高等学校交流講义

数学分析

SHUXUE FENXI

上 册

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室 編

人民教育出版社

高等学校交流講义

数　学　分　析

SHUXUE　FENXI

上　册

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室　編

人民教育出版社

本书分上下册出版。上册是在 1960 年上半年北京大学数学力学系集体編写的初稿的基础上，由該系冷生明、邓东皋、万伟勋、方企勤、张恭庆等同志改写，并由聂灵沼同志审查校訂定稿。下册是 1959 年底北京大学数学力学系集体編写的，1061 年出版，前曾由該系邓东皋、丁同仁、张錦炎、万伟勋、方企勤等同志审查定稿。

本书可作为綜合大学及高等师范学校数学各专业“数学分析”課程的教材，也可供高等工业学校相近专业使用。

簡装本說明

目前 850×1168毫米规格紙张較少，本书暂以 787×1092毫米规格紙张印刷，定价相应减少 20%。希鉴諒。

数 学 分 析

（上 册）

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室 編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

京华印书局印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K 13010·1026 开本 787×1092 1/32 印张 9 5/16

字数 210,000 印数 54,001—80,000 定价 (6) ￥0.65

1961年7月第1版 1962年3月北京第4次印刷

上册目录

預备知識

第一章 函数

第二章 极限

第三章 連續函数

第四章 微商与不定积分

第五章 微分与积分

第六章　微分方程初步

第七章　泰乐公式

第八章　极限的存在性

預备知識

为了使讀者在开始学习数学分析时能够更好地利用中学数学的基础，我們先讲一些預备知識(如实数軸、絕对值、不等式等)。牢固地掌握这些知識对以后的学习是很重要的。

§1. 实数軸

筑路工人在丈量公路时（假定公路是向正南正北延展的)，总是从某一个定点 O 开始，向着一定的方向，每丈量一定的距离便設立一个路标。各路标的标号是由它对于起点 O 的距离而唯一决定的。而为了分开南北两个不同的方向，往往在距离前面加上正負号来区别，例如在 O 点以北的路标的标号前面带上正号而以南的路标的标号前面带上負号。这样，公路上的地点就和数値之間建立了一个确定的对应关系。从这一类問題可以引出实数軸的概念。

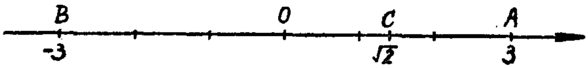

图 0.1

取一条直綫，在此直綫上任取一点 O 和一个固定綫段 l 作为长度单位。直綫上任何一点 A 到原点的距离（$\overline{OA}$ 与 l 之比）就确定一个唯一的数。为了区分 O 点左右两边的点，O 点右面的点以正数来代表，它的坐标就是它和 O 点的距离；而 O 点左面的点以負数来代表，它的坐标是它和点的距离带上負号。这样直綫上每个点都用一个实数来表示它的位置，这个实数叫做这一点的坐标。反之，每个实数也必然是某一点的坐标。

定义 在一条直綫上取一点 O 为原点和一綫段 l 为单位长度，并

規定直綫的一个方向为正，这样，如上在直綫上建立了坐标，則称此直綫为实数軸。

每一个实数有数軸上的唯一的点与之对应，反之，数軸上的每一个点也必有唯一的实数与之对应。这样，实数与实数軸上的点之間就建立了一一对应的关系。以后我們将不严格区分数和点，有时說数軸上一个点 x 也就是說一个实数 x。

