典型图形固定系数法平差

张 作 容 编

人 民 铁 道 出 版 社

典型图形固定系数法平差

张 作 容 编

人 民 铁 道 出 版 社

1 9 7 8 年 · 北京

内 容 简 介

本书介绍按最小二乘法原理编算固定系数表的方法，并对桥隧施工控制测量中常用图形，如四边形族、双基线三角锁、固定边和角内插点、中点多边形等作了分析，并有实例计算。在精度计算方面结合我国桥隧施工控制网的需要，叙述用固定系数法时求指定边的相对精度的方法。

本书可供从事测量工作的技术人员参考用。

典型图形固定系数法平差
张 作 容 编
人民铁道出版社出版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：3 字数：83千
1978年2月第1版 1978年2月第1次印刷
统一书号：15043·6102 定价：0.27 元

目　录

概　述

在施工控制测量中，现在使用着两类平差方法，一类是使观测值改正数平方和为最小的方法，通称最小二乘法，用这种方法进行平差计算称为严密平差；一类是采取比较简易的各种方法，称为简易平差或简化平差。前者具有较高的精度，但工作量比较大，比较麻烦，一般工程技术人员不易掌握。后者比较简单而易掌握，但所得结果精度较差且尚未有比较可靠的评定精度的方法。

对于比较小型的工程采用简化平差可以满足精度要求；对于较大、较复杂或者要求较高的大型建筑物，如大桥、特大桥、长隧道等，采用简化平差便难以满足要求了，必须采用严密平差。

工程施工控制网的严密平差中，用得最多的是条件观测平差，其具体工作步聚如下：

1）按照几何条件或物理条件列出用改正数表达的条件方程式，条件方程式的数目与多余观测值的数目相同。

2）由条件方程式组成法方程式，法方程式的数目也与多余观测的数目相同，解法方程组可求出联系数 k。

3）求出改正数 v。

比较费时费力的是第二步，解多元一次联立方程组，如果一次解算的叫做整体平差。为了减少这一步的工作量，可用分组平差方法，对条件方程式进行数学处理，由一组数目较多的联立方程组变成两组或多组每组数目较少的方程组，这样解联立方程组的工作量较少，而所得的结果与整体平差所得结果完全相同。

这里提出的固定系数法平差，属严密平差方法，在分组平差的基础上，进一步简化，可以不用解联立方程组，而根据不同的图形事先编好固定系数表，用简单的四则运算，即可求出改正数和评定精度，而且可以不用计算机，用计算尺或手算即可。一般没有学过测量平差的人也能很快掌握。这种方法的优点是省时、简单、易懂，缺点是图形要相对的固定。

下面通过一个双基线单四边形的实例，阐述固定系数表编制的方法，及使用方法，其后则列出常用图形的固定系数表及算例。

一、分组平差的概念

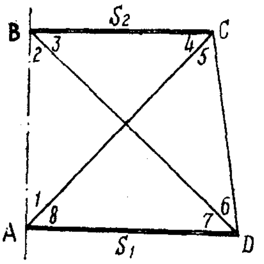
如图一，AB 为桥轴线，布置了控制网 $ABCD$ 四边形，观测 1 ～ 8 号角及丈量了两条基线边 S_1 及 S_2。

这样可以列出如下五个条件方程式：

$$\left.\begin{array}{ll}
(a) & v_1+v_2+v_3+v_4+w_1=0\\
(b) & v_3+v_4+v_5+v_6+w_2=0\\
(c) & v_5+v_6+v_7+v_8+w_3=0\\
(d) & \delta_1v_1-\delta_2v_2+\delta_3v_3-\delta_4v_4+\delta_5v_5-\delta_6v_6+\delta_7v_7-\delta_8v_8+w_d=0\\
(s) & \delta_1v_1-\delta_2v_2-\delta_4v_4+\delta_7v_7+w_s=0
\end{array}\right\}\quad(1)$$

（1）式中，$v_1 \sim v_8$为1号角至8号角的改正数；$\delta_1 \sim \delta_8$为各角的正弦对数秒差（以对数小数点后第六位为单位）；

w称为闭合差，其中



图一

$$w_1 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 - 180°$$
$$w_2 = \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 - 180°$$
$$w_3 = \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 - 180°$$
$$w_d = \Sigma \lg\sin\angle 单 - \Sigma \lg\sin\angle 双$$
$$w_s = \lg S_1 + \lg\sin\angle 1 - \lg\sin\angle 2 - \lg\sin\angle 4 + \lg\sin\angle 7 - \lg S_2$$

w_1、w_2、w_3是角度条件闭合差；w_d称为极条件闭合差；w_s称为基线条件闭合差。$\angle 1 \sim \angle 8$为1号角至8号角的观测值。

各改正数前面的系数表列如下：

表 1

角 号	a	b	c	d	s	角 号	a	b	c	d	s
1	+1	0	0	$+\delta_1$	$+\delta_1$	5	0	+1	+1	$+\delta_5$	0
2	+1	0	0	$-\delta_2$	$-\delta_2$	6	0	+1	+1	$-\delta_6$	0
3	+1	+1	0	$+\delta_3$	0	7	0	0	+1	$+\delta_7$	$+\delta_7$
4	+1	+1	0	$-\delta_4$	$-\delta_4$	8	0	0	+1	$-\delta_8$	0

