GAODENG DAISHU JIETI FA

高等代数解题法

赵礼峰 编著

安徽大学出版社

高等代数解题法

赵礼峰　编著

安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数解题法/赵礼峰编著．-合肥:安徽大学出版社,2004.8
ISBN 7-81052-881-5

Ⅰ.高...　Ⅱ.赵...　Ⅲ.高等代数-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.015-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 077115 号

高等代数解题法　　　　**赵礼峰　编著**

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**经　销**	各地新华书店
		印　刷	中国科学技术大学印刷厂
联系电话	编辑室 0551-5108438 发行部 0551-5107784	**开　本**	787×960　1/16
		印　张	21
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**字　数**	376.3 千
责任编辑	徐　建　鲍家全	**版　次**	2004 年 8 月第 1 版
封面设计	张　犇	**印　次**	2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-81052-881-5/O·47　　　　**定价** 29.50 元

前　言

高等代数是数学专业的一门重要基础课，也是理工科各专业大学生重要的学习工具，更是数学专业硕士研究生入学必考课程之一。《高等代数解题法》一书是理工科大学生复习高等代数的参考用书，曾作为选修课教材使用多年。作者试图用较小篇幅对高等代数的内容进行概括、综合和提炼，用以引导学生对该课程进行全面、系统的复习与提高；试图归纳出一些新方法用以开拓读者的思维、培养读者的创造力；用以帮助读者对教材内容融会贯通，给报考硕士研究生的同学提供丰富的解题信息。其特点是：

1. 本书内容按高等代数知识结构体系编排，从思想到内容均作了精心安排，并注意归纳、类比。读者通过系统学习及做习题，会使自己的高等代数水平有一个较大的提高。

2. 思路清晰、重点突出。书中例题及习题均为作者收集、积累、精心选编的，多数题目选自全国重点高校近年来的考研入学试题。所有题目均由作者亲自解答或给出提示，读者可通过各章节内容的学习迅速找到自己所需内容或解题方法。

本书集作者20余年高等代数教学的经验，并在教学实践中逐步完善。应当说，该书是一部集知识、资料、方法、应考于一体的著作，是广大读者尤其是考研人员的良师益友，也是专业课教师的一本很好的参考书。

本书在编写过程中，始终得到数学系主任侯为波教授的关心和指导，并得到淮北煤炭师范学院学术著作出版基金的资助，在此谨表示衷心的感谢！

限于本人水平，疏漏谬误之处在所难免，恳请广大读者及专家不吝赐教。

赵礼峰

2004年4月于淮北煤师院

目　录

第 1 章

一元多项式

本章要求读者掌握一元多项式的整除性质,证明方法,最大公因式的证明与求法,掌握一元多项式的分解理论等内容.

§1.1 一元多项式的整除

一、内容提要

1. 多项式的定义、次数、相等、零多项式.

2. 带余除法定理:任给 $f(x),g(x)\in P[x]$(P 为数域)且 $g(x)\neq 0$,则有惟一的 $q(x),r(x)\in P[x]$,使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中
$$\partial(r(x))<\partial(g(x)) \text{ 或 } r(x)=0,$$
当且仅当 $r(x)=0$ 时,$g(x)\mid f(x)$.

3. 综合除法:设 $f(x)\in P[x]$,$a\in P$,则

$$f(x)=g(x)(x-a)+f(a),\ (x-a)\mid f(x)\Leftrightarrow f(a)=0.$$

二、典型例题

(一) 含单位根多项式的整除

多项式 x^n-1 的根称为 n 次单位根,若 ε 是 x^n-1 的根且 $\varepsilon^0=1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}$ 是 n 个互不相同的数,则称 ε 为 n 次本原单位根.若 $g(x)$ 只含单位根且重数均为 1,要证明 $g(x)\mid f(x)$,只须证 $g(x)$ 的所有根均为 $f(x)$ 的根即可.

例 1　设 $g(x)=x^2+x+1$,$f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,$m,n,p$ 都是非负整数,则 $g(x)\mid f(x)$.

