21 世纪高等院校教材

大学数学

（线性代数、概率论与数理统计）

姚天行　朱乃谦
孔　敏　滕利邦　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大 学 数 学

（线性代数、概率论与数理统计）

姚天行 朱乃谦
孔 敏 滕利邦 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本套书是经济管理类各专业使用的数学基础教材，共分两册. 另一册是《大学数学(微积分部分)》，本册包括线性代数、概率论与数理统计两部分，覆盖了全国经济管理类硕士生入学考试大纲全部内容. 本书叙述严谨，结构合理，深入浅出，富于启发.

本书适合经济管理类大学本科生、报考数学三与数学四硕士研究生的考生作为教材和教学参考书之用，也适合相关专业的数学教师与专业技术人员参考之用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(线性代数、概率论与数理统计)/姚天行等编. —北京：科学出版社，2004

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-013669-1

Ⅰ.大… Ⅱ.姚… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第063776号

责任编辑：杨 波 姚莉丽 / 责任校对：鲁 素

责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本：B5 (720×1000)

2004年8月第一次印刷 印张：15 1/2

印数：1—2 500 字数：294 000

定价：23.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

众所周知，数学在国民经济与企业管理中有着不可替代的重要作用．作为综合性大学经济管理类的本科生应该掌握哪些数学知识？应受到怎样的数学思维方法的训练？其深度又应该达到什么程度呢？一般认为，教育部近年来执行的“全国硕士研究生经济管理类入学考试大纲”（即数学三和数学四）是该专业学生学习数学的基本要求．随着经济建设的蓬勃发展和科学技术的不断进步，从事经济领域研究和教学的专家学者一致认为，为了使学生在高年级，特别是到研究生阶段能顺利地进入后继课程的学习，阅读相关文献资料，并从事经济理论的研究，还需要补充很多大纲以外的数学知识．

本教材是根据南京大学商学院各专业对数学的要求编写的．内容包括线性代数与概率统计两部分．本书连同《大学数学（微积分部分）》（科学出版社，2002 年）涵盖了全国硕士研究生经济管理类入学考试大纲的全部内容．此外本教材还增加了线性空间与线性变换、最小二乘法等内容．书中标有 * 号的章节供任课教师选讲，一般不作为考试内容．线性代数与概率统计教学时间（包括习题课在内）各约需 64 学时．

本教材在每一节后附有一定数量的习题．习题分为 A，B 两类，其中 A 类为基本题，要求学生都能掌握；B 类习题中有一部分是近几年研究生入学试题，这些习题富有新意，对学生掌握基本概念、基本方法，启发思维很有帮助．希望同学尽量选做．书后计算题附有答案，部分证明题附有解答提示，供学生参考．

本教材在编写中力求系统性和严密性，这是数学教学自身的特点所要求的．定理的证明尽量采用较为简便的方法，努力避免概念错误和疏漏．本书可作为综合性大学经济管理类及相关专业的教材或教学参考书．

我们在编写过程中得到南京大学教务处、商学院、数学系的大力支持和帮助，先后得到姜东平、陈仲先生的指教，程崇庆、王崇祜、黄震宇、沈忠洪、邓卫兵、黄卫华、李军、谢兆如、范红军、魏宝社、宋娇、张运清等教师使用过本教材，并提出很多宝贵的意见．在此一并表示衷心的感谢．

由于水平有限，本教材还有许多不当之处，恳切期望读者批评指正．

编　者

2004 年于南京大学

目　录

线性代数

概率论与数理统计

线 性 代 数

第一章　行列式、矩阵和线性方程组

第一节　行　列　式

§1.1.1　行列式的定义和性质

行列式是一个重要的数学工具，它在数学本身及其他许多学科中有广泛的应用．

设有 n^2 个实数排成下述形式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.1}$$

称之为 n **阶行列式**，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**元素**，它的两个下标中 i 代表该元素所在的行，j 代表所在的列．a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素，称 a_{ij} 为行列式 $|A|$ 的 (i,j) **元素**．例如 a_{12} 是位于第一行第二列的元素．

