

本书为高中三年级数学课本的
配套练习。

供教师和学生在学习过程中使用，
也可作青年工人自学数学的参考书。

北京四中数学组 编

高中数学单元

练习₃



北京师范大学出版社

高中数学单元练习

第三册

北京四中数学组 编

北京师范大学出版社

高中数学单元练习

第三册

北京四中数学组 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：5.5 字数：115千

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

印数：1—100,500

统一书号：7243·332 定价：0.80元

出版说明

本书自出版以来，深受广大读者欢迎。同时，读者也提出一些宝贵的修改意见。为了使本书更好地为广大读者服务，提高学习效果，我们请作者做了修订。

这次修订保持了初版时的特点：每章配有精选的例题，借以重点演示，加强分析，给读者以启迪。练习题和单元练习题均以加强基本概念、基本技能与技巧为主，而不是搞怪、偏题。同时，这次修订又严格按照课本顺序编排，按年级分为三册，以有利于读者使用。

本书是中学数学教师和学生的较好参考书。本册内容包括排列、组合、二项式定理，概率和微积分初步以及高中数学总复习题，供高中三年级上、下两学期使用。

目 录

第一章 排列 组合和二项式定理

一、排列和组合..... (1)	二、二项式定理..... (10)
练习一 (5)	练习三 (22)
练习二 (10)	单元练习一..... (23)

第二章 概 率

练习一 (28)	练习三 (36)
练习二 (31)	单元练习二..... (37)

第三章 微积分初步

一、极限和连续..... (39)	四、不定积分..... (67)
练习一 (51)	练习四 (76)
二、导数和微分..... (53)	五、定积分及其应用
练习二 (56)	 (77)
三、导数的应用..... (58)	练习五 (79)
练习三 (66)	单元练习三..... (80)

高中数学总复习练习题

练习一——数与式..... (82)	练习三——函数..... (85)
练习二——方程与方	练习四——不等式..... (87)
程组..... (84)	练习五——排列 组合

二项式定理.....	(89)	练习九——解析几何(二)	
练习六——数列 数学			(96)
归纳法 极限.....	(90)	练习十——立体几何...	(98)
练习七——三角函数...	(91)	单元练习四.....	(99)
练习八——解析几何(一)		单元练习五.....	(103)
.....	(94)	单元练习六.....	(106)

答案或提示

第一章.....	(110)	高中数学总复习	
第二章.....	(111)	练习题.....	(117)
第三章.....	(112)		

第一章 排列 组合和二项式定理

一、排列和组合

1.1 基本原理

1.2 排列

例1 2、3、5、7四个数字，任取两个组成分数，可组成多少个分数？并写出这些分数。

解： 2、3、5、7

分子	分母

$$4 \times 3 = 12$$

可组成12个分数，它们是

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{7}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{5}.$$

注：解题格式对初学排列的同学，是十分必要的，排列的意义可看成是：有 n 个元素，又有 $m(m \leq n)$ 个位置，从这 n 个元素中任取 m 个元素有序地在这 m 个位置上“入座”。写出所有排列，应进行适当地练习，这对于同学正确理解排列和排列数的概念，提高分析排列问题的能力是十分重要的。

例2 (1) 10本不同的书，借给3名同学，每人一本，共有多少种借法？

(2) 3 本不同的书, 有 10 名同学借, 限定每人最多借一本, 而且书要全部借出, 有多少种借法?

注: 在具体题目中, 元素是什么, ‘位置’又是什么, 是需要具体分析的。

1.3 排列数公式

例 1 计算 P_{n+2}^{n+2} 及 $\frac{(2n)!}{2n!}$ 。

例 2 证明 $P_n^m = P_n^1 P_{n-1}^{m-1} = P_n^k P_{n-k}^{m-k}$ ($k < m \leq n$)。

注: 此两例是为了使学生进一步理解排列数公式的特点。

例 3 解方程 $P_{\frac{1}{2}x+1}^4 = 140P_x^3$ 。

注: 不少同学是这样做的:

$$\begin{aligned} (2x+1)(2x)(2x-1)(2x-2) \\ = 140x(x-1)(x-2) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{整理得} \quad (2x+1)(2x-1) = 35(x-2) \quad (2)$$

$$4x^2 - 35x + 69 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x = \frac{23}{2} \text{ (舍)} \quad \therefore x = 3.$$

这种解法在方程理论上是错误的, 至少是不严谨的。应在解题过程中指出, 由排列数定义可知:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 4 \\ x \geq 3 \\ x \in N \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x \geq 3 \\ x \in N. \end{cases}$$

例 4 1、2、3 三个数字, 可以组成多少个没有重复数字的自然数?