证明 $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$,故 $g(x)$的根均为三次本原单位根,且重数均为 1. 设 w_1,w_2 是 $g(x)$ 的两个根,则 $w_1^3=w_2^3=1$ 且 $w_1\neq w_2$, $w_k^2+w_k+1=0$ $(k=1,2)$.

$$f(w_1)=w_1^{3m}+w_1^{3n+1}+w_1^{3p+2}=1+w_1+w_1^2=0$$

同理 $f(w_2)=0$,从而 $g(x)\mid f(x)$.

例 2 设$(x-1)\mid f(x^n)$,证明:$(x^n-1)\mid f(x^n)$.(上海师大 2002 年)

证明 由$(x-1)\mid f(x^n)$,故 $f(1^n)=f(1)=0$,设 $\varepsilon_k(1\leqslant k\leqslant n)$为任一 n 次单位根,则 $f(\varepsilon_k^n)=f(1)=0$,又 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 两两不等,故

$$x^n-1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)$$

整除 $f(x^n)$,即$(x^n-1)\mid f(x^n)$.

例 3 证明:$x^d-1\mid x^n-1\Leftrightarrow d\mid n$.

证明 ($\Leftarrow$) 设 $d\mid n$ 且 ε 是一个 d 次原根,即 $1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{d-1}$为 x^d-1 的所有根,从而 $\varepsilon^n=1$,故$(\varepsilon^s)^n=(\varepsilon^n)^s=1$, $s=0,1,\cdots,d-1$. 即 x^d-1 的所有根均为 x^n-1 的根,故 $x^d-1\mid x^n-1$.

($\Rightarrow$) 设 $x^d-1\mid x^n-1$,ε 为任一 d 次单位根,则 ε 也是 x^n-1 的根,从而 $\varepsilon^n=1$,设 $n=qd+r$,$0\leqslant r<d$. 于是

$$\varepsilon^n=\varepsilon^{dq+r}=\varepsilon^r=1.$$

又 ε 为 d 次单位原根,故 $r=0$,即 $d\mid n$.

(二)一般多项式整除证明

要证 $g(x)\mid f(x)$,一般利用带余除法定理:设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$,则 $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow r(x)=0$.

例4 设 $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)\in P[x]$,$(x^n-a)\Big|\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i$ $(a\in P,a\neq0)$,则$(x-a)\mid f_i(x)$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$.

证明 由带余除法定理得 $f_i(x)=(x-a)q_i(x)+r_i(r_i\in P)$,于是 $f_i(x^n)=(x^n-a)q_i(x^n)+r_i$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$.

$$\sum_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i=(x^n-a)\sum_{i=0}^{n-1}q_i(x^n)x^i+\sum_{i=0}^{n-1}r_ix^i,$$

由题设$(x^n-a)\Big|\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i$ 知$(x^n-a)\Big|\sum\limits_{i=0}^{n-1}r_ix^i$. 于是

$$r_i=0\quad(i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

即$(x-a)\mid f_i(x)$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$.

注：本题利用了多项式整除的性质及零多项式的定义. 由$(x^n-a)\Big|\sum\limits_{i=0}^{n-1}r_ix^i$知$\sum\limits_{i=0}^{n-1}r_ix^i=0\Rightarrow r_i=0$.

例 5　若$(x^4+x^3+x^2+x+1)\Big|\sum\limits_{i=0}^{3}f_i(x^5)x^i$，$f_i(x)\in P[x]$，则$x-1\mid f_i(x)$，$i=0,1,2,3$.