当 $n=1$ 时，定义 $|A|=a_{11}$．当 $n=2$ 时，定义二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

我们将以递推的形式给出一般 n 阶行列式的计算公式．为此先介绍所谓“余子式”与“代数余子式”的概念．

设 a_{ij} 为 n 阶行列式(1.1)的一个元素．将(1.1)中 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**．将余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 得到的式子称为 a_{ij} 的**代数余子式**，并记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

定义 1.1(行列式的值)　n 阶($n\geqslant 2$)行列式的值等于它的第一行元素分别与它们的代数余子式之积的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

(1.3)式称为行列式**关于第一行的展开式**. 由(1.3)式可知,我们可用一阶行列式定义二阶行列式,用二阶行列式定义三阶行列式,……,用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式.

例如,三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

再利用二阶行列式的展开式代入便得三阶行列式的**完全展开式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由 n 阶行列式的定义,经过逐次叠代,可得到 n 阶行列式的完全展开式. 容易看出以下两点:

(1) n 阶行列式的完全展开式有 $n!$ 项；

(2) 完全展开式每一项的形式为 $\pm a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，它是取自 $|A|$ 的不同行不同列的 n 个元素的乘积再添上适当的符号，这个符号仅与 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的排列有关.

由(2)可知，若行列式的某一行(或某一列)的元素全为 0，由于它的完全展开式的每一项都包含这一行(或列)的元素作为因子，所以该行列式的值等于 0.

例 1　按行列式的递推定义，有

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

上式右端第一个行列式中第一行全为 0，故等于 0. 将第二个行列式继续降阶，得

$$|A| = (-2)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16. \qquad \square$$

行列式(1.1)中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**对角元素**，对角元素所在的位置称为**主对角线**. 若主对角线上方(或下方)的元素全为 0，则称之为**下(上)三角行列式**.

例 2　计算下述下三角行列式的值：

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式的递推定义，有

$$d = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad \square$$

利用行列式的定义计算行列式的值，只在阶数不太高或对某些特殊行列式才有效. 对一般的行列式，用定义计算的工作量是很大的. 例如一个 6 阶行列式完全展开后就有 $6!=720$ 项. 因此需要寻找计算行列式的简便方法. 我们先来讨论行列式的性质.

性质 1　行列式转置后，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

所谓转置,是把行列式中除了对角元素外,每一对形如 a_{ij} 与 a_{ji} 的元素互换位置. 这时原来的第 i 行就变成转置行列式中的第 i 列.

这一性质告诉我们,行列式的"行"与"列"有对偶性,即一般的 n 阶行列式对于"行"所具备的性质,对于"列"也是正确的.

性质 2　对调行列式中两行(或两列)的位置,行列式的值只改变符号.

例如,对调第 i 行与第 j 行的对应元素,其余元素不变,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上述两条性质对于二阶与三阶行列式可直接验证,对于高阶行列式则可用归纳法证之. 为节省篇幅,故从略.

性质 3　行列式中的某一行(或列)的公共因子,可以提到行列式号外. 换句话说,若将行列式的某一行(或列)的元素均扩大到 λ 倍,则行列式的值扩大到 λ 倍.

例如,若将行列式第 i 行的元素均乘以常数 λ,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

证　由性质 1,只需对"行"给出证明就可以了. 为证(1.4)式成立,将左右两端行列式中的第一行与第 i 行对调,由性质 2 知,他们只改变符号. 于是我们只要对 $i=1$ 的情形证明就可以了. 由行列式的定义有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \lambda a_{11}A_{11} + \lambda a_{12}A_{12} + \cdots + \lambda a_{1n}A_{1n} \\ &= \lambda(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这就是所要证明的.　□

性质 4　只有某一行(或列)不同的两个行列式相加,等于将这两个行列式该行(或列)的对应元素相加,而其他元素不变所得的行列式的值．例如,我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 的证明与性质 3 相似,由读者自证之．

性质 5　若某行列式的两行(或两列)的元素对应成比例,则此行列式等于 0.

