（同济五版）

高等数学学习辅导与考题解析（上册）

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO YU KAOTI JIEXI

黄光谷 萧复生 李 杨 蔡晓英 编

- 学习引导释疑解难
- 精选例题归类解答
- 考题赛题解析及范例分析
- 习题试题选解及答案提示

华中科技大学出版社

大学生学习高数的益友　研究生入学考试的指南

同济五版 高等数学学习辅导与考题解析

（上册）

黄光谷　萧复生
李　杨　蔡晓英　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

(同济五版)高等数学学习辅导与考题解析(上册)/黄光谷 等编
武汉:华中科技大学出版社,2003年11月
ISBN 7-5609-3058-1

Ⅰ.高…
Ⅱ.①黄… ②萧… ③李… ④蔡…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

(同济五版)
高等数学学习辅导与考题解析(上册) 黄光谷 萧复生 李 杨 蔡晓英 等编

责任编辑:钟小珉 李立鹏 封面设计:潘 群
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.75 字数:379 000
版次:2003年11月第1版 印次:2003年11月第1次印刷 定价:19.80元
ISBN 7-5609-3058-1/O·293

内 容 提 要

本书是与全国使用最多的最新版高等数学教材《高等数学(上册)》(第五版,同济大学应用数学系主编,高等教育出版社 2002 年 7 月出版)配套的教学参考书.本书既可作为高校师生教、学《高等数学(上册)》的参考书,也可作为习作课的教材,还可作为期中、期末备考及“考研”、“竞赛”的复习辅导书.

为了便于读者自学,本书编排体系基本上与主教材的章、节顺序一致(详见目录),原则上以节为单位编写,对内容少或容易学习的节适当合并为“讲”.全书含各章习作课、期末复习课共 40 讲,每讲 2(或 4)学时,共需 80 至 90 学时教完,余下的机动学时,可讲打“*”号的节或作为测试时间和加强习作课.各节(讲)包括主要公式、答疑辅导、考题(考研题和竞赛题)解析、教与学建议、补充与说明及习题提示等栏目;各章末都安排了一次习作课,含内容小结、释疑解难、题型归类、课堂练习与课外作业(均含答案与提示)和总习题选解几部分;书末安排了三次复习课,含知识要点、范例分析、自测题及同济大学的期中、期末“高数”试题.读者可与教材同步阅读各节、章、全册的三个梯级的内容,由“薄—厚—薄”地理解和掌握全书及各章节的内容、方法和技巧,提高分析和解题的能力,扩大知识面,启迪数学思想和思维,提高数学素养(或素质).

本书的编写以教育部颁布的《高等数学教学基本要求》(相当于教学大纲)和 2003 年教育部新订的“考研”《数学考试大纲》为依据,因此对于使用其它版本《高等数学》或《微积分》、《数学分析》等教材的读者,本书也具有较高的参考价值.

前　言

同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)在前四版的基础上,按照新世纪、新形势下教材改革的精神,进行了全面的修订,既保持、继承和发扬了前四版的诸多优点和特色,又更臻完善,更适合当前教改和教学的需要,是新世纪伊始促进教改和改进教学的一部好教材.本书是与该教材配套的教与学的辅导书.

本书编写采用了作者编写的《高等数学学习指导与习题解析》(华中科技大学出版社已出两版,连续印刷五次)一书的编写格式,并作了一些改进,分为节、章、册三级,梯级循环,以有利于读者由“薄—厚—薄”地掌握全书内容,熟悉数学方法,启迪数学思维,提高数学素质.本书内容顺序基本上按主教材目录次序编排,仅有少数例子,为了突出主题,才偶尔用到稍后的知识.