证明　设ε为 5 次本原单位根，则$x^4+x^3+x^2+x+1$的四个根应为$\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4$，$(\varepsilon^5=1)$，若记$\varepsilon_1=\varepsilon,\varepsilon_2=\varepsilon^2,\varepsilon_3=\varepsilon^3,\varepsilon_4=\varepsilon^4$，则

$$\begin{cases}f_0(1)+\varepsilon_1f_1(1)+\varepsilon_1^2f_2(1)+\varepsilon_1^3f_3(1)=0\\ f_0(1)+\varepsilon_2f_1(1)+\varepsilon_2^2f_2(1)+\varepsilon_2^3f_3(1)=0\\ f_0(1)+\varepsilon_3f_1(1)+\varepsilon_3^2f_2(1)+\varepsilon_3^3f_3(1)=0\\ f_0(1)+\varepsilon_4f_1(1)+\varepsilon_4^2f_2(1)+\varepsilon_4^3f_3(1)=0\end{cases}\qquad ①$$

由于①为关于$f_0(1),f_1(1),f_2(1),f_3(1)$为未知量的齐次线性方程组，系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&\varepsilon_1&\varepsilon_1^2&\varepsilon_1^3\\1&\varepsilon_2&\varepsilon_2^2&\varepsilon_2^3\\1&\varepsilon_3&\varepsilon_3^2&\varepsilon_3^3\\1&\varepsilon_4&\varepsilon_4^2&\varepsilon_4^3\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\neq 0$$

知①仅有零解，这表明$f_i(1)=0$，$i=0,1,2,3$，亦即$(x-1)\mid f_i(x)$. $i=0,1,2,3$.

注：本题利用了线性方程组方法证明，读者注意例 4、例 5 的区别与联系.

例 6　m,n为正整数，$a\in P,a\neq 0$，则

$$(x^m-a^m)\mid(x^n-a^n)\Leftrightarrow m\mid n.$$

证明　设$n=mq+r$，$0\leqslant r<m$，则

$$\begin{aligned}x^n-a^n&=x^{mq}\cdot x^r-x^ra^{mq}+x^ra^{mq}-a^ra^{mq}\\&=x^r(x^{mq}-a^{mq})+a^{mq}(x^r-a^r)\end{aligned}$$

由$(x^m-a^m)\mid(x^{mq}-a^{mq})$，故

$$(x^m-a^m)\mid(x^n-a^n)\Leftrightarrow(x^m-a^m)\mid(x^r-a^r)\overset{0\leqslant r<m}{\Leftrightarrow}r=0\Leftrightarrow m\mid n.$$

习题 1.1

1. 证明：当k,l,m,n为非负整数时，$(x^3+x^2+x+1)\mid(x^{4k}+x^{4l+1}+x^{4m+2}+x^{4n+3})$.
2. 设$f(x),g(x)\in P[x]$，且$(x^2+x+1)\mid f(x^3)+xg(x^3)$，证明：$(x-1)\mid f(x)$，

$(x-1)\mid g(x)$.

3. 若 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i \,\Big|\, \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x^n)x^{i-1}\right)$,证明每个 $f_i(x)$的所有系数之和都为零（$i=1,2,\cdots,n-1$）.（安徽大学）

4. 设 p 为素数,问 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1} x^k$ 能否整除 $f(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{p-1} x^{C_p^k+k}$,其中 C_p^k 表示从 p 个元素中取 k 个元素的组合数.（四川大学）

5. 设 d,n 为正整数,证明:$x^d-1\mid x^n-1 \Leftrightarrow d\mid n$.

6. 设 m 为大于 1 的正整数,$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m-1} x^i$ 且 $f(x)\mid f(x^m)+c$,其中 c 为常数,试求 c.（四川大学）

7. 若 $f(x)\mid f(x^n)$ $(n>1)$,则 $f(x)$的根为零或单位根.（安徽大学）

8. 设 n 为非负整数,则$(x^2+x+1)\mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$.

9. 设 $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i$,$f(x)=(g(x)+x^n)^2-x^n$,则 $g(x)\mid f(x)$.

10. 设 $f(x)\in Z[x]$,且 $f(1)=f(2)=f(3)=p$（p 为素数）.证明不存在整数 m 使 $f(m)=2p$.

11. 实数 a,b,c 满足什么条件时,有$(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$.（中国矿业大学 1998）

§1.2 最大公因式与互素的求法与证明

一、内容提要

1. 最大公因式的定义.