证　例如设第 i 行与第 j 行元素成比例,不妨设

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \frac{a_{i2}}{a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{in}}{a_{jn}} = \lambda,$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上式右端行列式中第 i 行与第 j 行对应元素相同,设其值为 d. 对调该行列式第 i 行与第 j 行位置后仍为 d. 但由性质 2 该行列式改号,得 $d=-d$,于是 $d=0$.　□

由性质 5 可知,若行列式两行或两列相同,则该行列式等于 0.

性质 6　把行列式某一行(或列)的元素均乘以常数 λ 再加到另一行(或列)的对应元素上,其值不变．

例如,将第 i 行的元素乘以 λ 后加到第 j 行上,则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & a_{j2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　只须对“行”证明就可以了．由性质 4 与性质 5,上式左端等于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用上述性质可以简化行列式的计算．　□

例 3　证明上三角行列式的值等于对角元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

证　上三角行列式的转置行列式为下三角行列式．由行列式的性质 1 及例 2 即得所证之结论．　□

例 4　设 n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行第 $n-i+1$ 列的元素为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，其余元素均为 0，求 $|A|$ 的值．

解　将第一列与第 n 列对调，第 2 列与第 $n-1$ 列对调，第 3 列与第 $n-2$ 列对调，……，最终将变为 $\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n.$

因每对调不同两列元素位置，行列式只改变符号，余下只要计算对调次数的奇偶性就可以了．显然当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，需对调 $2k$ 次；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，需对调 $2k+1$ 次．换言之，它的奇偶性与 $\frac{n}{2}(n-1)$ 相同，于是

$$|A| = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}a_1a_2\cdots a_n.$$　□

例 5　计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

我们将利用行列式的性质把这个行列式变成下三角行列式，这时它的值就等于对角元素的乘积．

为叙述方便，本书中引用下列记号，这些记号不仅用于行列式，也用于下一节所提到的矩阵：

(1) 以 L_i 表示第 i 行，C_j 表示第 j 列；

(2) kL_i 表示以 k 乘第 i 行，kC_j 表示以 k 乘第 j 列；

(3) L_i+kL_j(或 C_i+kC_j)表示把第 i 行(或列)的全体元素改为他们与第 j 行(或列)相应元素的 k 倍所得的和(即将第 j 行(或列)乘以 k 后加到第 i 行上)；

(4) $L_i\leftrightarrow L_j(C_i\leftrightarrow C_j)$表示对调第 i 行(列)与第 j 行(列)的位置．

现在用这些记号来说明行列式 $|A|$ 变形的过程．

$$|A|\xlongequal[C_2\leftrightarrow C_3]{C_4-C_1}\begin{vmatrix}3&0&0&0\\-4&1&2&7\\1&-3&2&3\\2&-2&0&1\end{vmatrix}\xlongequal[C_4-7C_2]{C_3-2C_2}\begin{vmatrix}3&0&0&0\\-4&1&0&0\\1&-3&8&24\\2&-2&4&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_4-3C_3}\begin{vmatrix}3&0&0&0\\-4&1&0&0\\1&-3&8&0\\2&-2&4&3\end{vmatrix}=-3\cdot1\cdot8\cdot3=-72.\qquad\square$$

例 6　计算 n 阶行列式

$$d_n=\begin{vmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}_n.$$

解　式中下标 n 表示行列式的阶数．该行列式中对角元素均为 a，其余元素均为 1.

$$d_n\xlongequal{L_1+\sum\limits_{i=2}^{n}L_i}\begin{vmatrix}a+n-1&a+n-1&\cdots&a+n-1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal{\frac{L_1}{a+n-1}}(a+n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\\L_n-L_1}]{\substack{L_2-L_1\\L_3-L_1}}(a+n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a-1\end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}. \qquad \square$$

例 7　求证

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ a_1+b_1 & c_1+d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}.$$

证　记等式左端行列式为 d，对它的第一列利用性质 4，得

$$d = \begin{vmatrix} a & c+d \\ a_1 & c_1+d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c+d \\ b_1 & c_1+d_1 \end{vmatrix}.$$

再分别对第二列利用性质 4，即得

$$d = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

§1.1.2　克拉默法则

行列式不仅可以依(1.3)式按第一行展开，还可按任一行或任一列展开．我们有下面的定理.