各节的“主要公式”(含主要定理)栏目,尽可能地用数学语言(数学符号和数理逻辑记号等)表述各主要定理、性质、结论和公式等.例如,$f\in B[a,b]$,$C(a,b)$,$D(U(a,\delta))$,$R(I)$分别表示函数$f(x)$在相应区间(或邻域)上有界、连续、可导、可积,其余记号见“记号说明”和脚注.这样,既精练又可使初学者潜移默化地受到数学思维和数学语言的训练、熏陶.对这些主要公式不甚了解或理解不够全面的读者,可对照章、节阅读教材,一读便知.而各章、册的“内容要点”、“知识要点”栏目,则对各章内容和全册知识点进行了提炼和概括,有利于读者由“厚”到“薄”地驾驭全章和全书的主要内容.

“答疑辅导”或“释疑解难”栏目,分节与章两个层次引导读者去思考一系列基本概念、数学思想和方法及澄清易模糊混淆的问题,以利于对这些概念、思想、方法和问题的正确理解、认识和掌握.

在各节的“考题解析”栏目中,精选了部分全国硕士研究生入

学统一考试与国内外及全国重点大学的数学竞赛试题，并进行了分析和解答．另外，在题末注有“（研．2002．一）”者，是指2002年数学一的全国统一考研试题；注有“（赛．1998．京）”者，是指1998年北京市的统一数学竞赛试题，其余类似．这是一些很有代表性、启发性和有很高水平的试题，很多题可以举一反三，触类旁通．其中有的竞赛题已出现在考研题中，有些竞赛题（或者类似题）今后还会出现在考研题中．俗话说，不登高山，不知平地，登高才能望远、望全．马克思也说过：“科学是没有平坦大道的，只有那些不畏在崎岖小路上攀登的人，才能达到光辉的顶点．”阅读和思考了这些试题，可以提高和培养读者分析、解决数学问题与实际问题的能力，以及提高读者的数学素质．掌握了解这些试题的方法和技巧，再去阅读本书的学习方法指导和针对教材中较难习题的“习题提示”栏目（最好是先思考、自做，遇到困难，再读提示），能化难为易，就不怕这些数学习题难做了．本书还对较难的各章部分总习题作了解答．

“教、学建议”栏目含考纲要求（以高等数学的2003年考研数学一考试大纲作代表，它与本科高等数学“教学基本要求”（即教学大纲）是一致的，不重复选列），重点、难点与关键的分析，教学建议和学习方法指导等标题，可帮助读者在数学海洋学游泳时保持清醒的头脑和识别方向．

“补充与说明”栏目不是每节（但大部分节）都有，而是有感而发，内容有多有少，以帮助读者扩大视野，弄清来龙去脉．

各节“习题提示”仅对其中较难者作了提示，可帮助读者解决做题困难；较易者留给读者自己去思考练习．有些应用题题目较长，为节省篇幅，未转抄，读者去查对主教材[1]（即参考文献[1]），即知．

“习作课”和“期末复习课”后所附练习题、作业题、自测题和模拟试题等，读者也应该当成必读内容，亲自动手做一做．好在题量不大，不会加重负担，自做以后再核对答案与提示，并自评分．这些

题有利于读者提纲挈领、系统地掌握全章或全书的主要内容和方法,有利于提高单元测验和期中、期末考试的成绩.

所有这些栏目的精心设计,汇集了作者40余年教学实践的经验和体会.

由于我们水平有限,加上时间仓促,书中难免有缺点和疏漏,恳请各位专家、同行和读者批评指正,以便再版时修正.

本书编写得到了华中科技大学出版社的领导和有关编辑、同济大学郭镜明教授及武汉科技学院数理系领导的支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

编　者

2003年8月

记 号 说 明

$\mathbf{N}^+$ 表示正整数(自然数)集.

$\mathbf{N}$ 表示非负整数集.

$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

$\mathbf{R}^*$ 表示排除了零的实数集.

$\forall$ 表示“任(意)给(定)”的.

$\exists$ 表示“存在”、“有”.

$\Longrightarrow$ 表示“推出”、“蕴含”.

$\Longleftrightarrow$ 表示“互推出”、“等价于”、“充分必要条件”.