2. $d(x)=(f(x),g(x))$的意义表示不全为零的多项式 $f(x)$与 $g(x)$首一的最大公因式.

3. 有关性质

(1) 设 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$,$d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$且 $d(x)$首一,则 $d(x)=(f(x),g(x))$.

(2) 设 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,则$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$.

(3) 设 $d(x)=(f(x),g(x))$,则 $d(x)\mid(u(x)f(x)+v(x)g(x))$.

(4) $(f(x)+g(x),f(x)-g(x))=(f(x),g(x))$.一般地,设 $ad-bc\neq 0$,则$(af+bg,cf+dg)=(f,g)$.

(5) $(f^n(x),g^n(x))=(f(x),g(x))^n$.

4. 互素定义(略).

5. 互素性质

(1) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,则

$$(f,g)=1 \Leftrightarrow \exists\, u(x),v(x)\in P[x],\text{使 } u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$
$$\Leftrightarrow \text{任给 } h(x)\in P[x]\text{必存在 } \varphi(x),\psi(x)\in P[x],\text{使}$$
$$\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)=h(x).$$

(2) 若 $h(x)\mid f(x)g(x)$且$(h(x),g(x))=1$,则 $h(x)\mid f(x)$.

(3) 设 $h(x)\mid f(x),g(x)\mid f(x)$且$(g(x),h(x))=1$,则 $g(x)h(x)\mid f(x)$.

(4) $(g(x),f(x))=1,(h(x),f(x))=1$,则$(g(x)h(x),f(x))=1$.

二、典型例题

例 1　设 $g(x)\neq 0,h(x)$为任一多项式,证明:$(f(x)-g(x)h(x),g(x))=(f(x),g(x))$.

证明　设 $d(x)=(f(x),g(x))$,故有 $u(x),v(x)$使

$$\begin{aligned}d(x)&=u(x)f(x)+v(x)g(x)\\&=u(x)[f(x)-g(x)h(x)]+[v(x)+h(x)u(x)]g(x)\end{aligned}$$

又 $d(x)\mid g(x),d(x)\mid(f(x)-g(x)h(x))$,故由最大公因式性质(1)知

$$d(x)=(f(x)-g(x)h(x),g(x)).$$

例 2　设 $f(x),g(x)\in P[x]$且 $f(x)\neq g(x)$,记

$$M=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in P[x]\}$$

且 $d(x)$是 M 中次数最低的首一多项式,则

$$d(x)=(f(x),g(x)).$$

证明　$f(x)=1\cdot f(x)+0\cdot g(x)\in M$,所以 M 非空.又 $d(x)\in M$,故有 $u_0(x),v_0(x)\in P[x]$使

$$d(x)=u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x).$$

设$(f(x),g(x))=d_1(x)$,于是有 $u_1(x),v_1(x)\in P[x]$使

$$d_1(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)$$

设 $d_1(x)=q(x)d(x)+r(x),r(x)=0$ 或$\partial(r(x))<\partial(d(x))$,故有

$$\begin{aligned}r(x)&=d_1(x)-q(x)d(x)\\&=(u_1(x)-q(x)u_0(x))f(x)+(v_1(x)-q(x)u_0(x))g(x)\in M,\end{aligned}$$

由 $d(x)$的定义知 $r(x)=0$,即 $d(x)\mid d_1(x)$.显然 $d_1(x)\mid d(x)$,且 $d(x)$,$d_1(x)$均首一,故 $d(x)=d_1(x)$.

求两个多项式的最大公因式通常用辗转相除法,也可以用因式分解法.

例 3　设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式是二次多项式,求 u 与 t 的值并求出它们的最大公因式.

