sqrt{3}i$。

8. 証明: $1+2i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}i$, $-2-i$ 四点共圓。

9. 指出下列各題中的錯誤来:

1)
$$a=b$$
$$a^2=ab$$
$$a^2-b^2=ab-b^2$$
$$(a+b)(a-b)=b(a-b)$$
$$a+b=b$$
$$2b=b$$
$$\therefore\quad 2=1;$$

2)
$$4-10=9-15$$
$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}$$
$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$$
$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$$
$$\therefore\quad 2=3;$$

3)
$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$$
$$\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$$
$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$
$$(\sqrt{1})^2=(\sqrt{-1})^2$$
$$\therefore\quad 1=-1;$$

4)
$$3>2$$
$$3\log\frac{1}{2}>2\log\frac{1}{2}$$
$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^3>\log\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\therefore\quad \frac{1}{8}>\frac{1}{4};$$

5) 設 $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y}$,則有:

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{x-y}{(y+z)-(z+x)}=-1 \quad \therefore \ \frac{1}{2}=-1。$$

第二章　代数式恒等变换

§1. 代数式的有关知識

讀者自行弄清以下各概念:

代数式〈 整式、分式 〉✕〈 有理式、无理式 〉

代数式的〈
- 因式——公因式——最高公因式(*H. C. F.*)
- 互質
- 倍式——公倍式——最低公倍式(*L. C. M.*)

§2. 代数式的因式分解

I) 提公因式法:

基本范例: $am+bm-cm=m(a+b-c)$。

例 1　$-8a^3b+12a^2b-20ab^2=-4ab(2a^2-3a+5b)$。

II) 应用簡乘公式分解法:

基本公式: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3;$$

$$(a^2+b^2+c^2+\cdots\cdots)+2(ab+bc+\cdots\cdots)$$
$$=(a+b+c+\cdots\cdots)^2;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)。$$

例 2　$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$。

原式 $=(x^4-2x^2y^2+y^4)-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$

$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$

$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$

$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)$。

或：原式$=(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2)-4x^2y^2$(讀者續完)

例 3 $x^{12}-y^{12}$

原式 $=(x^6-y^6)(x^6+y^6)$

$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)$

$(x^4-x^2y^2+y^4)$。

以上是在有理数集合內能分解的因式。

但在实数集合內可以繼續分解，因：

$x^4-x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-3x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(\sqrt{3}xy)^2$

$=(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)$

又在复数集合內还可繼續分解，因：

$x^2+y^2=x^2-(yi)^2=(x+yi)(x-yi)$,

$x^2\pm xy+y^2=x^2\pm 2x\left(\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$

$=\left(x\pm\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)^2$

$=(x\pm\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}yi)(x\pm\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}yi)$,

$x^2\pm\sqrt{3}xy+y^2=(x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}yi)(x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}yi)$。

III. 分組分解法：

基本范例：$am+bm+an+bn=a(m+n)+b(m+n)$

$=(a+b)(m+n)$。

例 4 $a^2-ma+mb-b^2$

原式$=(a^2-b^2)-m(a-b)=(a-b)(a+b-m)$。

IV. 添置补助项分解法:

例 5　x^4+4

$$原式=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)。$$

在复数集合内仍可仿照例 3 繼續分解为四个因式的連乘积。

例 6　x^3-7x+6

原式$=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)$（讀者續完）

V. 应用二次方程根的公式分解法:

方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式是:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

例 7　$6x^2-11x-2$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot6(-2)}}{12}=\frac{11\pm13}{12}$$

$$x_1=2;\qquad x_2=-\frac{1}{6}。$$

$$\therefore\quad 6x^2-11x-2=6(x-2)\left(x+\frac{1}{6}\right)=(x-2)(6x+1)。$$

（讀者思考一下，兩个因式前面为什么要乘以 6？）

例 8　$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$

$$x=\frac{2(y+1)\pm\sqrt{4y^2+8y+4+12y^2-40y+12}}{4}$$
$$=\frac{2y+2\pm4(y-1)}{4}$$

$$x_1=\frac{3y-1}{2};\qquad x_2=\frac{3-y}{2}。$$

$$\therefore 原式=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{3-y}{2}\right)$$
$$=(2x-3y+1)(2x+y-3)。$$