定理 1.1　由(1.1)式给出的 n 阶行列式 $|A|$，按第 i 行与第 j 列的展开式分别为

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.5}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1,2,\cdots,n), \tag{1.6}$$

这里 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式．

证　当 $i=1$ 时，(1.5)式就是(1.3)式．当 $1<i\leqslant n$ 时，将 $|A|$ 中第 i 行与第 $i-1$ 行对调，再将新得到行列式的第 $i-1$ 行(即原行列式中的第 i 行)与 $i-2$ 行对调，……，这样对调 $i-1$ 次后，原行列式的第 i 行便调到第一行，由行列式性质 2 得到

$$|A| = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

将上式右端行列式按第一行展开，注意到这个行列式第一行的元素 a_{ij} 的余子式恰为原行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的余子式．a_{ij} 是新行列式的 $(1,j)$ 元素，是原行列式的 (i,j) 元素．再由代数余子式的定义知这两个代数余子式相差符号因子 $(-1)^{i-1}$，恰与上式中的符号因子 $(-1)^{i-1}$ 抵消，于是(1.5)式成立．为证(1.6)式，取 $|A|$ 的转置行列式．由行列式性质 1，转置行列式与原行列式的值相等，即知(1.6)成立．

定理 1.2　行列式中某一行(或某一列)的各元素与另一行(或另一列)的对应元素的代数余子式乘积的总和等于 0.

若行列式$|A|$由(1.1)式给出,则当 $i\neq j$ 时有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, \tag{1.7}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0. \tag{1.8}$$

证　将行列式$|A|$的第 j 行的 n 个元素依次换为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$. 则新得到的行列式第 i 行与第 j 行相同,故等于 0. 将这个行列式按第 j 行展开,就得到(1.7)式.

(1.8)式类似可证. □

例 1　定义 $n(n\geqslant 2)$阶范德蒙德(VanderMonde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

求证 $V_n=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$,为所有下标符号 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 的因子(a_j-a_i)的乘积.

***证**　对 n 用归纳法证之. 当 $n=2$ 时,

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1,$$

结论成立. 设结论对 V_{n-1}成立.

将 V_n 从最后一行起每行逐次减去上一行的 a_1 倍, 得到

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & \cdots & a_n^2-a_1a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

按第一列展开后,得到一个 $n-1$ 阶行列式,它的第 i 列有公因子 $a_{i+1}-a_1(i=1,2,\cdots,n-1)$,提出后由归纳假设得

$$V_n=(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

由归纳原理知结论对任意大于 1 的自然数成立． □

定理 1.3　设 $|A|$ 和 $|B|$ 分别为 m 和 n 阶的行列式，则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\ |B|, \tag{1.9}$$

上式第一个是 $m+n$ 阶的行列式，其中 $*$ 位置为 n 行 m 列的任意 $m\times n$ 个元素；第二个也是 $m+n$ 阶行列式，其中 $*$ 为 m 行 n 列的任意 $m\times n$ 个元素．0 表示该处元素均为 0.

我们将在 § 1.2.5 中给出该定理的证明．

例 2　计算行列式

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　将第四列依次与第三、第二、第一列对调，再将新得到的行列式的第五列依次与第四、第三、第二列对调，共对调了 6 次，行列式符号改变 6 次，故

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-6+8) = 6.$$

□

下面我们来介绍行列式在解线性方程组中的应用．设有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.10}$$

其中 a_{ij} 与 $b_j(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 为常数．用 $|A|$ 表示该方程组的**系数行列式**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们有下述定理.