解 由辗转相除法得 $f(x)=g(x)+x^2+2x+u$，故

$$(f(x),g(x))=(g(x),x^2+2x+u)$$

又 $g(x)=(x^2+2x+u)(x+t-2)+(4-2t-u)x+3u-tu$．要使$(f(x),g(x))$为二次多项式当且仅当

$$\begin{cases}4-2t-u=0\\3u-tu=0\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}u=0\\t=2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}u=-2\\t=3\end{cases}$$

所以$(f(x),g(x))=x^2+2x$ 或$(f(x),g(x))=x^2+2x-2$．

例4 设 $f(x),g(x)$不全为零，n 为正整数，证明：$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$．

证明 法一．① 若 $f(x),g(x)$中有一个为零或零次多项式，则结论显然成立．

② 设 $f(x),g(x)$次数均大于零，典型分解式为

$$f(x)=p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x),$$

$$g(x)=p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_m^{t_m}(x)$$

t_i,s_i 均为自然数．记 $k_i=\min\{s_i,t_i\}$，则

$$f^n(x)=p_1^{ns_1}(x)p_2^{ns_2}(x)\cdots p_m^{ns_m}(x),$$

$$g^n(x)=p_1^{nt_1}(x)p_2^{nt_2}(x)\cdots p_m^{nt_m}(x)$$

且 $nk_i=\min\{ns_i,nt_i\}$，于是

$$(f(x),g(x))=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x)$$

故

$$(f^n(x),g^n(x))=p_1^{nk_1}(x)p_2^{nk_2}(x)\cdots p_m^{nk_m}(x)=(f(x),g(x))^n.$$

法二．设$(f(x),g(x))=d(x)$，$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则$(f_1(x),g_1(x))=1$，从而$(f_1^n(x),g_1^n(x))=1$．所以

$$\begin{aligned}(f^n(x),g^n(x))&=(d^n(x)f_1^n(x),d^n(x)g_1^n(x))\\&=d^n(x)(f_1^n(x),g_1^n(x))=d^n(x).\end{aligned}$$ （参见习题 1.2 第 3 题）

方法一利用多项式分解．方法二利用最大公因式及互素的性质．

例5 求 $f(x)=x^5+2x^4+4x^3+x^2+3x-1$，$g(x)=x^4+3x^2+2$ 的最大公因式．

解 $f(x)=g(x)(x+2)+(x-5)(x^2+1)$．故

$$(f(x),g(x))=(g(x),(x-5)(x^2+1)),$$

于是 $d(x)=(f(x),g(x))$必为$(x-5)(x^2+1)$的一个因式，又显然 $f(5)\neq 0$，

$g(5)\neq 0$,而 $f(\pm i)=g(\pm i)=0$.所以

$$(f(x),g(x))=x^2+1.$$

例6 设对任一多项式 $h(x)$,若 $f(x)\mid h(x)$,$g(x)\mid h(x)$都可得到 $f(x)g(x)\mid h(x)$,证明$(f(x),g(x))=1$.

证明 反证法.设$(f(x),g(x))=d(x)$且$\partial(d(x))>0$,则

$$f(x)=d(x)f_1(x),\quad g(x)=d(x)g_1(x),\quad (f_1(x),g_1(x))=1$$

其中$\partial(f_1(x))<\partial(f(x))$,于是 $f(x)\mid g(x)f_1(x)$,又 $g(x)\mid g(x)f_1(x)$,由题设知 $f(x)g(x)\mid g(x)f_1(x)$,这显然不可能.

注:证明两个多项式互素往往可采用反证法.

例7 设 $g(x)=p^k(x)g_1(x)$ $(k\geqslant 1,k\in \mathbf{Z})$,$(p(x),g_1(x))=1$.证明:对任意多项式 $f(x)$有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中 $r(x)=0$ 或$\partial(r(x))<\partial(p(x))$,而 $f_1(x)$为某个多项式.(浙江大学)

证明 分两种情况

(1) $p(x)\mid f(x)$,记 $f(x)=p(x)f_1(x)$,则

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g(x)}$$

等式成立.

