

高等学校交流讲义

数 学 分 析

SHUXUE FENXI

上 册

北京大学数学力学系
数学分析与函数论教研室 編

人 民 教 育 出 版 社

高等学校交流讲义



数 学 分 析

SHUXUE FENXI

上 册

北京大学数学力学系 編
数学分析与函数论教研室

人民教育出版社

本书分上下册出版。上册是在 1960 年上半年北京大学数学力学系集体编写的初稿的基础上，由该系冷生明、邓东皋、万伟勋、方企勤、张恭庆等同志改写，并由聂灵沼同志审查校订定稿。下册是 1959 年底北京大学数学力学系集体编写的，1961 年出版，前曾由该系邓东皋、丁同仁、张锦炎、万伟勋、方企勤等同志审查定稿。

本书可作为综合大学及高等师范学校数学各专业“数学分析”课程的教材，也可供高等工业学校相近专业使用。

簡裝本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本書暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定價相應減少 20%。希鑒諒。

数 学 分 析

(上 册)

北京大学数学力学系 編
数学分析与函数論教研室

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

京 华 印 书 局 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

统一书号 K 13010·1026 开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 $8 \frac{5}{16}$

字数 210,000 印数 54,001—80,000 定价 (6) 羊 0.65

1961 年 7 月第 1 版 1962 年 3 月北京第 4 次印刷

上册目录

预备知識

§1. 实数軸.....	1
§2. 必要充分条件	2
§3. 絕對值、不等式	3
§4. 数学归納法.....	6

第一章 函 数

§1. 函数关系.....	8
1. 函数关系(8) 2. 反函数(11) 3. 定义域(12)	
§2. 函数的表示法	12
1. 列表法(12) 2. 图象法(13) 3. 公式法(14)	
§3. 初等函数.....	14
§4. 差分法与曲綫改直	19
§5. 实用諸量分析	25

第二章 极 限

§1. 极限問題的提出	31
1. 运动的瞬时速度(31) 2. 变力作功問題(34)	
§2. 无穷小量.....	36
1. 无限变小的概念(36) 2. 无限接近一个常量的概念(38) 3. 实例(39)	
4. 无穷小量的定义(40) 5. 无穷小量的运算(44)	
§3. 有极限存在的量	46
1. 极限(46) 2. 极限的四則运算(50) 3. 极限不等式(53)	
§4. 无穷大量.....	56
§5. 函数的极限.....	58
1. 函数的极限(58) 2. 函数极限与叙列极限的关系(66)	
§6. 极限方法的一个应用——数 ϵ	69
§7. 无穷小量的比較	71

第三章 連續函数

§ 1. 函数的連續性	74
1. 函数連續的概念(74) 2. 函数連續的判別法(77) 3. 間断点的分类(79)	
4. 連續函数的四則运算(80)	
§ 2. 連續函数的基本性質	82
1. 第一个性質(82) 2. 第二个性質(83) 3. 第三个性質(85)	
§ 3. 初等函数的連續性	87
1. 反函数的連續性(87) 2. 复合函数的連續性(90)	

第四章 微商与不定积分

§ 1. 微商的概念	92
1. 函数的变化率与微商(92) 2. 微商的几何意义(97) 3. 可微性(97)	
4. 高阶微商(98)	
§ 2. 微商法則	100
1. 常量的微商(100) 2. 幂函数的微商(100) 3. 代数和的微商(100) 4. 常数因子可以移到微商号外面(101) 5. 多项式的微商(101) 6. 乘积的微商(102)	
7. 商的微商(102) 8. 三角函数的微商(103) 9. 对数函数的微商(104) 10. 复合函数的微商(105) 11. 反函数的微商(106) 12. 指数函数的微商(106) 13. 任意幂函数的微商(107) 14. 反三角函数的微商(108) 15. 微商表(108) 16. 例題(109)	
§ 3. 微商对于函数研究的应用	113
1. 微商中值公式(113) 2. 函数的上升与下降(117) 3. 函数的极值(120) 4. 函数的凸凹与变曲点(124) 5. 漸近綫(125) 6. 函数作图(128) 7. 最大最小問題(180) 8. 洛必大法則(183)	
§ 4. 不定积分	138
§ 5. 简单积分法	143
1. 分部积分法(143) 2. 換元积分法(146)	
§ 6. 有理函数的积分	151
1. 有理函数的积分法(151) 1° 六个基本公式(151) 2° 两种基本类型(153)	
3° 部分分式(154) 2. 有理式的积分法(157) 1° 三角函数有理式的积分法(157)	
2° 含綫性根式的有理式的积分法(160) 3° 含二次根式的有理式的积分法(162)	