§2. 必要充分条件

我們說一件事情发生或不发生（成立或不成立）总是在一定条件下說的。

定义 1. 若条件 A 具备时，某事件 B 必然成立，則称条件 A 为事件 B 的充分条件。

例 1. 摩擦一定生热。那末，摩擦就是生热的充分条件。

例 2. 若 a, b 都是正数，則它們的积 ab 也是正数。这里 a, b 都是正数是 ab 是正数的一个充分条件。

必須注意，充分条件不一定是唯一的。如例 1 中生热可由燃燒或其他方法而产生，不一定是由摩擦。

定义 2. 若条件 A 不具备时，某事件 B 就一定不能成立，則称条件 A 为事件 B 的一个必要条件。

例 3. 沒有鋼鉄就不能实現机械化。那末，鋼鉄就是机械化的必要条件。

例 4. 两个三角形全等，至少有一組对应边相等。这里，两个三角形有一組对应边相等是两个三角形全等的必要条件。

必須注意，必要条件不一定保証結論的成立，但又不允許去掉。去掉它就必然导致結論不能成立，因而这条件是为保証結論成立所必需的。如例 4 中只有一組对应边相等，两个三角形并不全等；但沒有一組对应边相等的条件，就不可能有两个三角形全等的結論成立。

定义 3. 如果条件 A 既是事件 B 的充分条件同时又是事件 B 的必要条件，則称条件 A 是事件 B 的必要充分条件。或簡称为充要条件。

例 5. 对角綫互相平分的四边形为平行四边形。这里，四边形的对角綫互相平分是它为平行四边形的充要条件。这个条件不能去掉，而又能保証事件的成立。

总括起来条件与結論不是絕对的，可以互相轉化。如果由 A 能推出 B 成立：

$$A \longrightarrow B$$

那末 A 是 B 的一个充分条件，B 是 A 的一个必要条件。又如果既由 A 可以推出 B，又由 B 可以推出 A：

$$A \Longleftrightarrow B$$

那末 A 是 B 的一个充要条件，或 B 是 A 的一个充要条件。这样，A 和 B 同时成立或同时不成立。在邏輯上，A 和 B 就叫做互相等价。

讀者自己可以通过更多的实例来加深对以上总括起来的概念的认識。

§ 3. 絕对值、不等式

1. 无論在实际和理論中，我們往往要考虑一个量的大小，而不看它的符号，这就需要引出絕对值的概念。

在实数軸上两个点之間的距离恒以正实数来表示。例如，A 点的坐标为 3，可知 $\overline{OA}=3$（$\overline{OA}$ 为长度，即 O 到 A 的距离）。B 点的坐标为 -3，但是这里的負号只說明 B 在 O 的左方，和距离沒有关系，因而也有 $\overline{OB}=3$.

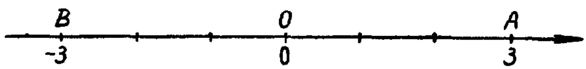

图 0.2

由此可見，当 A 点的坐标 a 大于 0 时，$\overline{OA}=a$；而当 A 点的坐标 a 小于 0 时，$\overline{OA}=-a$.

为了刻划这个性质，我們規定 a 的絕对值(記为$|a|$)的定义:

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0, \\ -a & \text{当 } a<0. \end{cases}$$

这样，$|a|$可以理解为数軸上坐标为 a 的点到原点 O 的距离。利用絕对值的概念可以得出数軸上任意两点的距离的表达式。若两点的坐标是 x_1 和 x_2，它們的距离就等于$|x_1-x_2|$.