(2) $p(x)\nmid f(x)$,设 $f(x)=p(x)q_1(x)+r_1(x)$,$\partial(r_1(x))<\partial(p(x))$,由$(p(x),g_1(x))=1$,则有 $u(x)$,$v(x)$使 $u(x)p(x)+v(x)g_1(x)=1$,从而

$$r_1(x)=r_1(x)u(x)p(x)+r_1(x)v(x)g_1(x),$$

又 $p(x)\nmid r_1(x)v(x)$,再令 $r_1(x)v(x)=q(x)p(x)+r(x)$,$\partial(r(x))<\partial(p(x))$,则

$$\begin{aligned}f(x)&=p(x)q_1(x)+r_1(x)u(x)p(x)+q(x)g_1(x)p(x)+r(x)g_1(x)\\&=p(x)[q_1(x)+r_1(x)u(x)+q(x)g_1(x)]+r(x)g_1(x)\end{aligned}$$

从而

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

这里 $f_1(x)=q_1(x)+r_1(x)u(x)+q(x)g_1(x)$.

习题 1.2

1. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,k 为正整数,证明:$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g^k(x)\mid f^k(x)$.

特别地：$g^2(x)\mid f^2(x) \Leftrightarrow g(x)\mid f(x)$ （安徽大学 2001 年）.

2. k 为何值时，$f(x)=x^2+(k+6)x+4k+2$ 和 $g(x)=x^2+(k+2)x+2k$ 的最大公因式是一次的，并求出这时的最大公因式.（厦门大学）

3. 设 $h(x)$ 为首一多项式，则 $(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$.

4. 设 $f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$，且 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零. 证明：$d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式 $\Leftrightarrow (f_1(x),g_1(x))=1$.

5. 设 $f(x)\neq 0$，$h(x)$ 是任意多项式. 证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，则 $(f(x),g(x)h(x))=(f(x),h(x))$. 问反之如何？

6. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是两个非零多项式，若对任一多项式 $h(x)$，由 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 都可得 $f(x)\mid h(x)$. 证明：$(f(x),g(x))=1$.

7. 设 $h(x)$ 首一，且 $h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$. 则

$$\frac{(f(x),g(x))}{h(x)}=\left(\frac{f(x)}{h(x)},\frac{g(x)}{h(x)}\right).$$

8. 设 $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n-1$，$g(x)=x^m-x^{m-n}-2\ (m>n)$. 证明 $(f(x),g(x))=1$.

9. 证明：只要 $\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$，$\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零，就可选择适合等式 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$ 的 $u(x)$，$v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\quad \partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

10. 设多项式 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，$k(x)$ 之间有关系式

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0$$
$$(x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0$$

证明：$(x^2+1)\mid(f(x),g(x))$.

11. 设 $f_1(x),f_2(x)\in P[x]$，$(f_1(x),f_2(x))=1$. 证明：对任意的 $g_1(x),g_2(x)\in P[x]$ 必存在 $g(x)\in P[x]$，使

$$f_i(x)\mid(g(x)-g_i(x))\quad i=1,2.$$ （大连理工大学 2002 年）

12. 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)\in P[x]$，$a\in P$ 使得 $f_1(a)=0$，$g_2(a)\neq 0$ 且 $f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)=x-a$. 证明

$$(f_1(x),f_2(x))=x-a.$$ （安徽师范大学 2002 年）

13. 求 x^m+a^m 与 x^n+a^n 的最大公因式.

14. 设 $(f_1(x),f_2(x))=1$，$r_1(x)$，$r_2(x)$ 为两个任意多项式，其次数分别小于 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 的次数. 证明：存在一个多项式 $g(x)$，它被 $f_1(x)$ 除得余式为 $r_1(x)$，被 $f_2(x)$ 除得余式为 $r_2(x)$.（内蒙古大学）

15. $f(x),g(x)\in P[x]$，证明：$(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow (f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

16. 设 $m,n\in \mathbf{Z}^+$，求 (x^m-1,x^n-1).

17. 设 $m,n\in \mathbf{Z}^+$，$a\in P$，$a\neq 0$，则 $(x^m-a^m)\mid(x^n-a^n) \Leftrightarrow m\mid n$.