第五章 微分与积分

§ 1. 問題的提出	165
§ 2. 微分	169
1. 微分的概念(169) 2. 微分法的基本法則(172) 3. 微分形式的不变性(172)	
§ 3. 定积分	173

1. 定积分的定义(173)	2. 定积分的基本性质(176)
§ 4. 微积分基本定理	176
§ 5. 定积分的计算法	179
1. 分部积分法与换元法(179)	2. 第一中值公式(180)
3. 第二中值公式(182)	
§ 6. 微积分的应用	186
1. 运用微积分解决具体问题的程序(186)	2. 重心与古耳亭定理(191)
3. 转动惯量(194)	4. 第一型曲线积分(195)
5. 无穷积分(197)	6. 瑕积分(198)
§ 7. 定积分值的近似计算	200
1. 梯形法(200)	2. 抛物线法(203)

第六章 微分方程初步

§ 1. 一般概念	207
§ 2. 一阶微分方程	209
1. 可分离变量的方程(209)	2. 可化为变量分离的方程(210)
3. 一阶线性微分方程(212)	4. 通解与特解(215)
§ 3. 微分方程的几何方法	216
1. 方向场与积分曲线(216)	2. 等斜线方法(216)
3. 欧拉折线法(217)	4. 正交轨线问题(218)
§ 4. 特殊类型的二阶微分方程	220
1. 方程 $y''=f(x)$ (220)	2. 方程 $y''=f(x, y')$ (221)
3. 方程 $y''=f(y, y')$ (224)	

第七章 泰勒公式

§ 1. 公式的推导	227
§ 2. 余项的形式	230
§ 3. 泰勒级数	230
§ 4. 函数值的近似计算	234

第八章 极限的存在性

§ 1. 数 e 的存在	237
§ 2. 区间套定理	240
§ 3. 连续函数三个基本性质的证明	242
§ 4. 极限存在的条件	245
§ 5. 可积性	250
1. 可积的必要条件(251)	2. 上确界与下确界(251)
3. 达布上和与下和(254)	
4. 可积的必要充分条件(257)	

預备知識

为了使讀者在开始学习数学分析时能够更好地利用中学数学的基础，我們先讲一些預备知識(如实数軸、絕對值、不等式等)。牢固地掌握这些知識对以后的学习是很重要的。

§ 1. 实数軸

筑路工人在丈量公路时(假定公路是向正南正北延展的)，总是从某一个定点 O 开始，向着一定的方向，每丈量一定的距离便設立一个路标。各路标的标号是由它对于起点 O 的距离而唯一决定的。而为了分开南北两个不同的方向，往往在距离前面加上正負号来区别，例如在 O 点以北的路标的标号前面带上正号而以南路标的标号前面带上負号。这样，公路上的地点就和数值之間建立了一个确定的对应关系。从这一类問題可以引出实数軸的概念。

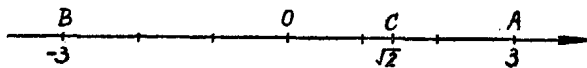


图 0.1

取一条直綫，在此直綫上任取一点 O 和一个固定綫段 l 作为长度单位。直綫上任何一点 A 到原点的距离($\overline{OA}$ 与 l 之比)就确定一个唯一的数。为了区分 O 点左右两边的点， O 点右面的点以正数来代表，它的坐标就是它和 O 点的距离；而 O 点左面的点以負数来代表，它的坐标是它和点的距离带上負号。这样直綫上每个点都用一个实数来表示它的位置，这个实数叫做这一点的坐标。反之，每个实数也必然是某一点的坐标。

定义 在一条直綫上取一点 O 为原点和一綫段 l 为单位长度，并

規定直線的一個方向為正，這樣，如上在直線上建立了坐標，則稱此直線為實數軸。

每一個實數有數軸上的唯一的點與之對應，反之，數軸上的每一個點也必有唯一的實數與之對應。這樣，實數與實數軸上的點之間就建立了一一對應的關係。以後我們將不嚴格區分數和點，有時說數軸上一個點 x 也就是說一個實數 x 。