VI. 应用剩余定理(綜合除法)分解法:

剩余定理: 用 $x-\alpha$ 整除多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \text{ 时，得出余式}$$

$$R=f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n,$$

若 $R=f(\alpha)=0$，则 $x-\alpha$ 能整除 $f(x)$。

例 9 証明 $x+y+z$ 能整除 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

解 $f[-(y+z)]=[-(y+z)]^3+y^3+z^3-3yz[-(y+z)]=0$

(証毕)

例 10 $2x^3+3x^2-11x-6$

設 $\alpha x-\beta$ 为原式之因式，則 $\alpha x-\beta=\alpha\left(x-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$。

α 之值不外乎是 ±1; ±2;

β 之值不外乎是 ±1; ±2; ±3; ±6。

$\therefore$ $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 之值不外乎是 ±1; ±2; ±3; ±6; $\pm\dfrac{1}{2}$; $\pm\dfrac{3}{2}$。

試行綜合除法时，最好先用絕对值較小的整数試起，然后用絕对值較小的分数去試:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -11 & -6 \\
 & & 4 & 14 & 6 \\
\hline
2 & 2 & 7 & 3 & 0 \\
 & & -6 & -3 & \\
\hline
-3 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ $2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(x+3)(2x+1)$

§3. 分式的演算

例 11 若 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-2$, 求 $\dfrac{3a^2b^2-ab^3+6a^2b}{9a^3b^4}$ 之值。

解此类問題时，不宜操之过急，应待分式化簡后再行代入:

$$\text{原式}=\frac{ab(3ab-b^2+6a)}{9a^3b^4}=\frac{3ab-b^2+6a}{9a^2b^3}$$

$$=\frac{3\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2)-(-2)^2+6\cdot\frac{1}{3}}{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2(-2)^3}=\frac{1}{2}。$$

例 12 化簡 $\left[2+\frac{1}{a^2-1}-\frac{2a^2}{a^2+2a-3}-\frac{4a}{a^2+4a+3}\right]:$

$$:\left[\frac{a}{a+3}-\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{2(a^3+1)}{a^3+3a^2-a-3}\right]$$

解 $\because$ $a^2-1=(a-1)(a+1)$； $a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$；

$a^2+4a+3=(a+1)(a+3)$；

$a^3+3a^2-a-3=(a-1)(a+1)(a+3)$。

$\therefore$比的前后項的公分母都是$(a-1)$ $(a+1)$ $(a+3)$，經过合理演算后，原式可化簡为：$\frac{3}{3a+2}$。（讀者自行演算）

§4. 指数的意义

1）正整指数：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n个a}$；

2）零指数：$a^0=\frac{a^n}{a^n}=1$；

3）負指数：$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}$；

4）分指数：$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$。

5）无理指数： 当 $a>0$，α 为无理数，而 α_1 和 α_2 分别表示 α 的精确到任意小的不足和过剩近似值时，则

$$a^{\alpha_1}=a^{\alpha-h}=a^{\alpha}\left(\frac{1}{a}\right)^h,$$

$$\lim a^{\alpha_1}=\lim_{h\to0}a^{\alpha-h}=a^{\alpha}\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{a}\right)^h=a^{\alpha};$$

$$a^{\alpha_2}=a^{\alpha+h}=a^{\alpha}\cdot a^h,$$

$$\lim a^{\alpha_2}=\lim_{h\to 0} a^{\alpha+h}=a^{\alpha}\lim_{h\to 0} a^{h}=a^{\alpha}。$$

§5. 指数的运算法则

当 $a>0$, m、n 为任意实数时有：

1） $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 和 $a^m\div a^n=a^{m-n}$；

2） $(a^m)^n=a^{mn}$ 和 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$。

§6. 根式的意义

讀者試回忆一下下列基本概念：

根式—同次根式—同类根式；算术根—代数根。

§7. 根式的性質

1） $(\sqrt[n]{a})^n=a$；

2） 偶次根式只允許取算术根，如

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$，当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$；

因此，$\sqrt[n]{a^n}=a$ 不是恒等式；

3） $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$；

4） 若 a, b, c 都是正数，

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}；\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}；$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}。$$

5） 同次根式可以进行乘除化簡；同类根式能进行加减化簡。独次根式可根据需要与可能移因式于根号外。如：

$$3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{6}=6\sqrt[3]{2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}$$

$$=3\sqrt[3]{2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}。$$

6） 根式 $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$ 的化簡：

設 $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，則有：