18. 设 $d(x)$，$f(x)$，$g(x)$，$u(x)$，$v(x)$ 均是多项式，$d(x)$ 首一，同时 $d(x)\mid f(x)$，

$d(x)|g(x)$且 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$. 证明

(1) $d(x)=(f(x),g(x))$; (2) $(u(x),v(x))=1$.（安徽师范大学 2003 年）

19. 设 k 是正整数,P 是数域,$f(x),g(x)\in P[x]$且 $f(0)\neq 0$,证明

$$(f(x),g(x))=(f(x),x^k g(x)).$$（云南大学 2002 年）

(注:原题没有 $f(0)\neq 0$,题目有误).

20. 设多项式 $f(x),g(x),h(x)$有

$$f(x^5)+xg(x^5)+x^2h(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)k(x)$$

$k(x)$为一多项式,证明$(x-1)$是 $f(x),g(x),h(x)$的一个公因式.(北京理工大学 2003 年)

21. 用$(f(x),g(x))$表示数域 P 上多项式 $f(x)$和 $g(x)$的首项系数为 1 的最大公因式. 证明

$$(f(x),g(x))=(f(x)+2g(x),f(x)-g(x)).$$（首都师范大学 2003 年）

§1.3　多项式的分解与根问题

一、内容提要

1. 不可约多项式:设 $p(x)\in P[x],\partial(p(x))>0$,若 $p(x)$在 P 中的因式仅为c 或$cp(x)$ $(c\in P,c\neq 0)$,则称 $p(x)$为数域 P 上的不可约多项式.

注:多项式的不可约与给定数域有关.

2. 若 $p(x)$在 P 上不可约,$p^k(x)|f(x)$,而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称 $p(x)$为 $f(x)$的 k 重因式.

3. 设 $f(\alpha)=0$,则称 α 为$f(x)$的根,易得 α 为$f(x)$的根 $\Leftrightarrow$ $(x-\alpha)|f(x)$.

4. 不可约多项式性质

(1) $p(x)$不可约,$c\in P,c\neq 0$,则 $cp(x)$也不可约.

(2) $p(x)$不可约,则对任一多项式 $f(x)$,必有 $p(x)|f(x)$或$(p(x),f(x))=1$.

(3) 若 $p(x)$不可约且 $p(x)|f(x)g(x)$,则 $p(x)|f(x)$或 $p(x)|g(x)$.

5. 惟一分解定理　数域 P 上任一次数大于零的多项式均可惟一分解为P 上不可约多项式之积.

6. 重因式性质

(1) 设 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式,则 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式,反之不真.

(2) α 是$f(x)$的 k 重根,则 α 是$f'(x)$的 $k-1$ 重根,当 $k=1$ 时,α 不是$f'(x)$的根.

(3) $f(x)$有重因式 $\Leftrightarrow (f(x),f'(x))\neq 1$.

(4) $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$是一个与 $f(x)$有相同因式而无重因式的多项式.

7. 若 $f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x)$ $(a\neq 0)$为 $f(x)$的典型分解式,则

$$(f(x),f'(x))=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)p_m^{k_m-1}(x).$$

二、例题选讲

例 1 多项式 x^3+px+q 有重因式 $\Leftrightarrow 4p^3+27q^2=0$.

证明 法一.用辗转相除法求$(f(x),f'(x))$.

由 $f'(x)=3x^2+p=3\left(x^2+\dfrac{p}{3}\right)$

$$\begin{array}{|c|lll|c}
x^2+\dfrac{p}{3} & x^3 & +px & +q & x \\
 & x^3 & +\dfrac{p}{3}x & & \\
\hline
 & & \dfrac{2p}{3}x & +q &
\end{array}$$

若 $\dfrac{2p}{3}x+q=0$ 即 $p=q=0$,则 $f(x)=x^3$ 有三重因式.