2. 絕对值反映在数量上就是两个量相差的大小。这概念在以后的学习中經常要用到。所以我們在这里举出絕对值的一些重要性质。

(1) $$|a|\geqslant 0,$$

(2) $$|a|\geqslant \pm a,$$

(3) $$|-a|=|a|,$$

(4) $$|ab|=|a||b|,$$

(5) $$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},$$

(6) $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

我們証明上面最后一个不等式为例。首先，若 $a+b\geqslant 0$, 則

$$|a+b|=a+b.$$

但$|a|\geqslant a$, $|b|\geqslant b$, 所以

$$a+b\leqslant|a|+|b|,$$

即 $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

其次，若 $a+b<0$, 則

$$|a+b|=-(a+b).$$

但$|a|\geqslant -a$, $|b|\geqslant -b$, 所以

$$-(a+b)\leqslant|a|+|b|,$$

即 $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

綜合两种情况得

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

(7) $$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

这可以直接由(6)得到。我們只需在(6)中把 a 改换为 $a-b$，卽得

$$|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|.$$

移項卽得 $$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

3. 最后我們讲另一个在数学分析中常用的关于絕对值的不等式。設 a 为一定点和 r 为任意給定的实数且 $r>0$，則点 x 滿足

$$|x-a|<r$$

的必要充分条件是

$$a-r<x<a+r,$$

卽

(8) $$|x-a|<r\Longleftrightarrow a-r<x<a+r.$$

几何意义是：到点 a 的距离小于 r 的点 x 都在$(a-r)$和$(a+r)$两点之間；反之，在$(a-r)$和$(a+r)$两点間的点 x 到 a 的距离都小于 r。

証明分两步。

1° 証明由 $|x-a|<r$ 可以推出 $a-r<x<a+r$。

事实上，根据絕对值的性质(2)，

$$r>|x-a|\geqslant\pm(x-a).$$

从 $$r>x-a$$

得 $$r+a>x,$$

从 $$r>-(x-a)$$

得 $$a-r<x.$$

所以， $$a-r<x<a+r.$$

2° 証明由 $a-r<x<a+r$ 可以推出 $|x-a|<r$.

由 $x<a+r$ 推出 $x-a<r$，由 $a-r<x$ 推出 $-(x-a)<r$，因而有

$$|x-a|<r.$$

特例 当 $a=0$ 时，

(8') $$|x|<r\Longleftrightarrow -r<x<r.$$

§4. 数学归納法

归納法是人們从特殊认識一般的最基本的方法。在数学上，有些公式和命題是对自然数全体而言的，意味着它对所有自然数都成立。但是我們往往首先是对特殊的几个自然数获得认識，然后归納出一般的結果，推想它对一切的自然数都成立。为了檢驗我們归納的結果是否正确，我們需要进行驗証。驗証通常分两个步驟进行。

1° 証明某个命題对自然数 1 成立;

2° 在假定某个命題对于自然数 k 成立的前題下，証明它对于自然数 $k+1$ 也成立。

这样，根据 1° 某个命題对于自然数 1 成立；又根据 2° 推导出命題对于自然数 2 成立。既然它对自然数 2 成立，再根据 2° 推导出命題对于自然数 3 也成立，如此不断应用 2°，就可以推出命題对于 1, 2, 3, 4, 5, …, 从而对于一切自然数都成立。所以有了这两个步驟，就証明了命題的正确性。这个驗証的方法就叫做数学归納法。它和命題如何归納而成无关。

用数学归納法来証明命題的这两个步驟是缺一不可的。否則得到的結論有可能是錯誤的。

下面就讲一个用数学归納法来証明問題的例子。

例。求 $1+3+5+7+\cdots+(2n+1)$ 的和。

我們分两步来处理这个問題。第一步先作几次观察，初步探索其規律:

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & s_1=1=1^2 \\
n=2 & s_2=1+3=4=2^2 \\
n=3 & s_3=1+3+5=9=3^2 \\
n=4 & s_4=1+3+5+7=16=4^2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

从这几个特殊情况，我們看出以下的命題：

$$s_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

有可能对于一切自然数 n 都成立。

但是否对于一切自然数都正确呢？第二步我們才用数学归納法来驗証这个命題。

1° $n=1$ 时，$s_1=1^2$，結論正确。

2° 設 $n=k$ 时，$s_k=k^2$ 成立。求証 $n=k+1$ 时，公式 $s_{k+1}=(k+1)^2$ 也成立。

事实上，应用 $n=k$ 的假設：

$$s_{k+1}=1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=$$
$$=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

这就証明了 $s_n=n^2$，即分析时所得的結論是正确的。

用数学归納法可以証明“牛頓二項式定理”：

$$(a+b)^n=a^n+c_n^1a^{n-1}b+c_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+c_n^ka^{n-k}b^k+$$
$$+\cdots+c_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