§ 2. 必要充分條件

我們說一件事情發生或不發生（成立或不成立）總是在一定條件下說的。

定義 1. 若條件 A 具備時，某事件 B 必然成立，則稱條件 A 為事件 B 的充分條件。

例 1. 摩擦一定生熱。那末，摩擦就是生熱的充分條件。

例 2. 若 a, b 都是正數，則它們的積 ab 也是正數。這裡 a, b 都是正數是 ab 是正數的一個充分條件。

必須注意，充分條件不一定是唯一的。如例 1 中生熱可由燃燒或其他方法而產生，不一定是由摩擦。

定義 2. 若條件 A 不具備時，某事件 B 就一定不能成立，則稱條件 A 為事件 B 的一個必要條件。

例 3. 沒有鋼鐵就不能實現機械化。那末，鋼鐵就是機械化的必要條件。

例 4. 兩個三角形全等，至少有一組對應邊相等。這裡，兩個三角形有一組對應邊相等是兩個三角形全等的必要條件。

必須注意，必要條件不一定保證結論的成立，但又不允許去掉。去掉它就必然導致結論不能成立，因而這條件是為保證結論成立所必需的。如例 4 中只有一組對應邊相等，兩個三角形並不全等；但沒有一組對應邊相等的條件，就不可能有兩個三角形全等的結論成立。

定义 3. 如果条件 A 既是事件 B 的充分条件同时又是事件 B 的必要条件, 则称条件 A 是事件 B 的必要充分条件。或简称为充要条件。

例 5. 对角线互相平分的四边形为平行四边形。这里, 四边形的对角线互相平分是它为平行四边形的充要条件。这个条件不能去掉, 而又能保证事件的成立。

总括起来条件与结论不是绝对的, 可以互相转化。如果由 A 能推出 B 成立:

$$A \longrightarrow B$$

那末 A 是 B 的一个充分条件, B 是 A 的一个必要条件。又如果既由 A 可以推出 B , 又由 B 可以推出 A :

$$A \longleftrightarrow B$$

那末 A 是 B 的一个充要条件, 或 B 是 A 的一个充要条件。这样, A 和 B 同时成立或同时不成立。在逻辑上, A 和 B 就叫做互相等价。

读者自己可以通过更多的实例来加深对以上总括起来的概念的認識。

§ 3. 绝对值、不等式

1. 无论在实际和理论中, 我们往往要考虑一个量的大小, 而不看它的符号, 这就需要引出绝对值的概念。

在实数轴上两个点之间的距离恒以正实数来表示。例如, A 点的坐标为 3, 可知 $\overline{OA} = 3$ ($\overline{OA}$ 为长度, 即 O 到 A 的距离)。 B 点的坐标为 -3 , 但是这里的负号只说明 B 在 O 的左方, 和距离没有关系, 因而也有 $\overline{OB} = 3$ 。

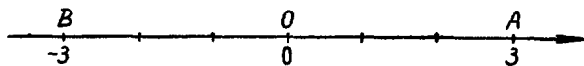


图 0.2

由此可见, 当 A 点的坐标 a 大于 0 时, $\overline{OA} = a$; 而当 A 点的坐标 a 小于 0 时, $\overline{OA} = -a$ 。

为了刻划这个性质，我們規定 a 的絕對值(記为 $|a|$)的定义:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0, \\ -a & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

这样, $|a|$ 可以理解为数軸上坐标为 a 的点到原点 O 的距离。利用絕對值的概念可以得出数軸上任意两点的距离的表达式。若两点的坐标是 x_1 和 x_2 , 它們的距离就等于 $|x_1 - x_2|$ 。