组成法方程式的标准形式是①：

$$\left.\begin{aligned}
[aa]k_a+[ab]k_b+[ac]k_c+[ad]k_d+[as]k_s+w_1=0\\
[ab]k_a+[bb]k_b+[bc]k_c+[bd]k_d+[bs]k_s+w_2=0\\
[ac]k_a+[bc]k_b+[cc]k_c+[cd]k_d+[cs]k_s+w_3=0\\
[ad]k_a+[bd]k_b+[cd]k_c+[dd]k_d+[ds]k_s+w_d=0\\
[as]k_a+[bs]k_b+[cs]k_c+[ds]k_d+[ss]k_s+w_s=0
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

按表1的系数可得出：

$[aa]=+4$；$[ab]=+2$；$[ac]=0$；$[ad]=\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4$；$[as]=\delta_1-\delta_2-\delta_4$

$[bb]=+4$；$[bc]=+2$；$[bd]=\delta_3-\delta_4+\delta_5-\delta_6$；$[bs]=-\delta_4$

$[cc]=+4$；$[cd]=\delta_5-\delta_6+\delta_7-\delta_8$；$[cs]=+\delta_7$

$[dd]=[\delta^2]$；$[ds]=\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+\delta_4{}^2+\delta_7{}^2$

$[ss]=\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+\delta_4{}^2+\delta_7{}^2$

进行整体平差时将上面数值代入（2）式得五元一次联立方程组，解这个方程组可求得联系数k_a、k_b、k_c、k_d、k_s。

将k值代入下式求改正数v。

① 参见铁道部第四工程局编《隧道及桥涵测量》，人民铁道出版社，1977年版，第154～155页。

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1k_a+b_1k_b+c_1k_c+d_1k_d+s_1k_s\\v_2&=a_2k_a+b_2k_b+c_2k_c+d_2k_d+s_2k_s\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\v_8&=a_8k_a+b_8k_b+c_8k_c+d_8k_d+s_8k_s\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

这种解法常常是繁而难的，尤其是方程式的数目较多的情况下，工作量更大。

分组平差方法① 一般是将角度条件作为第Ⅰ组，列法方程式求出联系数 k，并求出第一次改正数v_i'，然后改化第Ⅱ组改正数方程式，列出改化后的法方程式，求第Ⅱ组联系数 k，并计算第二次改正数v_i''，此时总改正数

$$v_i=v_i'+v_i''$$

如本例，第Ⅰ组改正数方程式为：

$$\begin{array}{ll}(a) & v_1+v_2+v_3+v_4+w_1=0\\(b) & v_3+v_4+v_5+v_6+w_2=0\\(c) & v_5+v_6+v_7+v_8+w_3=0\end{array}\qquad(4)$$

并用

$$(A)\quad A_1v_1+A_2v_2+A_3v_3+A_4v_4+A_5v_5+A_6v_6+A_7v_7+A_8v_8+w_A=0$$

代替

$$(d)\quad \delta_1v_1-\delta_2v_2+\delta_3v_3-\delta_4v_4+\delta_5v_5-\delta_6v_6+\delta_7v_7-\delta_8v_8+w_d=0$$

用

$$(B)\quad B_1v_1+B_2v_2+B_3v_3+B_4v_4+B_5v_5+B_6v_6+B_7v_7+B_8v_8+w_B=0$$

代替

$$(s)\quad \delta_1v_1-\delta_2v_2-\delta_4v_4+\delta_7v_7+w_s=0$$

即用（A）式代替（d）式，用（B）式代替（s）式，重新组成法方程式：

$$\left.\begin{array}{l}[aa]k_a+[ab]k_b+[ac]k_c+\boxed{[aA]k_A+[aB]k_B}+w_1=0\\ [ab]k_a+[bb]k_b+[bc]k_c+\boxed{[bA]k_A+[bB]k_B}+w_2=0\\ [ac]k_a+[bc]k_b+[cc]k_c+\boxed{[cA]k_A+[cB]k_B}+w_3=0\\ \boxed{[aA]k_a+[bA]k_b+[cA]k_c}+[AA]k_A+[AB]k_B+w_A=0\\ \boxed{[aB]k_a+[bB]k_b+[cB]k_c}+[AB]k_A+[BB]k_B+w_B=0\end{array}\right\}\qquad(5)$$

这组法方程式必须满足两个条件：

1）能够分成两组

使方框中的数值为零，即

$$[aA]=[bA]=[cA]=0；\quad [aB]=[bB]=[cB]=0$$

此时（5）式便自然分开为两组独立的联立方程组，第Ⅰ组为：

$$\left.\begin{array}{l}[aa]k_a+[ab]k_b+[ac]k_c+w_1=0\\ [ab]k_a+[bb]k_b+[bc]k_c+w_2=0\\ [ac]k_a+[bc]k_b+[cc]k_c+w_3=0\end{array}\right\}\qquad(6)$$