$\longrightarrow$ 表示“趋向于”或“收敛于”.

$\in$ 表示“属于”.

$\notin$ 或 $\overline{\in}$ 表示“不属于”.

$\subset$ 表示“包含于”.

$\supset$ 表示“包含”.

$\cap$ 表示交集.

$\cup$ 表示并集.

$\varnothing$ 表示空集.

$x \in \mathbf{R}$ 表示 x 可取任何实数，即 $x \in (-\infty, +\infty)$.

$n \in \mathbf{N}^+$ 表示 $n=1,2,3,\cdots$.

$f(x) \in C[a,b]$ 表示函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

$f(x) \in D(a,b)$ 表示 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.

$f(x) \in R(I)$ 表示 $f(x)$ 在区间 I 上可积.

$f(x) \in B[a,b]$ 表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

$f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

$f(x) \in D^n(I)$ 表示 $f(x)$ 在 I 上 n 阶可导.

$f^{(n)}(x) \in C(I)$ 表示 $f(x)$ 在 I 上的 n 阶导数连续，即 $f(x)$ 在 I 上 n 阶连续可微.

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，这里 $\sum$ 是连加号，并称 i 为哑指标.

$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$，这里 $\prod$ 是连乘号，并称 k 为哑指标.

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大的一个数.

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最小的一个数.

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

$\dot{U}(a, \delta)$ 表示去心 (a) 的 δ 邻域：$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$.

$\triangleq$ 表示“记为”或“定义为”.

$\exp f(x) \triangleq e^{f(x)}$.

$\ll$ 读作“远小于”，表示弱于；反之，$\gg$ 读作“远大于”，表示强于，或可推出.

目　录

① 第五、六章的习作内容合并给出.

引　　言

读者要开始学习高等数学了. 与初等数学比较而言，高等数学的内容多而难，进度快. 为了迅速地掌握这些内容，并培养能力，提高素质，这就要提倡自学，实行教与自学双向教学，读者在学习过程中应抓好如下五个环节：

(1) 课前预习(前一天通读下次要讲的内容)；

(2) 认真听讲(提倡超前的动脑思维)；

(3) 课后复习(弄懂每一个细节，并适当看一些参考书，帮助并加深理解该讲的内容)；

(4) 完成作业(要独立完成，可以讨论或询问，但切忌抄袭)；

(5) 及时小结(总结所学内容、归纳方法、写出体会等).

只要坚持不懈地抓好这五个环节，是可以学好高等数学的. 打好了高等数学课程的基础，并掌握了它的一系列思考方法，会受益匪浅、再学习其它课程会得心应手.

本书将《高等数学(上册)》分成了 40 讲(含习作课与复习课)，每讲 2 学时，共 80 ～ 90 学时可教完. 对原教材内容较少的节进行了合并，对内容较多的节可讲主要内容，讲不完的可留给学生自学. 读者可参考以上教学进度实施教学或进行预习和复习.

高等数学课程的主要任务是研究函数的一系列分析性质：求函数的极限，函数的连续性、可微性(求导数与微分等)、可积性(求各类积分及其应用等)，函数展开成级数，研究函数的性态与作图，解微分方程求函数式，等等. 其中，极限方法是主要工具，连续函数是主要研究对象. 由此看来，第一章的内容是后续各章的基础，而第一章第一节(函数知识)又是基础的基础.

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一　主要公式

（一）集合

1. 集合概念

$\varnothing \subsetneqq \mathbf{N}^+ \subsetneqq \mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q}$(有理数集) $\subsetneqq \mathbf{R} \subsetneqq \mathbf{C}$(复数集).

2. 集合运算

余集(补集)　$A^C = I \backslash A$(I 为全集,$I \backslash A$ 为差集).

对偶律　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

直积　$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A$ 且 $y \in B\}$.

3. 区间和邻域

$$U(a,\delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

去心 δ 邻域　$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

矩形域　$[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$.