2. 絕對值反映在数量上就是两个量相差的大小。这概念在以后的学习中經常要用到。所以我們在这里举出絕對值的一些重要性质。

$$(1) \quad |a| \geq 0,$$

$$(2) \quad |a| \geq \pm a,$$

$$(3) \quad |-a| = |a|,$$

$$(4) \quad |ab| = |a| |b|,$$

$$(5) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|},$$

$$(6) \quad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

我們証明上面最后一个不等式为例。首先, 若 $a+b \geq 0$, 則

$$|a+b| = a+b.$$

但 $|a| \geq a$, $|b| \geq b$, 所以

$$a+b \leq |a| + |b|,$$

$$\text{即} \quad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

其次, 若 $a+b < 0$, 則

$$|a+b| = -(a+b).$$

但 $|a| \geq -a$, $|b| \geq -b$, 所以

$$-(a+b) \leq |a| + |b|,$$

$$\text{即} \quad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

綜合两种情况得

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

$$(7) \quad |a-b| \geq |a| - |b|.$$

这可以直接由(6)得到。我们只需在(6)中把 a 改换为 $a-b$, 即得

$$|(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|.$$

移项即得

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

3. 最后我们讲另一个在数学分析中常用的关于绝对值的不等式。

设 a 为一定点和 r 为任意给定的实数且 $r > 0$, 则点 x 满足

$$|x-a| < r$$

的必要充分条件是

$$a-r < x < a+r,$$

即

$$(8) \quad |x-a| < r \iff a-r < x < a+r.$$

几何意义是: 到点 a 的距离小于 r 的点 x 都在 $(a-r)$ 和 $(a+r)$ 两点之间; 反之, 在 $(a-r)$ 和 $(a+r)$ 两点间的点 x 到 a 的距离都小于 r 。

证明分两步。

1° 证明由 $|x-a| < r$ 可以推出 $a-r < x < a+r$ 。

事实上, 根据绝对值的性质(2),

$$r > |x-a| \geq \pm(x-a).$$

从

$$r > x-a$$

得

$$r+a > x,$$

从

$$r > -(x-a)$$

得

$$a-r < x.$$

所以,

$$a-r < x < a+r.$$

2° 证明由 $a-r < x < a+r$ 可以推出 $|x-a| < r$ 。

由 $x < a+r$ 推出 $x-a < r$, 由 $a-r < x$ 推出 $-(x-a) < r$, 因而有

$$|x-a| < r.$$

特例 当 $a=0$ 时,

$$(8') \quad |x| < r \iff -r < x < r.$$

§ 4. 数学归纳法

归纳法是人們从特殊認識一般的最基本的方法。在数学上，有些公式和命題是对自然数全体而言的，意味着它对所有自然数都成立。但是我們往往首先是对特殊的几个自然数获得認識，然后归纳出一般的結果，推想它对一切的自然数都成立。为了檢驗我們归纳的結果是否正确，我們需要进行驗證。驗證通常分两个步驟进行。

1° 証明某个命題对自然数 1 成立；

2° 在假定某个命題对于自然数 k 成立的前題下，証明它对于自然数 $k+1$ 也成立。

这样，根据 1° 某个命題对于自然数 1 成立；又根据 2° 推导出命題对于自然数 2 成立。既然它对自然数 2 成立，再根据 2° 推导出命題对于自然数 3 也成立，如此不断应用 2°，就可以推出命題对于 1, 2, 3, 4, 5, ..., 从而对于一切自然数都成立。所以有了这两个步驟，就証明了命題的正确性。这个驗證的方法就叫做数学归纳法。它和命題如何归纳而成无关。

用数学归纳法来証明命題的这两个步驟是缺一不可的。否則得到的結論有可能是錯誤的。

下面就讲一个用数学归纳法来証明問題的例子。

例。求 $1+3+5+7+\cdots+(2n+1)$ 的和。

我們分两步来处理這個問題。第一步先作几次觀察，初步探索其規律：

$n=1$	$s_1=1=1^2$
$n=2$	$s_2=1+3=4=2^2$
$n=3$	$s_3=1+3+5=9=3^2$
$n=4$	$s_4=1+3+5+7=16=4^2$
.....	