解（6）式可得k_a、k_b、k_c。

$$v_i'=a_ik_a+b_ik_b+c_ik_c\qquad(6')$$

① 参见铁道部第四工程局编《隧道及桥涵测量》第十四章。人民铁道出版社，1977年版。

第Ⅱ组为：

$$\left.\begin{aligned}[AA]k_A+[AB]k_B+w_A=0\\ [AB]k_A+[BB]k_B+w_B=0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

解（7）式可得k_A和k_B。

$$v_i^{*}=A_i k_A+B_i k_B。\quad (7')$$

A_i与B_i称为改化系数。

2）整体平差与分组平差所得的结果应该完全一致，即（A）、(B)式与(d)、（s）式等值。

$$v_i=v_i'+v_i^{*}$$

经数学上证明，要达到这两个目的，A_i及B_i值用下式计算：

$$\left.\begin{aligned}A_1&=a_1\rho_{ad}+b_1\rho_{bd}+c_1\rho_{cd}+d_1\\ &\cdots\cdots\\ A_8&=a_8\rho_{ad}+b_8\rho_{bd}+c_8\rho_{cd}+d_8\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}B_1&=a_1\rho_{as}+b_1\rho_{bs}+c_1\rho_{cs}+s_1\\ &\cdots\cdots\\ B_8&=a_8\rho_{as}+b_8\rho_{bs}+c_8\rho_{cs}+s_8\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

（8）式中的d_1、d_2、……、d_8及(9)式中的s_1、s_2、……、s_8是(1)式中(d)式和（s）式各改正数前的系数；$d_1=+\delta_1$；$d_2=-\delta_2$；$d_3=+\delta_3$；……，$s_1=+\delta_1$；$s_2=-\delta_2$；$s_3=0$；$s_4=-\delta_4$；……ρ_{ad}、ρ_{bd}、ρ_{cd}；ρ_{as}、ρ_{bs}、ρ_{cs}称为介数。

（8）式中的ρ_{ad}、ρ_{bd}、ρ_{cd}由下列方程组解得：

$$\left.\begin{aligned}[aa]\rho_{ad}+[ab]\rho_{bd}+[ac]\rho_{cd}+[ad]=0\\ [ab]\rho_{ad}+[bb]\rho_{bd}+[bc]\rho_{cd}+[bd]=0\\ [ac]\rho_{ad}+[bc]\rho_{bd}+[cc]\rho_{cd}+[cd]=0\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

（9）式中的ρ_{as}、ρ_{bs}、ρ_{cs}由下列方程组解算

$$\left.\begin{aligned}[aa]\rho_{as}+[ab]\rho_{bs}+[ac]\rho_{cs}+[as]=0\\ [ab]\rho_{as}+[bb]\rho_{bs}+[bc]\rho_{cs}+[bs]=0\\ [ac]\rho_{as}+[bc]\rho_{bs}+[cc]\rho_{cs}+[cs]=0\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

比较(6)、(10)、(11)式可以看出：这三组方程式的未知数前的系数完全相同，只是常数项和未知数不同，即解出一组以后其余各组可用类比方法得出答案，如下表：

表 2

未	知	数	常	数	项
(6)式	(10)式	(11)式	(6)式	(10)式	(11)式
k_a	ρ_{ad}	ρ_{as}	w_1	$[ad]$	$[as]$
k_b	ρ_{bd}	ρ_{bs}	w_2	$[bd]$	$[bs]$
k_c	ρ_{cd}	ρ_{cs}	w_3	$[cd]$	$[cs]$

经数学上证明，w_A和w_B就是经过第一次改正后的角值计算所得的极条件闭合差和基线条件闭合差，用w_d'及w_s'表示，即

$$w_A=w_d'；\qquad w_B=w_s'。$$

二、用固定系数法进行分组平差计算的原理

从（6）式可以看出，第Ⅰ组法方程式的常数项为角度条件闭合差w_1、w_2、w_3，所解得的联系数k_a、k_b、k_c必为w_1、w_2、w_3的函数，由（6′）式可以看出v_i'是k_a、k_b、k_c的函数，也就是说第一次改正数必为闭合差w_1、w_2、w_3的函数，这样只要图形一定就可以简化计算。

本例（大地四边形）由第Ⅰ组条件方程式（6）式所组成的法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}4k_a+2k_b+0\,k_c+w_1&=0\\2k_a+4k_b+2\,k_c+w_2&=0\\0.k_a+2k_b+4\,k_c+w_3&=0\end{aligned}\right\}$$

解得：

$$k_a=\frac{1}{8}\left(-3w_1+2w_2-w_3\right)$$

$$k_b=\frac{1}{8}\left(+2w_1-4w_2+2w_3\right)$$

$$k_c=\frac{1}{8}\left(-w_1+2w_2-3w_3\right)$$

列成固定系数表如表3。

表3

	$\frac{1}{8}w_1$	$\frac{1}{8}w_2$	$\frac{1}{8}w_3$	k
k_a	(−3)	(+2)	(−1)	
k_b	(+2)	(−4)	(+2)	
k_c	(−1)	(+2)	(−3)	