其中
$$c_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

牛頓二項式定理在数学上有广泛的应用。

第一章　函数

§1. 函数关系

在自然界中，質的变化……只有由于物質或运动(所謂能量)的量的增加或減少才能发生。

沒有物質或运动的增加或減少，即沒有有关的物体的量的变化，要变化它的質是不可能的。

——恩格斯(自然辯証法，人民出版社，1955 年版第 40 頁)

1. 函数关系　一切事物都是在不停地运动着，并且在运动中不断地发生着变化。而事物在运动中的变化过程，又是质的变化和量的变化的对立統一。因此，我們对于事物的数量关系的研究，也是以具体的运动規律为实践的基础的。

我們知道，一般的量可以分为常量和变量两类。但一个量到底是常量还是变量，并不是絕对的。例如地面附近重力加速度，在小范圍內我們可以认为是处处相同的，即认为是常量。但在发射人造卫星时，就需要考虑重力加速度的差别，它就成为变量了。这表明，在判断一个量是否常量时，应当根据問題的不同要求具体地进行分析。在不同条件，时間和地点，問題的性质和要求也就不同。

在数学分析里研究的数量关系主要是变量間的关系。我們这里所討論的量是可以用实数来刻划的量。为了易于辨别，我們經常用 x、y、z 等字母表示变量，用 a、b、c 等字母表示常量。

运动过程中发生变化的量都不止一个。在这些变量間，往往存在着确定的依賴关系。所謂“函数关系”就是这样的一种关系。为了說明这种关系，我們来看几个实例。

例 1. 为了掌握某个地区气温变化对气候影响的規律，气象台用自动記录器每天測量出一昼夜气溫的变化情况，如图1.1，横軸表示时間

t, 纵軸表示溫度 T, 曲綫上任一点 $P(a, b)$ 表示在时間 $t=a$ 时測得一定的气溫 $T=b$(在一定地点)。图 1.1 所表示的是时間和气溫之間的函数关系。它反映了气溫随时間而变化的一个規律。

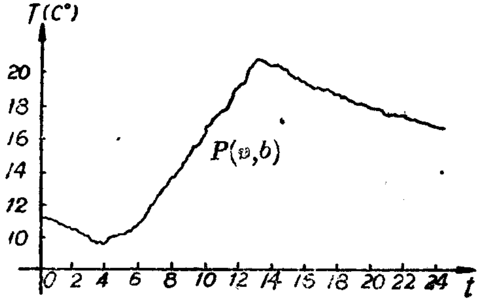

图 1.1 某地气溫的日变程

例 2. 在电路中，电压 V, 电流强度 I 和电阻 R 之間的关系是 $V=IR$, 这也是一个函数关系。当电流 I 和电阻 R 給定之后，电压跟着就决定了。

例 3. 在电量为 q 的电荷所形成的电場中，各点的电場强度的大小是 $E=\frac{q}{r^2}$, 其中 r 是該点到电荷 q 的距离。这表示出各点的电場强度和各点的位置之間的函数关系。它表明在一定的地点有确定的电場强度。

我們試来具体地分析上面这三个实例。在例 1 和例 2 中，函数关系描述的都是客观的运动过程中的变化規律。例 1 是說，气溫是随着时間的变化而不断变化的。早晨和中午的气溫不同，中午和傍晚也不同，在同一个地点，每一个时刻都有确定的气溫。在时間和气溫这两个变量之間，存在着由图象所表示的确定的依賴关系。这是客观的变化过程中的依賴关系，而且这个关系本身就是描述气溫随时間的变化而变化的規律的。

对于例 2, 可作类似的分析。例 3 和例 1、例 2 有些不同。这个依賴关系所描述的是电場中电場强度的分布，还不能說描述的是直接的运动过程。但是电場中場强的分布，决不能脫离开不断运动着的电場孤立地存在，只不过在具体的研究中我們把它作为相对靜止的，而不去