从这几个特殊情况, 我們看出以下的命题:

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

有可能对于一切自然数 n 都成立。

但是否对于一切自然数都正确呢? 第二步我們才用数学归纳法来验证这个命题。

1° $n=1$ 时, $s_1=1^2$, 結論正确。

2° 設 $n=k$ 时, $s_k=k^2$ 成立。求证 $n=k+1$ 时, 公式 $s_{k+1}=(k+1)^2$ 也成立。

事实上, 应用 $n=k$ 的假设:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \end{aligned}$$

这就证明了 $s_n=n^2$, 即分析时所得的結論是正确的。

用数学归纳法可以証明“牛頓二項式定理”:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + c_n^1 a^{n-1}b + c_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + c_n^k a^{n-k}b^k + \\ &\quad + \cdots + c_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n, \end{aligned}$$

其中
$$c_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

牛頓二項式定理在数学上有广泛的应用。

第一章 函数

§ 1. 函数关系

在自然界中，質的变化……只有由于物質或运动(所謂能量)的量的增加或减少才能发生。

沒有物質或运动的增加或减少，即沒有有关的物体的量的变化，要变化它的質是不可能的。

——恩格斯(自然辯証法，人民出版社，1955 年版第 40 頁)

1. 函数关系 一切事物都是在不停地运动着，并且在运动中不断地发生着变化。而事物在运动中的变化过程，又是质的变化和量的变化的对立統一。因此，我們对于事物的数量关系的研究，也是以具体的运动規律为实践的基础的。

我們知道，一般的量可以分为常量和变量两类。但一个量到底是常量还是变量，并不是絕对的。例如地面附近重力加速度，在小範圍內我們可以认为是处处相同的，即认为是常量。但在发射人造卫星时，就需要考虑重力加速度的差別，它就成为变量了。这表明，在判断一个量是否常量时，应当根据問題的不同要求具体地进行分析。在不同条件，時間和地点，問題的性質和要求也就不同。

在数学分析里研究的数量关系主要是变量間的关系。我們这里所討論的量是可以用实数来刻划的量。为了易于辨別，我們經常用 x, y, z 等字母表示变量，用 a, b, c 等字母表示常量。

运动过程中发生变化的量都不止一个。在这些变量間，往往存在着确定的依賴关系。所謂“函数关系”就是这样的一种关系。为了說明这种关系，我們来看几个实例。

例 1. 为了掌握某个地区气温变化对气候影响的規律，气象台用自动記錄器每天測量出一昼夜气温的变化情况，如图 1.1，橫軸表示時間

t , 纵轴表示温度 T , 曲线上任一点 $P(a, b)$ 表示在时间 $t=a$ 时测得一定的气温 $T=b$ (在一定地点)。图 1.1 所表示的是时间和气温之间的函数关系。它反映了气温随时间而变化的一个规律。

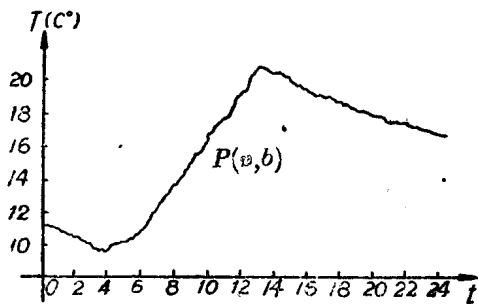


图 1.1 某地气温的日变程

例 2. 在电路中, 电压 V , 电流强度 I 和电阻 R 之间的关系是 $V=IR$,

这也是一个函数关系。当电流 I 和电阻 R 给定之后, 电压跟着就决定了。

例 3. 在电量为 q 的电荷所形成的电场中, 各点的电场强度的大小是 $E = \frac{q}{r^2}$, 其中 r 是该点到电荷 q 的距离。这表示出各点的电场强度和各点的位置之间的函数关系。它表明在一定的地点有确定的电场强度。

我们试来具体地分析上面这三个实例。在例 1 和例 2 中, 函数关系描述的都是客观的运动过程中的变化规律。例 1 是说, 气温是随着时间的变化而不断变化的。早晨和中午的气温不同, 中午和傍晚也不同, 在同一个地点, 每一个时刻都有确定的气温。在时间和气温这两个变量之间, 存在着由图象所表示的确定的依赖关系。这是客观的变化过程中的依赖关系, 而且这个关系本身就是描述气温随着时间的变化而变化的规律的。

对于例 2, 可作类似的分析。例 3 和例 1、例 2 有些不同。这个依赖关系所描述的是电场中电场强度的分布, 还不能说描述的是直接的运动过程。但是电场中场强的分布, 决不能脱离开不断运动着的电场孤立地存在, 只不过在具体的研究中我们把它作为相对静止的, 而不去