解：元素 1、2、3，

位置

--

--	--

--	--	--

$$P_1^1 + P_2^2 + P_3^3 = 15.$$

答：一共可以组成15个自然数。

例5 用0到9这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

分析：共10个元素、3个位置。其中0不能在百位上，0是特殊元素，百位是特殊位置。

解法1：从特殊位置（百位）入手，

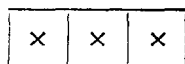
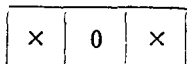
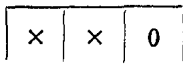
0、1、2、…、9，



$$9 \times P_2^2 = 648.$$

解法2：从特殊元素入手，

0、1、2、……、9，



$$P_2^2 + P_2^2 + P_2^2 = 648.$$

解法3：间接法 $P_{10}^3 - P_1^3 = 648.$

解法4：从0到9这十个数字中任取三个数字的排列数为 P_{10}^3 ，百位数为0，1，2，…，9的排列数相同，所以三位数的个数应为 $\frac{9}{10} P_{10}^3 = 648.$

答：可以组成648个没有重复数字的三位数。

注：（1）在有特殊元素或特殊位置的排列问题中，从特殊元素或从特殊位置入手，解决起来比较容易。

(2) 正确的格式是正确思维的反映, 它又帮助我们正确地分析解决问题。

(3) 例4、例5都是数字和数的问题, 同时又是大量实际问题抽象出来的数学模型。例4实际上是统编教材P126例2的数学模型, 由此还可编出很多不少实际问题, 例如: 一分、二分、五分硬币各一枚, 一共可以组成多少种不同的币值? 同样由例5也可以编出一些实际问题, 例如: 10名同学选3人排队, 其中甲不能在排头, 有多少种排法? 这一点在教和学中一定要给予充分的重视。若能让学生做一些由实际问题抽象出数学模型、由数学模型编几个实际问题的练习是很有益处的。

例6 用0到9这十个数字, 可以组成多少个没有重复数字的三位偶数?

分析: 由于0不能在百位, 末位应是0、2、4、6、8, 所以共有两个特殊位置, 5个特殊元素, 其中0又是双重特殊元素。

解: 略, 共有328个没有重复数字的三位偶数。

注: 此题可让学生讨论, 共有多少种解法? 每种解法是如何考虑的? 哪种解法比较简单? 根据这个数学模型, 能不能编一个实际问题?

例7 回答下面的问题:

(1) 八个人排成一列, 问可以有多少种不同的排法?

答: $8!$ 种

(2) 八个人排成二排, 每排四个人, 可以有多少种排法?

答: $8!$ 种或 $P_4^4 \cdot P_4^4 = 8!$

(3) 这八个人中,若是4男4女,坐在一排八个椅子上,要男女相间而坐,问可有多少种坐法? 答: $2(P_4^1)^2$.

(4) 八个人排成一排,若是某人A,一定要排在最左侧,问可有多少种排法? 答: $7!$ 或 $8! - 7 \times 7!$

(5) 仿照(4),某人A一定要站在两侧,问有多少种不同的排法? 答: $2 \times 7!$ 或 $8! - 6 \times 7!$

(6) 八人排成一排,某两人一定要相邻,问可有多少种不同的排法? 答: $2 \times 7!$

(7) 八个人排成一排,其中某人A一定要站在左侧,而另一人B一定要站在右侧,问可有多少种不同排法? 答: $6!$ 或 $7! - 66!$

练 习 一

1. 求 x , 已知: $P_x^5 + P_x^3 = 43P_x^1$.

2. 计算 $\frac{(k+1)!}{k!} - \frac{(k+2)!}{(k-1)!}$.

3. 张、王、李等七个人站成一排。

(1) 如果张、王、李三人必须相邻,有多少种不同的排法?

(2) 如果张、王、李三人中任何两人不许相邻,有多少种排法?

4. 用0、1、2、3、4、5、6七个数字,可以组成多少个没有重复数字的四位数? 其中偶数必在偶位上的四位数有多少个? 偶位上是偶数的四位数有多少个? 大于1200的四位数有多少个?

1.4 组合

例: 2、3、5、7四个数字,任取两个组成真分

数，共有多少个？并写出这些真分数。

注：通过书上的例题及此例，与排列概念中相应的例题加以比较，分析其相同点与不同点，这样有助于学生领会组合概念的真实含义以及组合与排列的区别和联系。

例2 写出从 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 这六个元素中每次取二个元素的所有排列和组合。