若 $\dfrac{p}{3}x+q\neq 0$,当 $p=0$ 而 $q\neq 0$,则$(f(x),f'(x))=1$,无重因式,从而当 $\dfrac{2p}{3}\neq 0$ 即 $p\neq 0$ 时,$f(x)$才能有重因式,这时

$$(f(x),f'(x))=\left(x^2+\frac{p}{3},\frac{2p}{3}x+q\right)=\left(x^2+\frac{p}{3},\frac{3q}{2p}\right)$$

又

$$x^2+\frac{p}{3}=\left(x+\frac{3q}{2p}\right)\left(x+\frac{3q}{p}\right)+\frac{4p^3+27q^2}{4p^2}$$

要使$(f(x),f'(x))\neq 1$,则必有 $4p^3+27q^2=0$.

反之,若 $4p^3+27q^2=0$,则当 $p=q=0$ 时,$f(x)$有三重因式,若 p,q 不为零时,$f(x)$有二重因式 $x+\dfrac{3q}{2p}$.

法二.若 $f(x)$有重因式,则重因式必为一次的,设为 $x-\alpha$,这表明 $f(x)$有重因式 $x-\alpha \Leftrightarrow \alpha$ 为$f(x)$的重根 $\Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3+p\alpha+q=0$ ① $3\alpha^2+p=0$ ②,而 $\alpha^3+p\alpha+q=\alpha(\alpha^2+p)+q=\alpha\left(-\dfrac{p}{3}+p\right)+q=\dfrac{2p}{3}\alpha+q=0$.

若 $p=q=0$,则 $4p^3+27q^2=0$.

若 $p\neq 0$,则 $\alpha=-\dfrac{3q}{2p}$代入②得 $3\left(\dfrac{3q}{2p}\right)^2+p=0$,即 $4p^3+27q^2=0$.

注:三次多项式若有重因式,则重因式必为一次的,从而有重根.

例 2　设 $f(x)\in P[x]$,$\partial(f(x))=n>1$.则 $f'(x)\mid f(x)\Leftrightarrow f(x)=a(x-b)^n$($a$ 为 $f(x)$的首项系数,$b\in P$).

证明　($\Leftarrow$) 显然.下证必要性.

方法一.由 $f'(x)\mid f(x)$,则 $(f(x),f'(x))=a_1f'(x)$,故 $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=a(x-b)$是一个与 $f(x)$有相同不可约因式而无重因式的多项式.故 $f(x)$的不可约因式仅为 $x-b$,从而 $f(x)=a(x-b)^n(b\in P)$.

方法二.设 $f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x)$,则

$$(f(x),f'(x))=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_m^{k_m-1}(x),$$

且$\partial(p_i(x))=n_i$, $i=1,2,\cdots,m$, $\displaystyle\sum_{i=1}^m n_ik_i=n$.

由 $f'(x)\mid f(x)$及$\partial(f'(x))=n-1$.知

$$\sum_{i=1}^m(n_ik_i-1)=\sum_{i=1}^m n_ik_i-\sum_{i=1}^m n_i=n-1$$

知 $m=1$ 且 $n_1=1$,即 $f(x)=ap_1^{k_1}(x)$,设 $p_1(x)=x-b$,则 $k_1=n$ 故 $f(x)=a(x-b)^n$.

方法三.由 $f'(x)\mid f(x)$.故可设

$$nf(x)=f'(x)(x-b) \qquad ①$$

两边求导得

$$(n-1)f'(x)=f''(x)(x-b) \qquad ②$$

$$(n-2)f''(x)=f^{(3)}(x)(x-b) \qquad ③$$

………………

$$f^{n-1}(x)=f^{(n)}(x)(x-b) \qquad ⓝ$$

($f^n(x)=n!a$, a 为$f(x)$的首项系数)

这 n 个式子两边分别相乘得

$$n!f(x)=an!(x-b)^n \quad 即 \quad f(x)=a(x-b)^n.$$

例 3　设 $f(x)$,$p(x)\in P[x]$且 $p(x)$在数域 P 上不可约,又 $f(x)$与 $p(x)$有公根,则 $p(x)\mid f(x)$.

证明　由于$(f(x),p(x))\neq 1$.事实上,若$(f(x),p(x))=1$,则有 $u(x)$,