根据 $v_i'=a_ik_a+b_ik_b+c_ik_c$

可解得各角的第一次改正数

$$v_1'=v_2'=k_a=\frac{1}{8}\left(-3w_1+2w_2-w_3\right)$$

$$v_3'=v_4'=k_a+k_b=\frac{1}{8}\left(-w_1-2w_2+w_3\right)$$

$$v_5'=v_6'=k_b+k_c=\frac{1}{8}\left(w_1-2w_2-w_3\right)$$

$$v_7'=v_8'=k_c=\frac{1}{8}\left(-w_1+2w_2-3w_3\right)$$

汇总成下面的固定系数表如表4，进行第一次改正数的计算是很方便的。

使用时先算出$\frac{1}{8}w_1$、$\frac{1}{8}w_2$、$\frac{1}{8}w_3$填入第一横列，然后将第一横列的数字乘以表内括弧内的固定系数，取横向总和，即为第一次改正数v_i'，这种方法称为固定系数法。

用固定系数法求改化系数A_i和B_i时，方法相同。

由表2可知，需要解ρ_{ad}、ρ_{bd}及ρ_{cd}这一

第一次改正数计算表　　表4

	$\frac{1}{8}w_1=$	$\frac{1}{8}w_2=$	$\frac{1}{8}w_3=$	v_i'
$v_1'=v_2'$	(−3)	(+2)	(−1)	
$v_3'=v_4'$	(−1)	(−2)	(+1)	
$v_5'=v_6'$	(+1)	(−2)	(−1)	
$v_7'=v_8'$	(−1)	(+2)	(−3)	

组数值时，将〔ad〕换w_1、〔bd〕换w_2、〔cd〕换w_3代入表3的固定系数表中即可得

$$
\begin{cases}
\rho_{ad}=\frac{1}{8}\left\{-3(\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4)+2(\delta_3-\delta_4+\delta_5-\delta_6)-(\delta_5-\delta_6+\delta_7-\delta_8)\right\} \\
\rho_{bd}=\frac{1}{8}\left\{+2(\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4)-4(\delta_3-\delta_4+\delta_5-\delta_6)+2(\delta_5-\delta_6+\delta_7-\delta_8)\right\} \\
\rho_{cd}=\frac{1}{8}\left\{-(\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4)+2(\delta_3-\delta_4+\delta_5-\delta_6)-3(\delta_5-\delta_6+\delta_7-\delta_8)\right\}
\end{cases}
$$

同理可解得ρ_{as}、ρ_{bs}、ρ_{cs}这一组值如下：

$$\rho_{as}=\frac{1}{8}\left\{-3(\delta_1-\delta_2-\delta_4)+2(-\delta_4)-(+\delta_7)\right\}$$

$$\rho_{bs}=\frac{1}{8}\left\{+2(\delta_1-\delta_2-\delta_4)-4(-\delta_4)+2(+\delta_7)\right\}$$

$$\rho_{cs}=\frac{1}{8}\left\{-(\delta_1-\delta_2-\delta_4)+2(-\delta_4)-3(+\delta_7)\right\}$$

根据（8）式　　　　　$A_i=a_i\rho_{ad}+b_i\rho_{bd}+c_i\rho_{cd}+d_i$

根据（9）式　　　　　$B_i=a_i\rho_{as}+b_i\rho_{bs}+c_i\rho_{cs}+s_i$

经整理后可得下面求A和B的固定系数表。

A 值　计　算　表　　　　表5

角　号	$\frac{1}{8}\delta_1=$	$\frac{1}{8}\delta_2=$	$\frac{1}{8}\delta_3=$	$\frac{1}{8}\delta_4=$	$\frac{1}{8}\delta_5=$	$\frac{1}{8}\delta_6=$	$\frac{1}{8}\delta_7=$	$\frac{1}{8}\delta_8=$	A_i（横和）
1	(+5)	(+3)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(+1)	
2	(−3)	(−5)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(+1)	
3	(−1)	(+1)	(+5)	(+3)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	
4	(−1)	(+1)	(−3)	(−5)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	
5	(+1)	(−1)	(−1)	(+1)	(+5)	(+3)	(−1)	(+1)	
6	(+1)	(−1)	(−1)	(+1)	(−3)	(−5)	(−1)	(+1)	
7	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(+1)	(+5)	(+3)	
8	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(+1)	(−3)	(−5)	

B 值　计　算　表　　　　表6

角　号	$\frac{1}{8}\delta_1=$	$\frac{1}{8}\delta_2=$		$\frac{1}{8}\delta_4=$			$\frac{1}{8}\delta_7=$		B_i（横和）
1	(+5)	(+3)	(0)	(+1)	(0)	(0)	(−1)	(0)	
2	(−3)	(−5)	(0)	(+1)	(0)	(0)	(−1)	(0)	
3	(−1)	(+1)	(0)	(+3)	(0)	(0)	(+1)	(0)	
4	(−1)	(+1)	(0)	(−5)	(0)	(0)	(+1)	(0)	
5	(+1)	(−1)	(0)	(+1)	(0)	(0)	(−1)	(0)	
6	(+1)	(−1)	(0)	(+1)	(0)	(0)	(−1)	(0)	
7	(−1)	(+1)	(0)	(−1)	(0)	(0)	(+5)	(0)	
8	(−1)	(+1)	(0)	(−1)	(0)	(0)	(−3)	(0)	