1.5 组合数公式

1.6 组合数的两个性质

例1 求证： m 个连续自然数的积一定能被 $m!$ 整除。

例2 已知： $3C_n^4 = 5C_{n-1}^6$ ，求 n 。

例3 若 $C_x^3 = 120$ ，求 P_x^3 。

解： $P_x^3 = C_x^3 \times P_3^3 = 720$ 。

注：上三例主要目的在于让学生理解组合数、组合数公式和性质以及组合数与排列数的联系。

例4 若平面上有12个点，其中除4个点共线外，再无任意三个点共线。求：

(1) 通过这些点可以确定多少条直线？

(2) 以其中一点为端点，并通过外一点的射线有多少条？

分析：有4个特殊点、8个非特殊点，从特殊点入手解决。先解第(1)问：

解法1： $C_4^1 \times C_8^1 + 1 + C_8^2 = 61$ 。

解法2： $C_{12}^2 - C_4^2 + 1 = 61$ 。

解法3： $4C_8^2 - 3C_4^2 + 1 = 61$ 。

对于第2问，解法如下：

$$2C_1^1 \cdot C_3^1 + 2(4-1) + P_3^1 = 126.$$

答：可确定61条直线，126条射线。

例 5 44名学生中，有正、副班长各一名，现在从这些学生中，选出五名学生代表，问满足下列条件的不同选法各有多少种？

(1) 任意 5 人；(2) 正、副班长都在内；(3) 正、副班长均不在内；(4) 正、副班长只有一人在内；(5) 正、副班长至少有一人在内；(6) 正班长必须在内；(7) 正、副班长不能同时在内。

注：本例题除了强调特殊元素外，主要是弄清各种问法的含义及其联系。设

$I = \{\text{任意 5 个人}\},$

$A = \{\text{正在内、副不在内的 5 人}\},$

$B = \{\text{副在内、正不在内的 5 人}\},$

$C = \{\text{正、副都在内的 5 人}\},$

$D = \{\text{正、副都不在内的 5 人}\},$

那么， $I = A \cup B \cup C \cup D$ ；还要搞清下列集合之间的关系。

$A \cup B$ 与{正、副班长只有一人在内的 5 人}；

$A \cup C$ 与{正班长必须在内的 5 人}；

$A \cup B \cup C$ 与{正、副班长至少有一人在内的 5 人}。

搞清这些关系后，计算每种情况的方法就很多，同学们也容易灵活地解决问题。这里这可以让同学编一些题，例如用 $A \cup D$ 、 $A \cup B \cup D$ 编题。值得注意的是，学生常常错误地把正、副班长均在内的否定面理解为正、副班长都不在内，在此可让学生从 $\bar{C}$ 来正确理解。

例 6 有划船运动员 10 人，其中三人只会划右舷，二人

只会划左舷，其余五人会划右舷也会划左舷，现在要从这十人当中选出6人，平均分配在船的两舷划桨，有多少种选法？

分析：共有10个元素，其中特殊元素是：只会划左舷的2人，只会划右舷的3人。

解法1：从选择只会划左舷的2人开始入手：

(1) 二人都在内，则有 $C_2^2 C_8^4 = 175$ 种；

(2) 二人中有一个人在内，则有 $C_2^1 C_8^5 = 400$ 种；

(3) 二人都不在内，则有 $C_2^0 C_8^6 = 100$ 种。

$$\therefore \text{共有 } C_2^2 C_8^4 + C_2^1 C_8^5 + C_2^0 C_8^6 \\ = 175 + 400 + 100 = 675 \text{ 种。}$$

解法2：从选择只会划右舷的3人入手：

(1) 三人都在内，则有 $C_3^3 C_7^3 = 35$ 种；

(2) 三人中有二人在内，则有 $C_3^2 C_7^4 = 300$ 种；

(3) 三人中只有一个人在内，则有 $C_3^1 C_7^5 = 300$ 种；

(4) 三人都不在内，则有 $C_3^0 C_7^6 = 40$ 种。

$$\therefore \text{共有 } C_3^3 C_7^3 + C_3^2 C_7^4 + C_3^1 C_7^5 + C_3^0 C_7^6 \\ = 35 + 300 + 300 + 40 = 675 \text{ 种。}$$

解法3：从选择左右舷都会划的5人入手：

(1) 五人中有一人在左，则有 $C_5^1 C_5^5 = 175$ 种；

(2) 五人中有两人在左，则有 $C_5^2 C_3^4 = 400$ 种；

(3) 五人中有三人在左，则有 $C_5^3 C_2^3 = 100$ 种。

$$\therefore \text{共有 } C_5^1 C_5^5 + C_5^2 C_3^4 + C_5^3 C_2^3 \\ = 175 + 400 + 100 = 675 \text{ 种。}$$