（二）映射

1. 映射概念

$f: X \longrightarrow Y$. X、Y 是任意非空集合.

三要素:定义域 D_f,值域 R_f,对应法则 f.

双射(一一映射):f 既是单射,又是满射.

泛函:非空集 X 到数集 Y 的映射.

变换:非空集 X 到自身的映射.

函数:数集(或其子集)X 到数集 Y 的映射.

2. 逆映射与复合映射

逆映射　$f^{-1}: R_f \longrightarrow X$,其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$,值域 $R_{f^{-1}} = X$.

复合映射　$g: X \longrightarrow Y_1$, $Y_1 \subset Y_2$, $f: Y_2 \longrightarrow Z$,

$$f \circ g: X \longrightarrow Z, (f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

注意：$R_g \subset D_f$；$f \circ g$ 与 gof 未必相同.

（三）函数

1. 函数概念

数集 $D \subset \mathbf{R}$，称映射 $f: D \longrightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

两要素：定义域 $D = D_f$，对应法则 f.

绝对值函数：$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

符号函数：$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

$$x = |x| \operatorname{sgn} x.$$

取整函数：$y = [x]$（不超过 x 的最大整数）.

分段函数：如 $|x|$、$\operatorname{sgn} x$ 都是分段函数，即要用多于一个的式子（对应法则）表示的函数.

2. 函数的性质

(1) 有界性　　$|f(x)| \leqslant M, \forall\, x \in X, \exists\, M > 0.$

无界性　　$\forall\, M > 0, \exists\, x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M.$

(2) 单调性　　$\forall\, x_1, x_2 \in I \subset D, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$，$f(x_1) > f(x_2)$.

(3) 奇偶性　　$\forall\, x, -x \in D, f(-x) = \mp f(x).$

(4) 周期性　　$\forall\, x, x \pm l \in D, f(x + l) = f(x).$

3. 反函数与复合函数

反函数：直接函数 $y = f(x)$，即 $f: D \longrightarrow f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \longrightarrow D$，称其为 f 的反函数，记为 $y = f^{-1}(x)$.

复合函数：设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，$u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subset D_1$，则

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

称为由 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$ 构成的复合函数.

4. 函数的运算

$$f \pm g, f \times g, f \div g(\text{略}).$$

5. 初等函数

由常数和基本初等函数(幂、指数、对数、三角与反三角函数)经有限次的四则运算及复合所构成并可用一个式子表示的函数,统称初等函数.

双曲正弦 $\qquad \mathrm{sh}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$,

双曲余弦 $\qquad \mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$,

双曲正切 $\qquad \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$,

反双曲正弦 $\qquad y = \mathrm{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

反双曲余弦 $\qquad y = \mathrm{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,

反双曲正切 $\qquad y = \mathrm{arth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

二 答疑辅导

1. 邻域 $U(a,\delta)$ 与去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 有何区别与联系?

答 邻域 $U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ 是一个完整的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$,而去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 是上述区间去掉对称中心 $(x \neq a)$ 形成的两个小开区间

$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

即点 a 的左、右 δ 邻域之并集(见图 1-1). 由此可见,它们仅有包含点 a 与不包含点 a 的不同,这便是它们的区别与联系. 即有

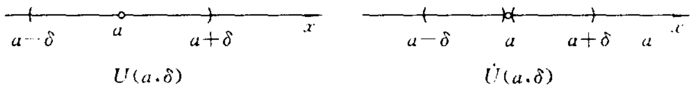

图 1-1

$$U(a,\delta) = \mathring{U}(a,\delta) \cup \{a\}.$$

由于 $|x - a| \geqslant 0$,在

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

中限制 $|x - a| > 0$,即规定了 $|x - a| \neq 0$(即 $x \neq a$),这样便在邻域 $U(a,$

$\delta) = (a-\delta, a+\delta)$ 中去掉了对称中心 $x=a$，便成了去心邻域 $\dot{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 了.

