

全国各类成人高等学校招生考试
应试指导及模拟试题丛书

高中起点升本、专科

数 学

(文史类)

侯庆文 张永英 主编



清华大学出版社

教育部审定 人民教育出版社出版
初中数学课程 必修课程

初中数学课程 必修课程

数 学

(五 五 五)

2000 2000 2000

全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书

高中起点升本、专科

数学（文史类）

侯庆文 张永英 主编

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书严格遵循教育部最新颁布的 2003 年起实行的考试大纲编写。书中集考纲要求、知识精讲、典型题解析、同步训练及参考答案于一体,覆盖了大纲规定的全部考试内容,重点突出,叙述准确,讲解细致,具有很强的针对性、实用性,能够满足高中起点升本、专科(文史类)的考生使用,也可供高等职业技术学院的报考考生参考。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

数学. 文史类/侯庆文, 张永英主编. —北京: 清华大学出版社, 2003
(全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书) 高中起点升本、专科
ISBN 7-302-06730-9

I. 数… II. ①侯… ②张… III. 数学—成人教育: 高等教育—入学考试—自学参考资料
IV. G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 045579 号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客户服务: 010-62776969

责任编辑: 苗建强

封面设计: 秦 铭

版式设计: 全昌林

印 刷 者: 中国科学院印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×260 印 张: 18.75 字 数: 429 千字

版 次: 2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06730-9/O · 303

印 数: 1~5000

价: 23.00 元

丛书编委会

主 编 王俊峰

编 委	刘翠霄	张燕玲	龙翼飞	郭法琦
	刘 红	李立国	徐志宏	王海英
	李 广	严艳萍	徐美菊	王海玲
	陈春洁	郑宁华	李新黔	侯庆文
	张永英			

前 言

成人高等学历教育是我国成人教育的重要组成部分。每年都有数以百万计的考生报考各类成人高校，这直接反映着时代和社会对人才的紧迫需求，密切关系到社会主义现代化建设事业的发展进程。

为了帮助参加全国各类成人高等学校招生考试的广大考生顺利通过考试，我们特组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授，根据教育部最新颁布的 2003 年起实行的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》和《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》编写了复习考试系列配套教材——《全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书》。本套丛书共 17 册，包括两大系列：专科起点升本科系列和高中起点升本、专科系列。

其中，专科起点升本科系列 9 册，包括：

- 《专科起点升本科——大学语文》
- 《专科起点升本科——高等数学（一）》
- 《专科起点升本科——高等数学（二）》
- 《专科起点升本科——艺术概论》
- 《专科起点升本科——教育理论》
- 《专科起点升本科——英语》
- 《专科起点升本科——民法》
- 《专科起点升本科——政治》
- 《专科起点升本科——医学综合》

高中起点升本、专科系列 8 册，包括：

- 《高中起点升本、专科——语文》
- 《高中起点升本、专科——英语》
- 《高中起点升本、专科——数学（理工类）》
- 《高中起点升本、专科——数学（文史类）》
- 《高中起点升本、专科——物理化学综合科》（第一分册）
- 《高中起点升本、专科——物理化学综合科》（第二分册）
- 《高中起点升本、专科——历史地理综合科》（第一分册）
- 《高中起点升本、专科——历史地理综合科》（第二分册）

本套丛书对大纲公布的测试内容逐一进行了分析、讲解和演练，突出新、全、真、快的特点，对考生复习具有很强的针对性指导作用。

新:严格按照2003年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写,紧扣大纲;
全:既注重知识的全面性和系统性,又突出重点、难点;
真:由成人高考复习辅导名家亲笔编写。题型、题量及难易程度贴近最新考试试题;
快:针对性强,切题率高,短期复习见效特别快。

根据《复习考试大纲》的要求、命题难易比例和考试题型比例,本套书设计了“考纲要求”、“知识精讲”、“典型题解析”、“重点、难点、疑点提示”和“同步训练及参考答案”五部分内容。

考纲要求——对最新考试大纲中所列的知识点和要求进行详细的阐述,起到对大纲内容的延伸和细化作用。

知识精讲——包括考试大纲所考核的全部内容的基本知识点,让考生对基本内容有更多的了解和把握。

典型题解析——列举出一些题型的典型题目,并给出此种题型的一般解题思路,使考生在做同类题时能够触类旁通。

重点、难点、疑点提示——指出本章的重点、难点、疑点,帮助考生对基本内容的进一步理解和掌握。

同步训练及参考答案——为了让考生了解和掌握各章节的内容,每章都以强化练习题的方式覆盖所有考纲考点,以利于考生的复习和备考,体现了最新考试题型,并对试卷命题的特点和趋势有宏观的把握。

为了向考生提供实战演练的机会,本套书最后还附有多套模拟试题。模拟试题全部按照新大纲的试卷结构和题型要求进行编写,供考生检测自己的整体应试水平。

本书为高中起点升本、专科《数学(文史类)》分册,由侯庆文、张永英编写。编者在高校长期从事数学教育和研究,具有丰富的成人考试辅导经验。参与本书编写的人员还有师薇薇、陈晓竹、张刚、王强和葛新。

限于作者水平,加上时间仓促,书中疏漏之处欢迎同行和读者批评指正。

最后,预祝所有考生成功通过考试!

目 录

第一部分 代数	1
第一章 函数	1
第二章 不等式和不等式组	19
第三章 指数与对数	47
第四章 数列	58
第五章 复数	79
第六章 导数	92
第二部分 三角	107
第七章 三角函数及有关概念	107
第八章 三角函数的变换	122
第九章 三角函数的图像和性质	138
第十章 解三角形	157
第三部分 平面解析几何	167
第十一章 直线	167
第十二章 圆锥曲线	186
第四部分 概率与统计初步	241
第十三章 排列、组合	241
第十四章 概率与统计初步	258
附录	271
1998 年全国各类成人高考高中起点(升本、专科)统一考试	271
1999 年全国各类成人高考高中起点(升本、专科)统一考试	275
2000 年全国各类成人高考高中起点(升本、专科)统一考试	279
2001 年全国各类成人高考高中起点(升本、专科)统一考试	283
2002 年全国各类成人高考高中起点(升本、专科)统一考试	287

第一部分 代 数

第一章 函 数

【考纲要求】

1. 了解集合意义及其表示方法,了解空集、全集、子集、交集、并集的概念及表示方法,了解符号 $\subseteq$ 、 $\supseteq$ 、 $=$ 、 $\in$ 、 $\notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.
2. 理解函数的概念,会求一些常见函数的定义域.
3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,掌握单调增函数、单调减函数及奇函数、偶函数的图像特征.
4. 理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图像和性质,会求它们的解析式.
5. 理解二次函数的概念,掌握它的图像和性质以及函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像间的关系;会求二次函数的解析式及最大值或最小值.能灵活运用二次函数的知识解决有关问题.
6. 了解反函数的意义,会求一些简单函数的反函数.
7. 理解指数函数、对数函数的概念,掌握有关的运算法则.
8. 理解指数函数、对数函数的概念,掌握它们的图像和性质,会用它们解决有关问题.

【知识精讲】

一、集合

(一)集合的概念

1. 集合的意义

集合是数学中最基本的概念之一,我们只给予一种描述,即把按某种属性确定的一些对象看成一个整体,就形成了一个集合,组成集合的每一个对象叫做这个集合的元素.

集合一般用大写字母 A 、 B 、 M 、 N 等表示.

元素一般用小写字母 a 、 b 、 c 、 d 等表示.

2. 元素与集合的关系

$a \in A$,表示元素 a 是集合 A 中的元素;读作“ a 属于 A ”.

$b \notin A$,表示元素 b 不是集合 A 中的元素;读作“ b 不属于 A ”.

3. 集合的分类

(1)有限集:含有有限个元素的集合.

(2)无限集:含有无限个元素的集合.

(3)单元素集:只含有一个元素的集合.

(4)空集:不含任何元素的集合,记作 $\emptyset$.

4. 常见数集

(1)自然数集:用字母 N 表示.

注意 根据国家标准,自然数集包括“0”,请不要继续沿用自然数集不包括“0”的说法.

(2)整数集:用字母 Z 表示.

(3)有理数集:用字母 Q 表示,正有理数集记作 Q^+ ,负有理数集记作 Q^- .

(4)实数集:用字母 R 表示,全体正实数组成的集合记作 R^+ ,全体负实数组成的集合记作 R^- .

(5)复数集:用字母 C 表示.

(二)集合的表示法

1. 列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

2. 描述法:把集合中元素的共同属性用语言或表达式描述出来,写在大括号内表示集合的方法.

3. 图示法.

(三)集合与集合的关系

1. 子集

如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,那么集合 A 叫集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$,读作“ A 包含于 B ”,若集合 A 是集合 B 的子集,且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A ,那么集合 A 就叫做集合 B 的真子集,记作“ $A \subsetneq B$ ”.如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.

规定空集是任意集合的子集,空集是任意非空集合的真子集.

2. 交集

既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A \cap B$.

3. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A \cup B$.

4. 全集与补集

在研究某些集合与集合之间的关系时,如果这些集合都是某一给定集合的子集,则这个给定的集合叫做全集,用符号 U 或 I 表示.

如果已知全集为 U ,且 $A \subseteq U$,则全集中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在集合 U 中的补集,记作 $\complement_U A$,或简记作 $\complement A$.

补集的性质:

$$A \cap \complement_U A = \emptyset \quad \text{或} \quad A \cap \complement A = \emptyset$$

$$A \cup \complement_U A = U \quad A \cup \complement A = U$$

二、函数的概念

(一)函数的定义

在某变化过程中,有两个变量 x, y , 并且对于 x 在某个变化范围内的每个确定的值, 按照某个对应法则, y 都有惟一的值和它对应, 那么 y 就叫做 x 的函数, x 叫做自变量, 记作 $y = f(x)$, 其中 f 表示它们中的某个对应法则.

(二)定义域和值域

自变量 x 的取值范围, 叫做函数的定义域. 和 x 的值对应的 y 的值, 叫做函数值. 函数值的集合, 叫做函数的值域.

定义域、值域、对应法则, 是确定一个函数的三要素.

1. 函数定义域的求法

求函数的定义域, 是学好函数的首要内容. 对于不同的函数, 定义域的求法各不相同, 主要有下面几点:

- (1) 函数 $y = f(x)$ 是多项式函数, 则定义域为一切实数;
- (2) 函数 $y = f(x)$ 是分式函数, 则定义域为使分母不为 0 的所有自变量 x 的集合;
- (3) 函数 $y = f(x)$ 中, 含有偶次方根, 则定义域为使偶次根下不为负的所有自变量 x 的集合;

- (4) 函数 $y = f(x)$ 中, 含有对数, 则定义域为使真数大于零的所有自变量 x 的集合.

2. 函数的求值

对于函数 $y = f(x)$, 当 $x = x_0$ 时, 它所对应的 y 的值 y_0 , 即 $y_0 = f(x_0)$ 叫做函数的值. 当 $x = \varphi(t)$, 即 x 又是变量 t 的函数时, 由于 y 是 x 的函数, 这时对 t 每一个确定的值, x 都有惟一的值和它对应, 同时对于 x 每一个确定的值, y 也都有惟一的值和它对应. 因此, y 叫做变量 t 的复合函数. 记为 $y = f[\varphi(t)]$.

3. 函数的值域

函数值的集合, 叫函数的值域. 函数值域的求法, 根据函数的不同而不同, 后面将对不同的函数, 具体说明.

(三)函数的表示法

1. 解析法: 用等式表示两个变量间的函数关系的方法, 一般写成 $y = f(x)$ 的形式;
2. 列表法: 列表表示两个变量间的函数关系的方法;
3. 图像法: 用图像表示两个变量间的函数关系的方法.

三、函数的性质

(一)函数的单调性

函数 $y = f(x)$ 定义在某区间上, 若对属于这个区间的任何 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在此区间上是单调增函数; 如果对 $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在此区间上是单调减函数.

单调增函数和单调减函数统称单调函数. 这个区间叫做函数的单调区间.

(二)函数的奇偶性

如果对于函数 $y=f(x)$ 定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$, 那么 $f(x)$ 是**奇函数**, 图像关于坐标原点对称; 如果对于函数 $y=f(x)$ 定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x)=f(x)$, 那么 $f(x)$ 是**偶函数**, 图像关于 y 轴对称.

注意 (1)函数的奇偶性, 是某些函数所特有的性质, 并不是所有的函数都具有奇偶性;

(2)具有奇偶性的函数的定义域, 一定是关于坐标原点对称的区间;

(3)奇函数的图像关于坐标原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称;

(4)奇函数、偶函数的单调性: 奇函数在区间 (a, b) 和区间 $(-b, -a)$ 内的单调性一致, 偶函数在区间 (a, b) 和区间 $(-b, -a)$ 内的单调性相反.

四、一次函数和反比例函数

(一)一次函数

1. 定义: $y=kx+b(k \neq 0)$ 叫做**一次函数**, 若 $b=0$, 则 $y=kx$ 叫做**正比例函数**.

2. 定义域、值域: 它的定义域和值域都是实数集 $\mathbf{R}$.

3. 图像: 一次函数 $y=kx+b$ 的图像是经过点 $(0, b)$ 而平行于直线 $y=kx$ 的一条直线.

4. 性质

(1)当 $b=0$ 时, 一次函数变为 $y=kx$, 即**正比例函数**, 它是过原点的一条直线. 当 $k>0$ 时, 图像过一、三象限, 当 $k<0$ 时, 图像过二、四象限.

(2)单调性: 当 $k>0$ 时, 是增函数, 当 $k<0$ 时, 是减函数.

(3)奇偶性: $y=kx+b$, 当 $b \neq 0$ 时, 是非奇非偶函数, 当 $b=0$ 时, $y=kx$ 是奇函数, 它的图像关于原点对称.

(4) $|k|$ 越大, 直线越靠近 y 轴; $|k|$ 越小, 直线越靠近 $(0, b)$ 点且和 x 轴平行. (k 为直线的斜率)

(二)反比例函数

1. 定义: 函数 $y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$ 叫做**反比例函数**. 定义域和值域都是 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. 图像: $y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图像是有两条分支的曲线, 叫做**双曲线**, $k>0$ 时, 双曲线的两分支分别在一、三象限; $k<0$ 时, 两分支分别在二、四象限, 如图 1-1 所示.

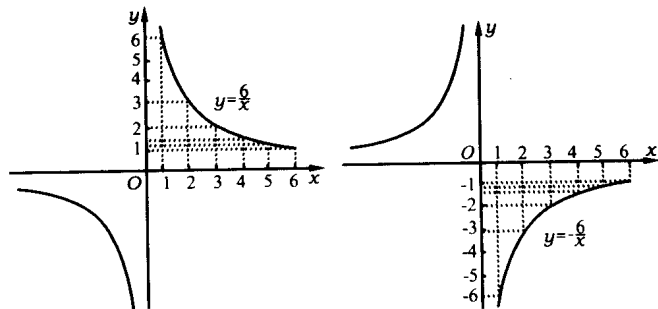


图 1-1

3. 性质: (1) 单调性: $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 时, 在区间 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 内是减函数, $k < 0$ 时在区间 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 内是增函数.

(2) 奇偶性: $\because f(-x) = -f(x), \therefore y = \frac{k}{x}$ 是奇函数.

说明

(1) $y = \frac{k}{x}$ 的图像是双曲线, 且 $x \neq 0, y \neq 0$, 坐标原点是双曲线的对称中心, 直线 $x = 0$ (y 轴), $y = 0$ (x 轴) 是双曲线的渐近线.

(2) 函数 $y = b + \frac{k}{x-a}$ 和 $y = \frac{k}{x}$ 的关系:

$y = b + \frac{k}{x-a}$ 是由 $y = \frac{k}{x}$ 向左(或向右)移 $|a|$ 个单位, 再向上(或向下)平移 $|b|$ 个单位得到的, 所以 $y = b + \frac{k}{x-a}$ 的图像的对称中心是 (a, b) , $x = a$ 和 $y = b$ 是 $y = b + \frac{k}{x-a}$ 图像的渐近线.

(3) 形如 $y = \frac{px+q}{mx+n}$ 的函数, 可以经过简单的变形, 变成 $y = b + \frac{k}{x-a}$ 的形式, 进而通过 $y = \frac{k}{x}$ 的性质研究形如 $y = \frac{px+q}{mx+n}$ 的函数的性质.

五、二次函数

定义: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 叫二次函数, 且 $ax^2 + bx + c$ 为二次函数的一般式.

1. 函数 $y = ax^2$ 的图像是抛物线, 它关于 y 轴对称, y 轴叫抛物线的对称轴, 对称轴和抛物线的交点叫做抛物线的顶点, $y = ax^2$ 的顶点是原点, 顶点的坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 的图像在 x 轴的上方, 顶点在 x 轴上, 它的开口向上, 并且向上无限伸展(如图 1-2 (a) 所示);

当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 的图像在 x 轴的下方, 顶点在 x 轴上, 它的开口向下, 并且向下无限伸展(如图 1-2 (b) 所示).

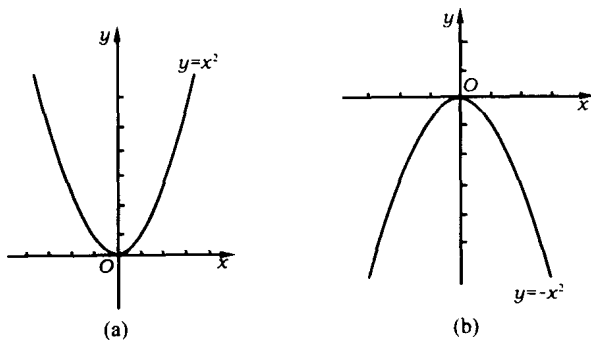


图 1-2

当 $a > 0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而减小; 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而增大, 函数 y 在顶点处的值最小.

当 $a < 0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随 x 的增大而增大; 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大

而减小,函数 y 在顶点处的值最大(如图 1-2 (b)所示).

当 $|a|$ 越大,抛物线的开口越小;当 $|a|$ 越小,抛物线的开口越大.

2. $y = ax^2 + bx + c$ 的图像和性质

在同一坐标里画出函数 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$, $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ 的图像如图 1-3 所示.从图 1-3 所示中可以看出,把函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 图像向左平移 3 个单位,就得到 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图像;再把函数 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图像向下平移 2 个单位,就得到 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ 的图像,也就是 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ 的图像.

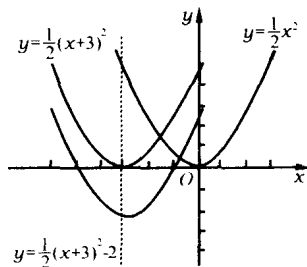


图 1-3

由此可知,二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ 的图像与 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图像,形状是一样的,只是位置不同.

$$\begin{aligned} \text{由于 } y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\right) + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

所以它的图像,可以通过平行移动 $y = ax^2$ 的图像而得到:

当 $\frac{b}{2a} > 0$ 时,将 $y = ax^2$ 的图像向左平移 $\frac{b}{2a}$ 个单位;

当 $\frac{b}{2a} < 0$ 时,将 $y = ax^2$ 的图像向右平移 $-\frac{b}{2a}$ 个单位;

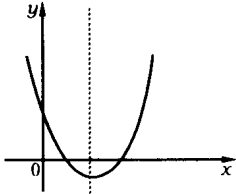
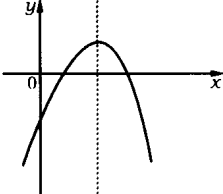
当 $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ 时,将 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ 的图像向上平移 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 个单位;

当 $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$ 时,将 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ 的图像向下平移 $-\frac{4ac - b^2}{4a}$ 个单位;

就可以由 $y = ax^2$ 的图像得到 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像.

因此, $y = ax^2 + bx + c$ 的图像是一条抛物线,它的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$,对称轴是平行于 y 轴的直线 $x = -\frac{b}{2a}$. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 图像的开口方向,最大最小值和增减情况与 $y = ax^2$ 类似.

$y = ax^2 + bx + c$ 的图像和性质如下:

	$a > 0$	$a < 0$
图 像		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
对 称 性	关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称	
单 调 性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数;	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数;
最大值与最小值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y_{\text{最小值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y_{\text{最大值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$

六、反函数的概念

函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A , 值域为 C . 从 $y = f(x)$ 中解出 x , 得到 $x = \varphi(y)$, 如果对于 y 在 C 中的任何一个值, 通过式子 $x = \varphi(y)$, x 在 A 中都有惟一确定的值和它对应, 那么 $x = \varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数, 这样的函数 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 习惯上用 x 表示自变量, y 表示函数, 这样 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

$y = f(x)$ 的定义域、值域分别是 $y = f^{-1}(x)$ 的值域和定义域.

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

例如: 设函数 $y = f(x)$ 的图像上的任意一点坐标为 (a, b) , 则 $b = f(a)$, 从而 $a = f^{-1}(b)$.

因此, 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上的任意点 $(b, f^{-1}(b))$ 可以表示为 (b, a) .

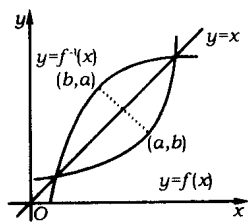


图 1-4

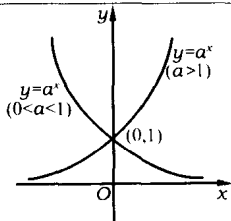
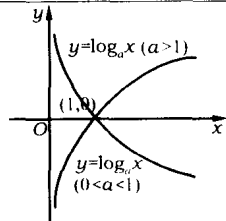
从如图 1-4 所示可以看出, 函数 $y = f(x)$ 的图像上任意一点 (a, b) 都与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上的任意点 (b, a) 关于直线 $y = x$ 对称, 因此, $y = f(x)$ 的图像与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

七、指数函数和对数函数

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 叫指数函数.

$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 叫对数函数.

指数函数和对数函数的函数式、定义域、图像与性质列表如下:

		指数函数	对数函数
函数式		$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
定义域		$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
图 像			
性 质	1	$y > 0$ (图像在 x 轴的上方)	$x > 0$ (图像在 x 轴的右方)
	2	$a^0 = 1$ (图像过 $(0,1)$ 点)	$\log_a 1$ (图像过 $(1,0)$ 点)
	3	$a > 1$ 时, $a^x \begin{cases} > 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ < 1 (x < 0) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $a^x \begin{cases} < 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ > 1 (x < 0) \end{cases}$	$a > 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} > 0 (x > 1) \\ = 0 (x = 1) \\ < 0 (0 < x < 1) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} < 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ > 0 (0 < x < 1) \end{cases}$
	4	$a > 1$ 时, a^x 是增函数; $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数.	$a > 1$ 时, $\log_a x$ 是增函数; $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数.