比较表5和表6可以看出：δ_1、δ_2、δ_4、δ_7下面的系数都相同，而表6中δ_3、δ_5、δ_6、δ_8下面的系数均为0，这是因为条件式（1）式中的（d）式和（s）式δ_1、δ_2、δ_4、δ_7有相同的符号，而δ_3、δ_5、δ_6、δ_8在（s）式中未出现，由于这个特性，在求B值时不必再列系数表，只要在A值计算表中有共同项者在表头上打"✓"号，将有"✓"符号的各项取横和便是B值。

将A、B值求出后成立第Ⅱ组法方程式：

$$\left.\begin{aligned}[AA]k_A+[AB]k_B+w_d'=0\\ [AB]k_A+[BB]k_B+w_s'=0\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

解（12）式得：

$$\left.\begin{aligned}k_A=\frac{[AB]w_s'-[BB]w_d'}{[AA][BB]-[AB]^2}\\ k_B=\frac{[AB]w_d'-[AA]w_s'}{[AA][BB]-[AB]^2}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$v_i''=A_ik_A+B_ik_B$$

用固定系数法解决分组平差问题时，角的编号必须与所绘出的标准图形一致。

三、精 度 计 算

在桥隧施工控制测量中，常常要求计算某指定边的边长相对精度。桥梁控制网中计算桥轴线的相对精度，隧道三角网中计算隧道轴线上诸边中的最弱边的相对精度①。

计算边长相对精度的通式是：

$$\frac{m_s}{S}=m''\sqrt{\frac{1}{P}}\cdot\frac{1}{434300} \tag{14}$$

式中：　m''——单位权中误差；

$\frac{1}{P}$——所指定边的权倒数。

（1）单位权中误差m的计算

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \tag{15}$$

$[vv]$——各角改正数的平方和。

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$$

若采用两组平差时，$v_i=v_i'+v_i''$，或

$$[vv]=[v_i'\cdot v_i']+[v_i''\cdot v_i'']。$$

r——条件式的数目。

（2）权倒数$\frac{1}{P}$的计算②

如上例有五个条件式，当采用整体平差时

$$\frac{1}{P}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}-\frac{[df\cdot3]^2}{[dd\cdot3]}-\frac{[sf\cdot4]^2}{[ss\cdot4]}$$

---

① 参阅《铁路测量技术规则》第三篇《隧道测量》及第四篇《桥涵测量》，人民铁道出版社，1976年。

② 参阅《最小二乘法》第六章。武汉测绘学院最小二乘法教研组编著，中国工业出版社，1961年。

采用两组平差，以前三个条件式组成第Ⅰ组法方程式时

$$\frac{1}{P}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}-\frac{[Af]^2}{[AA]}-\frac{[Bf\cdot1]^2}{[BB\cdot1]} \tag{16}$$

(16) 式右边的前四项是属于第Ⅰ组方程式的，后面两项是属于第Ⅱ组方程式的。采用系数法时按 (16) 式计算权倒数往往不方便而用

$$[\varphi\varphi]=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]} \tag{17}$$

即：

$$\frac{1}{P}=[\varphi\varphi]-\frac{[Af]^2}{[AA]}-\frac{[Bf\cdot1]^2}{[BB\cdot1]} \tag{18}$$

(3) f 值计算①

首先列出所指定边的函数式（计算式），现以上例桥轴线 AB 边 S_{AB} 为例

$$S_{AB}=\frac{S_1\cdot\sin(7)}{\sin(2)}$$

常以对数形式表达，即

$$F=\lg S_{AB}=\lg S_1+\lg\sin(7)-\lg\sin(2)$$

化为线性方程时

$$F=\lg S_{AB}=\lg S_1-\lg\sin\angle2-\delta_2v_2+\lg\sin\angle7+\delta_7v_7$$

上式中，S_1、$\angle2$、$\angle7$ 为观测值，认为是常量，在计算精度时是不起作用的，在平差中常以权函数式 $\varDelta F$ 代替函数式 F，即

$$\varDelta F=-\delta_2v_2+\delta_7v_7 \tag{19}$$

权函数式的通式是：

$$\varDelta F=f_1v_1+f_2v_2+\cdots+f_nv_n \tag{20}$$

比较(19)、(20)两式即可定出 f 值，上例 $f_2=-\delta_2$；$f_7=+\delta_7$；其余 $f=0$。

从(19)式可以看出，凡是函数式由正弦比组成者，权函数式 $\varDelta F$ 的每一项都是 $\delta\cdot v$，在分子者为正号，在分母者为负号，没有出现者为 0。

(4) φ 值计算

φ 值属第Ⅰ组方程，其值由下式计算：

$$\varphi_i=a_iq_a+b_iq_b+c_iq_c+f_i \tag{21}$$

q_a、q_b、q_c 是一组待定系数，在下面的方程组中解出：

$$\left.\begin{aligned}[aa]q_a+[ab]q_b+[ac]q_c+[af]=0\\ [ab]q_a+[bb]q_b+[bc]q_c+[bf]=0\\ [ac]q_a+[bc]q_b+[cc]q_c+[cf]=0\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