考虑电場的运动。但即使是从相对静止的角度出发，我們要研究的仍然是各点的場强随着各点的位置的变化而变化的規律。

类似于上面的表明函数关系的实例在生产实践和生活实际中还可以举出很多很多。自然科学中的定律，許多都是用变量之間的函数关系描写出来的。当人們掌握了这些函数关系时，就大大有利于人們来改造自然界，为人类服务。而我們所要学的数学分析呢，正是深入細致地研究函数关系的基本理論。我們就是要通过一定的严格的基本訓练来掌握这套基本理論，使数学为我国的社会主义建設服务。

函数关系的概念是人們在生产斗争中长期地多方面地总結出来的；而在自然科学中由于实际需要而获得了严格的精确的定义。

定义(函数)。設有两个变量 x 与 y 相互联系着。若变量 y 按照某种一定的規律随着变量 x 的变化而变化，对应于 x 的每一个值都有 y 的一个唯一确定的值，我們就說“y 是 x 的一个函数，”并把 x 叫做自变量。若把 y 随 x 而变化的規律記作 f，我們就把 x 的任何一个值 x_1 所对应的 y 的值 y_1 記作 $f(x_1)$，或

$$y_1=f(x_1).$$

一般地我們記作

$$y=f(x).$$

下面我們再来对函数关系概念中所說的量与量之間的依賴关系作进一步的了解。这个依賴关系，是說一个量要随着其他一些量的变化而变化，不能說这些量的变化就是这个量发生变化的原因。而且，这个依賴关系还不是絕对的，它們可以互相轉化。比如例 2 的情况，如果电阻大小已經确定，在某种情况下，电压 V 是自变量电流 I 的函数 $V=RI$；但是，在另一种場合下，电流 I 表现为自变量电压 V 的函数 $I=\frac{R}{V}$，根据这两种函数关系，我們才造出了伏特計和安培計。

綜合上面所讲的，对函数关系应該有更进一步的了解是：函数关系描述的是在客观的运动和变化的过程中量与量之間的确定的依賴关

系。这个确定的依賴关系本身就反映了客观的运动变化过程中量与量之間的变化規律。从例 3 还可以看到，有时函数所描述的，还可以是运动过程中的某个状态。这里应該注意，并不是所有的量与量之間的关系都能描述成函数关系。例如在社会現象和生命現象中，就有很多量与量之間的关系不能作为函数关系来考慮。

2. 反函数 自变量的相对性已如上述：在电阻 R 固定的条件下，变量 V 与 I，在一种場合中 I 是自变量而 $V=IR$ 是 I 的函数；在另一种場合中 V 却是自变量而 $I=\frac{1}{R}V$ 是 V 的函数。我們称函数 $V=IR$ 和 $I=\frac{1}{R}V$ 互为"反函数"。一般地，如果从函数 $y=f(x)$ 得到反函数 $x=\varphi(y)$，显然从函数 $x=\varphi(y)$ 得到的反函数就是 $y=f(x)$，因而 $f(x)$ 和 $\varphi(y)$ 互为反函数。反函数是說函数关系是相反的，就是說把那个量 x 或 y 作为自变量，而把其他一个量 y 或 x 作为函数的依賴关系是相反的。至于对一个函数有沒有必要求出它的反函数，那就要看实际問題的要求了。比如上面討論的例 2 的情况就有必要，但在例 1 的情况一般就沒有必要。

根据函数 $y=f(x)$，給定 y 的値来計算 x 的値。往往从一个 y 的値不只得出一个 x 的値，而是得出多个値，但是按照一定的条件和要求，使得計算出来的 x 的値被 y 的値唯一确定，这样就得到一个反函数，在条件和要求不同的情况下，就得到不同的反函数。这种函数称作"多値函数"。例如 $y=x^2$ 的反函数是 $x=+\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$。一般說来，多値函数事实上是由多个函数組成的。

在很多实际問題中，变量的个数往往不止两个，而有很多个。但其中有的变量是随着其他某些变量的变化而变化的。例如若干个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 y，其中变量 y 是随着其他变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的变化而变化的，那末，y 就說是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个(多元)函数，而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做它的自变量。它們之間的函数关系可以表示成：