考虑電場的运动。但即使是从相对静止的角度出发，我們要研究的仍然是各点的場强随着各点的位置的变化而变化的規律。

类似于上面的表明函数关系的实例在生产实践和生活实际中还可以举出很多很多。自然科学中的定律，許多都是用变量之間的函数关系描写出来的。当人們掌握了这些函数关系时，就大大有利于人們来改造自然界，为人类服务。而我們所要学的数学分析呢，正是深入細致地研究函数关系的基本理論。我們就是要通过一定的严格的基本訓練来掌握这套基本理論，使数学为我国的社会主义建設服务。

函数关系的概念是人們在生产斗争中长期地多方面地总结出来的；而在自然科学中由于实际需要而获得了严格的精确的定义。

定义(函数)。設有兩個变量 x 与 y 相互联系着。若变量 y 按照某种一定的規律随着变量 x 的变化而变化，对应于 x 的每一个值都有 y 的一个唯一确定的值，我們就說“ y 是 x 的一个函数，”并把 x 叫做自变量。若把 y 随 x 而变化的規律記作 f ，我們就把 x 的任何一个值 x_1 所对应的 y 的值 y_1 記作 $f(x_1)$ ，或

$$y_1 = f(x_1).$$

一般地我們記作

$$y = f(x).$$

下面我們再来对函数关系概念中所說的量与量之間的依賴关系作进一步的了解。这个依賴关系，是說一个量要随着其他一些量的变化而变化，不能說这些量的变化就是这个量发生变化的原因。而且，这个依賴关系还不是絕對的，它們可以互相轉化。比如例 2 的情况，如果电阻大小已經确定，在某种情况下，电压 V 是自变量电流 I 的函数 $V = RI$ ；但是，在另一种場合下，电流 I 表現为自变量电压 V 的函数 $I = \frac{R}{V}$ ，根据这两种函数关系，我們才造出了伏特計和安培計。

綜合上面所讲的，对函数关系應該有更进一步的了解是：函数关系描述的是在客觀的运动和变化的过程中量与量之間的确定的依賴关

系。这个确定的依赖关系本身就反映了客观的运动变化过程中量与量之间的变化规律。从例 3 还可以看到,有时函数所描述的,还可以是运动过程中的某个状态。这里应该注意,并不是所有的量与量之间的关系都能描述成函数关系。例如在社会现象和生命现象中,就有很多量与量之间的关系不能作为函数关系来考虑。

2. 反函数 自变量的相对性已如上述:在电阻 R 固定的条件下,变量 V 与 I ,在一种场合中 I 是自变量而 $V=IR$ 是 I 的函数;在另一种场合中 V 却是自变量而 $I=\frac{1}{R}V$ 是 V 的函数。我们称函数 $V=IR$ 和 $I=\frac{1}{R}V$ 互为“反函数”。一般地,如果从函数 $y=f(x)$ 得到反函数 $x=\varphi(y)$,显然从函数 $x=\varphi(y)$ 得到的反函数就是 $y=f(x)$,因而 $f(x)$ 和 $\varphi(y)$ 互为反函数。反函数是说函数关系是相反的,就是说把那个量 x 或 y 作为自变量,而把其他一个量 y 或 x 作为函数的依赖关系是相反的。至于对一个函数有没有必要求出它的反函数,那就要看实际问题的要求了。比如上面讨论的例 2 的情况就有必要,但在例 1 的情况一般就没有必要。

根据函数 $y=f(x)$,给定 y 的值来计算 x 的值。往往从一个 y 的值不只得出一个 x 的值,而是得出多个值,但是按照一定的条件和要求,使得计算出来的 x 的值被 y 的值唯一确定,这样就得到一个反函数,在条件和要求不同的情况下,就得到不同的反函数。这种函数称作“多值函数”。例如 $y=x^2$ 的反函数是 $x=+\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$ 。一般说来,多值函数事实上是由多个函数组成的。

在很多实际问题中,变量的个数往往不止两个,而有很多个。但其中有的变量是随着其他某些变量的变化而变化的。例如若干个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 y ,其中变量 y 是随着其他变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的变化而变化的,那末, y 就说是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个(多元)函数,而 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 叫做它的自变量。它们之间的函数关系可以表示成: