

數學分析習題集

[蘇] Г. Н. 別爾曼 著

程根梧 胡良孔 程慧英 尹祚湘 譯

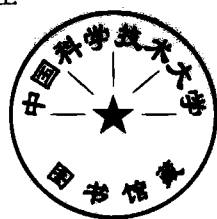
中南工業大學出版社

数学分析习题集

[苏] Г. H. 别尔曼 著

程根梧 胡良孔 程慧英 尹祚湘 译

中南工业大学出版社



内 容 简 介

本习题集,根据数学分析教程的基本内容,系统地精选了4465道题。全书共16章。内容包括:函数,极限,导数和微分,定积分,级数,多元函数的微分,重积分和累次积分,曲线积分,微分方程,场论等,对于比较难的习题均在“答案”中给出了提示。

本书可作为大专院校的教材,也可供工程技术人员参考。

柴丽莉,宋大智校。

Сборник задач по курсу математического анализа

Г.Н.Берман

1985

数学分析习题集

程根梧 胡良孔 等译

责任编辑:王嘉新

插图编辑:刘楷英

*

中南工业大学出版社出版发行

中南工业大学出版社印刷厂印装

湖南省新华书店经销

*

开本: $850 \times 1168/32$ 印张: 21.5 字数: 520 千字

1991年3月第1版

1991年3月第1次印刷

印数: 0001——1500

*

ISBN 7-81020-348-7/O·056

定价: 6.50 元

第十七版序言

本“习题集”系统地精选了数学分析教程的基本内容和练习，可供高等技术学校中按“数学分析”教学大纲学习的大学生学习用。

“习题集”中没有编入理论知识和必要的公式，关于这些，读者可以在教材的相应内容中找到。该书多数节段的编排是为了便于使用，而分成了更小的部分，我们在一些同类物理内容的习题前面给出了必需的物理知识，对于比较难的习题均在“答案”内容部分给出了解题提示，并对这类习题均标记了星号“*”。

“习题集”的第一版于1947年问世。以后的所有版本，在作者Г.Н. 别尔曼未亲自参加的情况下作了两次重大修改（因他在伟大卫国战争中负伤后，长期重病在身而于1949年2月9日逝世）。完成修改工作的是曾与Г.Н.别尔曼多年共同工作的И.Г. 阿拉马诺维奇，А.Ф.别尔曼特，Б.А.科尔杰姆斯基，Р.И. 波佐伊斯基，М.Г.舍斯托帕尔。

1959年5月26日，本“习题集”的合著者，主编А.Ф. 别尔曼特教授猝然去世，永别了我们编写小组。

Г.Н.别尔曼和А.Ф. 别尔曼特同志是学识渊博的学者、赋有才干积极进取的教育工作者、特别优秀的同志。让我们永远铭记他们吧。

И. Г. 阿拉马诺维奇
Б. А. 科尔杰姆斯基
Р. И. 波佐伊斯基
М. Г. 舍斯托帕尔

目 录

第十七版序言

第一章 函数	(1)
§ 1 有关函数的初步知识.....	(1)
§ 2 函数的一些最简单的性质.....	(6)
§ 3 一些最简单的函数.....	(12)
§ 4 反函数、幂函数、指函数和对数函数	(19)
§ 5 三角函数和反三角函数.....	(23)
§ 6 计算问题.....	(28)
第二章 极限、连续性	(31)
§ 1 基本定义.....	(31)
§ 2 无穷大量及极限存在的特征.....	(34)
§ 3 连续函数.....	(38)
§ 4 极限的求法、无穷小量的比较.....	(41)
第三章 导数和微分、微分法	(56)
§ 1 导数、函数的变化速率.....	(56)
§ 2 函数的微分法.....	(60)
§ 3 微分、函数的可微分性.....	(86)
§ 4 作为变化速率的导数 (更进一步的问题)	(91)
§ 5 累次微分法.....	(100)
第四章 函数及其图形的研究	(110)
§ 1 函数的性质.....	(110)

§ 2	一阶导数的应用	(111)
§ 3	二阶导数的应用	(124)
§ 4	补充问题、方程的解法	(128)
§ 5	泰勒公式及其应用	(139)
§ 6	曲率	(142)
§ 7	计算问题	(146)
第五章	定积分	(147)
§ 1	定积分及其最简单的性质	(147)
§ 2	定积分的基本性质	(151)
第六章	不定积分、积分法	(159)
§ 1	不定积分的最简单方法	(159)
§ 2	积分的基本方法	(166)
§ 3	可积函数的基本类型	(174)
第七章	定积分的计算方法、广义积分	(186)
§ 1	积分的精确算法	(186)
§ 2	积分的近似算法	(196)
§ 3	广义积分	(200)
第八章	积分的应用	(206)
§ 1	某些几何问题和静力学问题	(206)
§ 2	物理上的一些问题	(227)
第九章	级数	(238)
§ 1	数项级数	(238)
§ 2	函数项级数	(244)
§ 3	幂级数	(250)
§ 4	泰勒级数的某些应用	(254)
第十章	多元函数、微分法	(259)
§ 1	多元函数	(259)
§ 2	多元函数的最简单性质	(262)

§ 3	多元函数的导数和微分	(267)
§ 4	函数的微分法	(274)
§ 5	累次微分法	(279)
第十一章	多元函数微分法的应用	(286)
§ 1	泰勒公式、多元函数的极值	(286)
§ 2	平面曲线	(293)
§ 3	纯变量的向量函数、空间曲线、曲面	(295)
§ 4	标量场、梯度、方向导数	(303)
第十二章	重积分和累次积分	(307)
§ 1	二重积分和三重积分	(307)
§ 2	重积分	(308)
§ 3	在极坐标、柱坐标和球坐标系中的 积分	(313)
§ 4	二重积分和三重积分的应用	(317)
§ 5	广义积分、带参数的积分	(329)
第十三章	曲线积分和曲面积分	(338)
§ 1	对长度的曲线积分	(338)
§ 2	对坐标的曲线积分	(342)
§ 3	曲面积分	(350)
第十四章	微分方程	(354)
§ 1	一阶微分方程	(354)
§ 2	一阶微分方程 (续)	(370)
§ 3	二阶微分方程和高阶微分方程	(375)
§ 4	线性微分方程	(380)
§ 5	微分方程组	(389)
§ 6	计算问题	(394)
第十五章	三角级数	(396)
§ 1	三角多项式	(396)

§ 2 傅里叶级数.....	(397)
§ 3 克雷洛夫法、谐波分析法.....	(402)
第十六章 场论初步.....	(404)
答案.....	(412)

第一章 函 数

§ 1 有关函数的初步知识

1. 平面凸多边形的内角和是其边数的函数，试画出该函数的解析表达式，自变量可取什么样的值？

2. 下表给出了 y 是 x 函数的相应值：

自变量 x	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
函数 y	-1.5	-1	0	3.2	2.6	0	-1.8	-2.8	0	1.1	1.4	1.9	2.4

试用平稳的线连接这些点作出图形，并依图确定当 $x = 2.5$, 3.5 , 4.5 , 5.5 , 6.5 , 7.5 , 8.5 , 9.5 时函数的值，使表内数值更密集。

3. 已知某函数的图形如图 1 所示，把该曲线移到坐标纸上，并选取比例及自变量的某一些值，由图线量取各自变量值所对应的函数值，并作这些值的表。

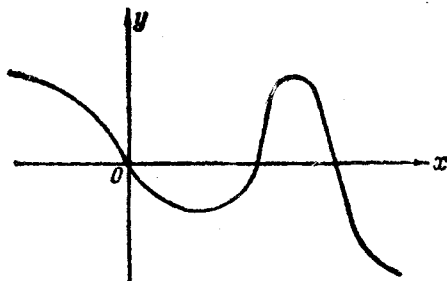


图 1

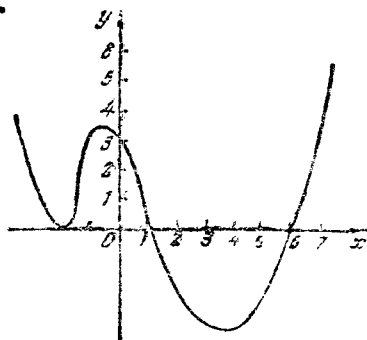


图 2

4. 已知函数图形如图 2 所示, 根据图形回答下列问题:

- a) 当自变量为何值时, 函数为零?
- b) 当自变量为何值时, 函数是正的?
- c) 当自变量为何值时, 函数是负的?

5. 两个电荷 e_1 和 e_2 间的相互作用力与它们之间的距离 r 的关系, 可以由库伦定律公式表达为

$$F = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}$$

假定 $e_1 = e_2 = 1$ 和 $\epsilon = 1$, 试对 $r = 1, 2, 3, \dots, 10$ 作已知函数值的表, 并用“光滑”曲线把这些点连在一起, 描出它的图形。

6. 当已知圆柱体体积 $V = 1$, 试作出一函数表示半径 r 对它的高度 h 的依赖关系。当 h 取如下各值: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 求 r 的值, 并作出函数的图形。

7. 把以 a 和 b 为底的等腰梯形的面积看作是底边 a 上角 α 的函数, 试写出其表达式。当 $a = 2$, $b = 1$ 时作该函数的图形。

8. 当直角三角形的斜边为定值 $c = 5$ 时, 试表示其一直角边长 b 与另一直角边长 a 的依从关系, 并作该函数的图形。

9. 已知函数

$$a) f(x) = \frac{x-2}{x-1},$$

$$b) \varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$$

求: $f(0), f(1), f(2), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(\sqrt{2}),$

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right|,$$

$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(4),$

试问 $f(-1), \varphi(-1)$ 存在吗?

10. 已知函数 $f(u) = u^3 - 1$, 求 $f(1), f(a), f(a+1), f(a-1), 2f(2a).$

11. 已知函数 $F(z) = 2^{z-2}$ 和 $\varphi(z) = 2^{z-2}$. 求 $F(0), F(2), F(3), F(-1), F(2.5), F(-1.5)$ 和 $\varphi(0), \varphi(2), \varphi(-1), \varphi(x), \varphi(-1) + F(1).$

12. 已知函数 $\psi(t) = ta^t$, 求 $\psi(0), \psi(1), \psi(-1), \psi\left(\frac{1}{a}\right),$

$\psi(a), \psi(-a).$

13. $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$ 和 $[\varphi(t)]^2.$

14. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, 检验 $F(a) = F(-a).$

15. $\phi(z) = z^3 - 5z$, 检验 $\phi(-z) = -\phi(z).$

16. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$, 检验 $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right).$

17. $f(x) = \sin x - \cos x$, 验证: $f(1) > 0.$

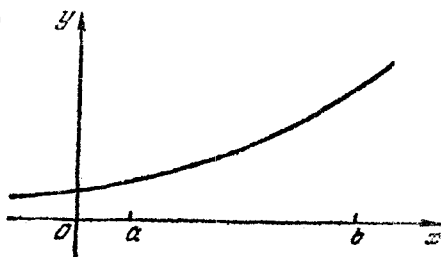
18. $\psi(x) = \lg x$, 证明: $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$

19. $F(z) = a^z$

(1) 证明, 对于任意的 z , 关系式 $F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0$ 都是正确的。

(2) 证明, $F(x) \cdot F(y)$
 $= F(x+y)$

20. 已给出函数 $y = f(x)$ 的图形和自变量 x 的值 a 与 b (图 3), 在图上作出 $f(a)$ 和 $f(b)$. 试问比 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



有什么样的几何意义?

图 3

21. 试证明, 如果函数 $y=f(x)$ 图形上任意一条弦都高于它所张的弧, 则不等式 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, 对所有的 $x_1 \neq x_2$ 都成立.

22. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 3$. 求方程:

a) $f(x) = f(0)$, b) $f(x) = f(-1)$ 的所有的根.

23. 已知 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. 求方程 $f(x) = f(-2)$ 的所有的根.

24. 已知函数 $f(x)$, 试指出方程 $f(x) = f(a)$ 的一个根是什么?

25. 若方程 $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 有定义, 试指出该方程的两个根. 当 $f(x) = x^2 - 12x + 3$ 时, 试求已给方程的所有根.

26. $F(x) = x^2 + 6$, $\varphi(x) = 5x$, 求方程 $F(x) = |\varphi(x)|$ 的所有的根.

27. $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 2$, 解方程:

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$$

28. 函数表达式 $f(x) = ax^2 + bx + 5$, 当它正确地满足恒等式 $f(x+1) - f(x) \equiv 8x + 3$ 时, 试问表达式中的 a 和 b 的值.

29. 设 $f(x) = a \cos(bx + c)$, 试问其中常数 a 、 b 和 c 为何值时, 方能满足恒等式 $f(x+1) - f(x) = \sin x$.

复合函数

30. 已知: $y = z^2$, $z = x + 1$. 试把 y 表示为 x 的函数.

31. 已知: $y = \sqrt{z+1}$, $z = \lg^2 x$. 试把 y 表示为 x 的函数.

32. 已知: $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x+1}$, $x = a^t$. 试把 y 表示为 t 的函数.

33. 已知: $y = \sin x$, $v = \lg y$, $u = \sqrt{1+v^2}$. 试把 u 表示为 x 的函数.

34. 已知: $y = 1+x$, $z = \cos y$, $v = \sqrt{1-z^2}$. 试把 v 表示为 x 的函数.

35. 试用基本初等函数链表示下面的复合函数:

1) $y = \sin^2 x$, 2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

3) $y = \lg \lg x$, 4) $y = \sin^2(2x+1)$;

5) $y = 5^{(8x+1)^2}$.

36. $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$. 求:

a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; b) $\varphi[f(1)]$;

c) $\varphi[f(2)]$; d) $f[\varphi(x)]$;

e) $f[f(x)]$; f) $f\{f[f(1)]\}$;

g) $\varphi[\varphi(x)]$.

37. 试验证下面由函数 $y = f(x)$ 和 $y = \varphi(x)$ 所构成的已知图形作复合函数 $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ 的图形的方法是正确的:

由函数 $\varphi(x)$ 的图形上对应于自变量 x 的给定值的点 A (图 4), 作直线平行于 Ox 轴交于第一或第三象限角的分角线于点 B , 再由点 B 作直线平行于 Oy 轴交函数 $f(x)$ 的图形于点 C . 如果由点 C 作直线平行于 Ox 轴, 则它与直线 NN' 的交点 D 就是对应于取值为 x 的函数 $F(x)$ 图形的点.

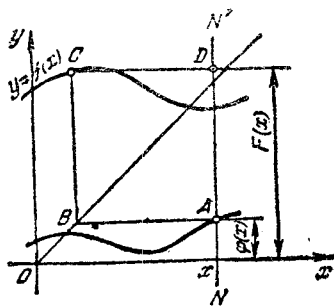


图 4

隐函数

38. 将下列方程所给出的隐函数改写成 y 的显函数形式:

1) $x^2 + y^2 = 1$;

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

4) $x^3 + y^3 = a^3$;

4) $xy = c$;

5) $2^x = 5$;

6) $\lg x + \lg(y+1) = 4$;

7) $2^{x^2} (x^2 - 2) = x^3 + 7$;

8) $(1+x)\cos y - x^2 = 0$.

39*. 试证, 当 $x > 0$ 时, 由方程 $y + |y| - x - |x| = 0$ 所确定的函数, 其图形是第一象限角的分角线, 而当 $x \leq 0$ 时, 第三象限角内所有的点 (及其边界点) 的坐标均满足已给方程.

§ 2 函数的一些最简单的性质

函数的定义域

40. 试列出整标函数 $y = \frac{1}{x!}$ 在 $1 \leq x \leq 6$ 内的数值表.

41. 整标函数 $u = \varphi(n)$ 的值等于不超过 n 的质数的个数.

试列出 $1 \leq n \leq 2$ 内 u 的数值表.

42. 整标函数 $u = f(n)$ 的值等于宗标异于 1 和 n 本身的整因子个数. 试列出 $1 \leq n \leq 20$ 内 u 的数值表.

43. 由三种材料所组成的杆, 其三段长度各为 1、2、1 单位长度, 相应的质量各为 2、3、1 单位质量 (克) (图 5). 长度 x 的可变区段 AM 的质量是 x 的函数. 试问当 x 为何值时该函数是确定的? 试编写它们的解析表达式并作图形.



图 5

44. 一个塔具有如下形状：一个底半径为 $2R$ （下底）和 R （上底）、高为 R 的正圆锥台，在其上面是一个半径为 R ，高为 $2R$ 的圆柱体，在圆柱体上面是一个半径为 R 的半球体。试表达出这个塔的横截面积 S 为由圆锥台下底到其他距离 x 的函数，并作函数 $S = f(x)$ 的图形。

45. 在半径为 R 的球内，内接一个圆柱体。试写出这个圆柱体体积 V 与其高度 x 的函数关系，并指出这个函数的定义域。

46. 在半径为 R 的球内，内接一个正圆锥体。试写出这个正圆锥体的侧面积 S 与其母线长 x 的函数关系，并指出这个函数的定义域。

在题47和48中，指出各函数的定义域：

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x + 3)$;

3) $y = \sqrt{5 - 2x}$; 4) $y = \sqrt{-px} \ (p > 0)$;

5) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3 - x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

9) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$; 10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

11) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

$$12) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}; \quad 13) y = \arcsin \frac{x}{4};$$

$$14) y = \arcsin(x - 2); \quad 15) y = \arccos(1 - 2x);$$

$$16) y = \arccos \frac{1 - 2x}{4}; \quad 17) y = \arcsin \sqrt{2x};$$

$$18) y = \sqrt{1 - |x|}; \quad 19) y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}};$$

$$20) y = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}; \quad 21) y = \sqrt{\lg \left(\frac{5x - x^2}{4} \right)};$$

$$22) y = \lg \sin x; \quad 23) y = \arccos \frac{2}{2 + \sin x};$$

$$24) y = \log_2 2.$$

$$48. 1) y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2};$$

$$2) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5};$$

$$3) y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg(4-x);$$

$$4) y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3);$$

$$5) y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1};$$

$$6) y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x);$$

$$7) y = \lg \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2};$$

$$8) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2};$$

$$9) y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x},$$

$$10) y = \lg \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5};$$

$$11) y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$12) y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}},$$

$$13) y = (x^2+x+1)^{-3 \cdot 2};$$

$$14) y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x});$$

$$15) y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 16)]$$

49. 下面的函数是恒等的吗?

$$1) f(x) = \frac{x}{x^2} \text{ 与 } \varphi(x) = \frac{1}{x},$$

$$2) f(x) = \frac{x^2}{x} \text{ 与 } \varphi(x) = x,$$

$$3) f(x) = x \text{ 与 } \varphi(x) = \sqrt{x^2},$$

$$4) f(x) = \lg x^2 \text{ 与 } \varphi(x) = 2 \lg x.$$

50. 试举出下列命题的函数解析式的例子:

1) 只定义在区间 $-2 \leq x \leq 2$ 内;

2) 只定义在区间 $-2 < x < 2$ 内而在 $x = 1$ 时无定义;

3) 除 $x = 2, x = 3, x = 4$ 外, 所有 x 的实数值都

有定义。

51. 试求已给方程:

$$1) y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$$

$$2) y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$$