比较(22)式与(6)式，未知数前的系数相同，只要把(6)式中的 w_1、w_2、w_3 换以 $[af]$、$[bf]$、$[cf]$，(6)式解得的 k_a、k_b、k_c 就相当于(22)式解得的 q_a、q_b、q_c，将这一组 q 值代入(21)式经整理后可编出求 φ 值的固定系数表（表 7）。

比较 A 值计算表（表 5）与 φ 值计算表（表 7）可以看出：系数完全一样，但单号角正负符号相同，而双号角符号相反。这是因为极条件式

$$\delta_1v_1-\delta_2v_2+\delta_3v_3-\delta_4v_4+\delta_5v_5-\delta_6v_6+\delta_7v_7-\delta_8v_8+w_d=0$$

而权函数式

$$\varDelta F=f_1v_1+f_2v_2+f_3v_3+f_4v_4+f_5v_5+f_6v_6+f_7v_7+f_8v_8$$

① 参见《最小二乘法》第四章，武汉测绘学院最小二乘法教研组编著，中国工业出版社，1961年。

φ值 计 算 表 表7

	$\frac{1}{8}f_1=$	$\frac{1}{8}f_2=$	$\frac{1}{8}f_3=$	$\frac{1}{8}f_4=$	$\frac{1}{8}f_5=$	$\frac{1}{8}f_6=$	$\frac{1}{8}f_7=$	$\frac{1}{8}f_8=$	φ
φ_1	(+5)	(−3)	(−1)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	
φ_2	(−3)	(+5)	(−1)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	
φ_3	(−1)	(−1)	(+5)	(−3)	(−1)	(−1)	(+1)	(+1)	
φ_4	(−1)	(−1)	(−3)	(+5)	(−1)	(−1)	(+1)	(+1)	
φ_5	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(+5)	(−3)	(−1)	(−1)	
φ_6	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(−3)	(+5)	(−1)	(−1)	
φ_7	(−1)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(+5)	(−3)	
φ_8	(−1)	(−1)	(+1)	(+1)	(−1)	(−1)	(−3)	(+5)	

双号角f与δ反号的缘故。实际上这两个表是相同的。所以，若权函数式中所有的δ与极条件式中的δ正负符号一致时，即可在A值计算表中抄得φ值，不必再列φ值计算表。本例

$\Delta F=-\delta_2 v_2+\delta_7 v_7$，$\delta_2$和$\delta_7$与极条件符号一致，所以只需在$\frac{1}{8}\delta_2$及$\frac{1}{8}\delta_7$的头上打"○"号，然后将有"○"号的取横向总和即为φ值。

若权函数式与极条件式不一致，则需列表7计算φ值。

经证明：$[\varphi\varphi]=[f\cdot\varphi]$，在四边形的平差计算中，$[f\cdot\varphi]$的计算更为简单，两者可作相互校核用。

从上面的叙述可以看出，极条件是一个基础，基线条件与权函数式尽量列出与极条件式的符号一致。这样，改化基线条件式与求φ值时都可以省许多工作。

四、常用图形算例

第一类 各种四边形

各种四边形第Ⅰ组均为内角和条件，见（4）式，所以计算第一次改正数的固定系数均相同，见表4。

对于单基线单四边形：

第Ⅱ组为极条件，改化系数A值计算表见表5。

对于双基线单四边形：

第Ⅱ组为极条件和基线条件，计算方法已在正文中叙述。

对于双基线双四边形采用三组平差①，第Ⅱ组为两个极条件（两者相互独立），第Ⅲ组为基线条件。这里又分两种图式，一种是基线在同一岸，另一种是基线在两岸。为使基线条件与极条件有相同的正负号，两种图式角的编号略有不同。

对于菱形基线网，求改正数的方法与单基线单四边形相同，由实量基线至扩大基线，在函数式中出现了复合角∠4＋∠5、∠6＋∠7，所以在计算φ值时，A值计算表便包含不了，需另用φ值计算表，见表7。

①原理参见《测量平差》第九章。哈尔滨冶金测量学校控制测量教研组编，测绘出版社，1974年。

四边形平差中的主要校核

1. 第一次改正数

$$v_1' + v_2' + v_3' + v_4' = -w_1$$
$$v_3' + v_4' + v_5' + v_6' = -w_2$$
$$v_5' + v_6' + v_7' + v_8' = -w_3$$

$$\text{简写成} \sum_{1,3,5}^{4,6,8} v_i' = \begin{matrix} -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{matrix}$$

2. 第二次改正数

改化系数A和B应满足

$$\sum_{1,3,5}^{4,6,8} A = 0, \quad \sum_{1,3,5}^{4,6,8} B = 0$$

第二次改正数 $$\sum_{1,3,5}^{4,6,8} v_i'' = 0$$

对数改正：单号角改正数总和－双号角改正数总和＝$-w_d'$

3. 第三次改正数

改化系数C应满足：

$$\sum_{1,3,5}^{4,6,8} C = 0, \quad \sum_{9,11,13}^{12,14,16} C = 0$$

改正数v_i'''应满足： $$\sum_{1,3,5}^{4,6,8} v_i''' = 0, \quad \sum_{9,11,13}^{12,14,16} v_i''' = 0$$

对数改正：①单号角对数改正数之和＝双号角对数改正数之和。②求基线长度闭合差的求算线路上有关角对数改正数的代数和等于基线条件闭合差，但符号相反。

4. 精度计算

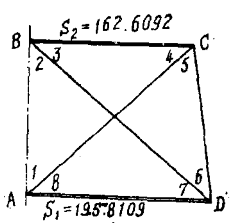
$$\sum_{1,3,5}^{4,6,8} \varphi = 0, \quad \sum_{9,11,13}^{12,14,16} \varphi = 0, \quad [\varphi\varphi] = [f\varphi]$$

计算数字取位，可根据需要决定，校核中若有很小误差主要是凑整引起的。

（1）双基线单四边形平差算例（按最小二乘法）

第一表　总表　附：第一次改正数计算

第一次改正数计算				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\frac{1}{8}w_1=$ +0″.475	$\frac{1}{8}w_2=$ −0″.062	$-\frac{1}{8}w_3=$ −0″.562	v'_i	角号	观测值 ° ′ ″	第一次改正数 v'_i	改正后角值（秒值）	lg sin	秒差 δ	第二次改正数 v''_i	平差后角值 ° ′ ″	对数改正	平差后的 lg sin
(−3)	(+2)	(−1)	−0″.98	1	35 03 26.5	−1″.0	25″.5	9.7592086	3.00	+4″.5	35 03 30.0	+135	9.7592221
−1.42	−0.12	+0.56		2	51 17 25.5	−1″.0	24″.5	9.8922743	1.69	−3″.7	51 17 20.8	−63	9.8922680
(−1)	(−2)	(+1)	−0″.92	3	55 43 48.5	−0″.9	47″.6	9.9171862	1.43	+1″.0	55 43 48.6	+14	9.9171876
−0.48	+0.12	−0.56		4	37 55 23.3	−0″.9	22″.4	9.7885928	2.71	−1″.8	37 55 20.6	−49	9.7885879
(+1)	(−2)	(−1)	+1″.16	5	46 01 44.7	+1″.2	45″.9	9.8571493	2.03	−2″.7	46 01 43.2	−55	9.8571438
+0.48	+0.12	+0.56		6	40 19 03.0	+1″.1	04″.1	9.8109223	2.48	+3″.5	40 19 07.6	+87	9.8109310
(−1)	(+2)	(−3)	+1″.09	7	43 53 38.8	+1″.1	39″.9	9.8409410	2.19	+0″.3	43 53 40.2	+7	9.8409417
−0.48	−0.12	+1.69		8	49 45 29.0	+1″.1	30″.1	9.8827105	1.78	−1″.1	49 45 29.0	−20	9.8827085



$w_1=\angle1+\angle2+\angle3+\angle4-180°=+3''.8$

$w_2=\angle3+\angle4+\angle5+\angle6-180°=-0''.5$

$w_3=\angle5+\angle6+\angle7+\angle8-180°=-4''.5$

$\lg S_1=2.2918370$

$\lg S_2=2.2111450$

$\Sigma \lg\sin\angle单'=39.3744851$

$\Sigma \lg\sin\angle双'=\underline{39.3744999}$

$w'_d=-14.8$

$w'_s=\lg S_1+\lg\sin\angle1'+\lg\sin\angle7'-\lg\sin\angle2'-\lg\sin\angle4'-\lg S_2=-25.5$

（以对数小数后第六位为单位）

第二表　第二次改正数计算及精度计算

角号	第二次改正数计算													精度计算			
	✓	∪ ✓		✓			○ ✓				✓ 横和			○ 横和			
	$\frac{1}{8}\delta_1=$ 0.375	$\frac{1}{8}\delta_2=$ 0.211	$\frac{1}{8}\delta_3=$ 0.179	$\frac{1}{8}\delta_4=$ 0.339	$\frac{1}{8}\delta_5=$ 0.254	$\frac{1}{8}\delta_6=$ 0.310	$\frac{1}{8}\delta_7=$ 0.274	$\frac{1}{8}\delta_8=$ 0.222	A_i	$A_i\cdot k_A$	B_i	$B_i\cdot k_B$	v''_i	φ	f	$A\cdot f$	$B\cdot f$
1	(+5) +1.875	(+3) +0.633	(−1) −0.179	(+1) +0.339	(+1) +0.254	(−1) −0.310	(−1) −0.274	(+1) +0.222	+2.56	−3″.545	+2.57	+8″.104	+4″.5	+0.36			
2	(−3) −1.125	(−5) −1.055	(−1) −0.179	(+1) +0.339	(+1) +0.254	(−1) −0.310	(−1) −0.274	(+1) +0.222	−2.13	+2″.950	−2.12	−6.685	−3″.7	−1.33	−1.69	+3.60	+3.58
3	(−1) −0.375	(+1) +0.211	(+5) +0.895	(+3) +1.017	(−1) −0.254	(+1) +0.310	(+1) +0.274	(−1) −0.222	+1.86	−2.576	+1.13	+3.563	+1″.0	+0.48			
4	(−1) −0.375	(+1) +0.211	(−3) −0.537	(−5) −1.695	(−1) −0.254	(+1) +0.310	(+1) +0.274	(−1) −0.222	−2.29	+3.171	−1.58	−4.982	−1″.8	+0.48			
5	(+1) +0.375	(−1) −0.211	(−1) −0.179	(+1) +0.339	(+5) +1.270	(+3) +0.930	(−1) −0.274	(+1) +0.222	+2.47	−3.421	+0.23	+0.725	−2″.7	−0.48			
6	(+1) +0.375	(−1) −0.211	(−1) −0.179	(+1) +0.339	(−3) −0.762	(−5) −1.550	(−1) −0.274	(+1) +0.222	−2.04	+2.825	+0.23	+0.725	+3″.5	−0.48			
7	(−1) −0.375	(+1) +0.211	(+1) +0.179	(−1) −0.339	(−1) −0.254	(+1) +0.310	(+5) +1.370	(+3) +0.666	+1.77	−2.451	+0.87	+2.712	+0″.3	+1.58	+2.19	+3.88	+1.88
8	(−1) −0.375	(+1) +0.211	(+1) +0.179	(−1) −0.339	(−1) −0.254	(+1) +0.310	(−3) −0.822	(−5) −1.110	−2.20	+3.047	−1.32	−4.162	−1″.1	−0.61			

$$k_A=\frac{[AB]w'_s-[BB]w'_d}{[AA][BB]-[AB]^2}=-1.3849$$

$$k_B=\frac{[AB]w'_d-[AA]w'_s}{[AA][BB]-[AB]^2}=+3.1532$$

桥中线函数式： $AB=S_1\frac{\sin\angle 7}{\sin\angle 2}$

权函数式 $\Delta F_{AB}=-\delta_2 v_2+\delta_7 v_7$

$f_2=-\delta_2=-1.69$； 其余 $f=0$

$f_7=+\delta_7=+2.19$；

$[AA]=37.90$； $[AB]=+21.34$； $[BB]=17.46$； $[\varphi\varphi]=5.69$

$[Af]=+7.48$； $[Bf]=+5.46$； $[f\varphi]=5.71$。

检核： $\sum_{1,3,5}^{4,6,8}A=0$； $\sum_{1,3,5}^{4,6,8}B=0$； $\sum_{1,3,5}^{4,6,8}v''=0$； $\sum_{1,3,5}^{4,6,8}\varphi=0$

精度计算： $[vv]=67.01$　　$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{5}}=\pm 3''.66$

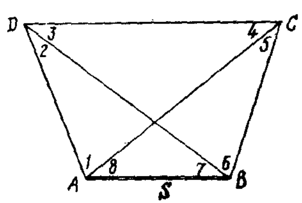
$$\frac{1}{P_{AB}}=[\varphi\varphi]-\frac{[Af]^2}{[AA]}-\frac{([AA][Bf]-[AB][Af])^2}{[AA]([AA][BB]-[AB]^2)}=3.93$$

$$\frac{m_{AB}}{AB}=m\cdot\sqrt{\frac{1}{P}}\times\frac{1}{434300}=\frac{1}{60,400}$$

（2）**单基线单四边形平差算例**（按最小二乘法）

第一表　总　　表

第一次改正数计算 $\frac{1}{8}w_1=+0.200$	$\frac{1}{8}w_2=+0.2375$	$\frac{1}{8}w_3=-0.225$	v_1'	1 角号	2 观测值 ° ′ ″	3 第一次改正数 v_i'	4 改正后角值（秒值）	5 lg sin	6 秒差 δ	7 第二次改正数 v_i''	8 平差后角值 ° ′ ″	9 对数改正	10 平差后的 lg sin
（−3）	（+2）	（−1）	+0″.10	1	79 56 34.2	+0″.1	34″.3	9.9932749	0.37	−0″.4	79 56 33.9	−1	9.9932748
−0.600	+0.475	+0.225		2	33 57 12.1	+0″.1	12″.2	9.7470374	3.13	+0″.1	33 57 12.3	+3	9.7470377
（−1）	（−2）	（+1）	−0″.90	3	40 09 28.3	−0″.9	27″.4	9.8094873	2.50	−0″.4	40 09 27.0	−10	9.8094863
−0.200	−0.475	−0.225		4	25 56 47.0	−0″.9	46″.1	9.6410039	4.33	+0″.7	25 56 46.8	+30	9.6410069
（+1）	（−2）	（−1）	−0″.05	5	16 09 19.0	0	19″.0	9.4444218	7.27	−0″.7	16 09 18.3	−51	9.4444167
+0.200	−0.475	+0.225		6	97 44 27.6	−0″.1	27″.5	9.9960242	−0.28	+0″.4	97 44 27.9	−1	9.9960241
（−1）	（+2）	（−3）	+0″.95	7	38 51 33.5	+1″.0	34″.5	9.7975541	2.61	−0″.3	38 51 34.2	−8	9.7975533
−0.200	+0.475	+0.675		8	27 14 38.1	+0″.9	39″.0	9.6606600	4.09	+0″.6	27 14 39.6	+24	9.6606624



$w_1=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4-180^\circ=+1''.6$

$w_2=\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6-180^\circ=+1''.9$

$w_3=\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8-180^\circ=-1''.8$

$\Sigma\lg\sin\angle$单$=39.0447381$

$\Sigma\lg\sin\angle$双$=39.0447255$

$w_d'=+12.6$