注：通过本题使学生知道，在具有特殊元素和位置的问题中，特别是有不同类的特殊元素的问题中，从特殊元素较

少的一类入手，就会简捷地做出。同时也让同学掌握分类的方法，做到无重复、无遗漏。

例 7 5 名男生，4 名女生，选 4 人排队，分别满足下列条件的排队，各有多少种排法？

(1) 2 名男生、2 名女生； (2) 至少有 2 名女生； (3) 男生甲必须参加。

解：(1) 先选元素后排队： $C_5^2 C_4^2 P_4^4 = 1440$ ；

先定位置后选元素： $C_4^1 P_5^2 C_3^2 P_2^2 = 1440$ 。

(2) 思路同 (1)；

$$C_5^2 C_4^2 P_4^4 + C_5^3 C_3^1 P_4^4 + C_4^4 P_4^4 = 1944,$$

$$C_5^2 P_4^2 P_2^2 + C_5^3 P_3^1 P_2^2 + C_4^4 P_4^4 = 1944.$$

(3) $C_5^3 P_4^1 = 1344$ ； $C_4^1 P_1^1 C_3^2 P_2^2 = C_4^1 P_3^3 = 1344$ 。

注：这是一道排列和组合的综合题，主要说明在分析问题时可先选元素后排位置，也可先排位置后选元素。在(2)中，同学易做成 $C_5^2 C_4^2 P_4^4$ ，这是错误的，在选人有重复。

例 8 6 名同学，分别满足下列条件，各有多少种分派法：

(1) 分成三组，一组 1 人，一组 2 人，一组 3 人；

(2) 3 人挖坑，2 人栽树，1 人浇水；

(3) (1) 中三个组分配做三件不同的工作；

(4) 平均分成三组；

(5) 平均分成三组，一组挖坑，一组栽树，一组浇水。

解：(1) $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ ； (2) $C_6^1 C_5^2 C_3^1 = 60$ ；

(3) $C_6^1 C_5^2 C_3^3 P_3^3 = 360$ ； (4) $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{P_3^3} = 15$ ；

$$(5) \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{P_3^3} \times P_3^3 = 90.$$

注：第（4）、（5）小题属于分堆问题，可选用。最好根据题意写一写，帮助理解。

练习二

1. 求 x ，已知 $\frac{1}{C_6^x} - \frac{1}{C_6^x} = \frac{7}{10C_7^x}$ 。
2. 有 n 件产品，其中 m 件次品。现从 n 件产品中任取 k 件产品，恰有 l 件次品的取法有多少种？（ $0 \leq l \leq m < n$, $0 \leq l \leq k \leq n$ ）
3. 已知直线 l 与直线 m 平行，在 l 上选择 M 个点，在 m 上选择 N 个点，问通过这些点可以作多少个三角形？
4. 十二名篮球运动员，五名只能打前锋，四名只能打后卫，三名可以打任何位置，现在从这十二名当中选择五人，（三名前锋、二名后卫）上场比赛，问可以有多少种选法？
5. 6名男乒乓球运动员，5名女乒乓球运动员，现在要在这十一人中挑出两男两女，进行混合双打，问可以有多少种不同的组织方法？

二、二项式定理

1.7 二项式定理

例1 求 $(1-x)^{13}$ 的奇次项系数的和。

解：关于 x 的奇次项在展开式中就是第2，4，6，…，14项，故其系数和就是

$$\begin{aligned}
 & -C_{13}^3 - C_{13}^4 - C_{13}^5 - \cdots - C_{13}^{13} \\
 & = -(C_{13}^1 + C_{13}^2 + C_{13}^3 + \cdots + C_{13}^{13}) = -2^{12}.
 \end{aligned}$$

例 2 计算 0.998^{20} 的近似值 (精确到 0.001)。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } (0.998)^{20} &= (1 - 0.002)^{20} \\
 &= 1 - C_{20}^1(0.002) + C_{20}^2(0.002)^2 \\
 &\quad - C_{20}^3(0.002)^3 + \cdots \\
 &= 1 - 20(0.002) + 190(0.002)^2 \\
 &\quad - 1140(0.002)^3 + \cdots \\
 &= 1 - 0.04 + 0.00076 - \cdots \\
 &= 0.960 \text{ (不足近似值)}.
 \end{aligned}$$

或 $(0.998)^{20} = 0.961$ (过剩近似值)。

注: 这种求近似值的问题, 一般来说, 根据精度要求求出不足近似值就可以了。因此, 就本题而言, 第三项和后面的项都可以略去。

例 3 求 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中含 x^3 的项。

$$\text{解: } \because T_{r+1} = (-1)^r C_9^r x^{9-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_9^r x^{9-2r},$$

依题令 $9 - 2r = 3$, 得 $r = 3$ 。

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{含 } x^3 \text{ 的项 } T_4 &= T_{3+1} = (-1)^3 C_9^3 x^3 \\
 &= -84x^3.
 \end{aligned}$$

注: 求一般项的问题, 最终归结为解一个以 r 为“元”的代数方程。必须指出, 要使问题有意义, 当且仅当 r 取非负整数时。

例 4 证明 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ 的展式的常数项是