函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \log_a x$ 互为反函数, 可以把两函数对照进行复习.

【典型题解析】

【例 1.1】 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中至多有 1 个奇数, 则这样的集合共有 [].

- A. 2 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

答: D

【解析】 集合 A 可有 3 类: 第 1 类是空集; 第 2 类是 A 中不含奇数; 第 3 类是 A 中只含有 1 个奇数, 它们是 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 7\}$.

【例 1.2】 满足条件 $\{1, 3\} \cup B = \{1, 3, 5\}$ 的所有集合 B 的个数是 [].

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答: D

【解析】 由 $\{1, 3\} \cup B = \{1, 3, 5\}$, 知 $5 \in B$, 所以 B 可能为 $\{5\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$, 所以 B 的个数为 4, 或 $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 4$.

【例 1.3】 已知集合 $X = \{a, b\}, Y = \{b, c, d\}$, 那么 $X \cup Y$ 的非空真子集的个数为 [].

A. 14

B. 15

C. 16

D. 32

答:A

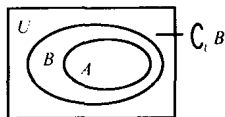
【解析】由 $X \cup Y = \{a, b, c, d\}$, 知其非空真子集为 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}$, 所以个数为 14, 或 $2^4 - 2 = 14$.

【例 1.4】设 U 为全集, 集合 A, B 满足 $A \subsetneq B \subsetneq U$, 则下列集合中, 一定为空集的是

[].

A. $A \cap (\complement_U B)$ B. $B \cap (\complement_U A)$ C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ D. $A \cap B$

答:A



【解析】由文氏图(如图 1-5 所示)知.

图 1-5

【例 1.5】集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 又 $a \in A, b \in B$, 则有 [].

A. $a + b \in A$ B. $a + b \in B$ C. $a + b \in C$ D. $a + b$ 不属于 A, B, C 中任意 1 个

答:B

【解析】因为 $a \in A$, 所以 $a = 2k_1, k_1 \in \mathbf{Z}$, 又 $b \in B$, 所以 $b = 2k_2 + 1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 则 $a + b = 2(k_1 + k_2) + 1$, 而 $k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}$, 所以 $a + b \in B$.

【例 1.6】若 $X = \{x | x = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $Y = \{y | y = 4n - 3, n \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{z | z = 8n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 X, Y, Q 的关系是 [].

A. $X \supsetneq Y \supsetneq Q$ B. $X \subsetneq Y \subsetneq Q$ C. $X = Y \supsetneq Q$ D. $X = Y = Q$

答:C

【解析】设 $n = k + 1, k \in \mathbf{Z}$, 则 $Y = \{y | y = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $X = Y$. 当 $n = 2k$ (n 是偶数) 时, $x = 8k + 1 \in Q$; 当 $n = 2k - 1$ 或 $n = 2k + 1$ (n 是奇数) 时, $x = 8k + 5$ 或 $8k - 3$. 可知集合 Q 是由集合 X 中的 n 取偶数时的元素组成的集合, 故 $X \supsetneq Q$. 所以 $X = Y \supsetneq Q$.

【例 1.7】集合 $A = \{a^2, a + 1, -3\}$, $B = \{a - 3, 2a - 1, a^2 + 1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 则 a 的值是 [].

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

答:D

【解析】当 B 中 $a - 3 = -3$ 时, $a = 0$, 则 $A = \{0, 1, -3\}$, $B = \{-3, -1, 1\}$, 则 $A \cap B \neq \{-3\}$; 当 B 中 $2a - 1 = -3$ 时, $a = -1$, 则 $A = \{1, 0, -3\}$, $B = \{-4, -3, 2\}$, 则 $A \cap B = \{-3\}$, $\therefore a = -1$.

【例 1.8】已知集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 这样 x 的不同值有 [].

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个