由于第三节研究 $x \longrightarrow a$ 函数 $f(x)$ 的极限时，允许 $f(a)$ 无定义，但仍旧可研究 $x \longrightarrow a$ 时 $f(x)$ 的变化趋势（极限），故这里需专门提出去心邻域的概念，以备后用.

2. 映射与函数有何异同？

答 它们是一般与特殊的关系. 映射

$$f: X \longrightarrow Y$$

中的 X, Y 是两个非空集合就行了，它们可以是点集、图形或数集，或更一般的集合；而函数

$$f: X \longrightarrow Y \text{ 记为 } f: D \longrightarrow \mathbf{R}$$

中的 X 与 Y 一定是数集 D 和 $\mathbf{R}$，且高等数学中只在实数集上研究实值函数，所以还规定 $D \subset \mathbf{R}$.

可见函数也是一种映射，是特殊映射，即实数集之间的映射；但映射不一定是函数. 例如，电影、幻灯、电视等图片成像技术，是典型的映射，是像源点与像点之间的对应关系，它就不是高等数学里的（实变）函数；在复变函数课里，借助像平面与像源平面两个平面，它们可表示成复变函数 —— 相似映射. 还有更稀奇古怪的映射，连复变函数也不是. 例如看电影对号入座，集合 X 是各个人，集合 Y 是数对（排号与序号），电影票就是对应规则 $f: X \longrightarrow Y$，它是人与座位间的对应关系，是映射，显然这不是函数关系. 在大学数学其它课程里，要研究一般的映射，但不一定能构成函数关系，所以要介绍映射的概念.

3. 什么样的映射存在逆映射？什么样的函数存在反函数？

答 只有单射才存在逆映射. 单射，是指 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 又根据逆映射的定义，是在 $y \in R_f (\subset Y)$ 上考察新映射

$$g: R_f \longrightarrow X,$$

这时 $R_f = Y$，即 Y 中任一 y 都是 $x \in X$ 的像，所以它又是满射，即 f 是双射（一一映射或一一对应），这时 f 必存在逆映射 f^{-1}.

同样，若函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 与值域 $R_f \triangleq W$[①]之间构成一一对应关系：

$$f: D \longleftrightarrow W = f(D),$$

即 $\forall\, x_1、x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$，则有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，这时 $D \longrightarrow f(D)$ 是单射，又是满射，那么函数 $y=f(x)$（或 $f(D)=W$）必存在（单值）反函数 $x=f^{-1}(y)$（或记为 $y=f^{-1}(x)$）．事实上，此时必在 W 上存在着单值对应 $y \longrightarrow x$，否则矛盾．可见，数集 D 与 $f(D)$ 之间的单射 $f: D \longrightarrow f(D)$（即一一映射）存在反函数 f^{-1}.

若 f 是 D 上的单调函数，则 f 是单射，f 必存在反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 与 f 具有相同的单调性.

4．怎样理解取整函数 $y=[x]$？它有何用处？

答 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，例如

$$[\mathrm{e}] = 2(\mathrm{e} = 2.71828\cdots), \quad [\pi] = 3(\pi = 3.1416\cdots),$$

$$[-\mathrm{e}] = -3, \quad [-\pi] = -4, \cdots$$

由于在两个任意相邻整数间的一切 x：

$$n \leqslant x < n+1, \quad n \in \mathbf{Z},$$

都有 $[x]=n$，所以 $y=[x]$ 的图像是跃度为 1 的阶梯曲线（见教材[1]p10 中的图 1-7）.

取整函数 $[x]$ 有下面三条重要性质：

$$[x] \leqslant x < [x]+1, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$x-1 < [x] \leqslant x, \quad [x] \in \mathbf{Z};$$

$$n > [x] \Longleftrightarrow n > x, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

第一、二条性质及第三条性质的充分性是显然的（留给读者思考）．下证

$$n > [x] \Longrightarrow n > x. \tag{1}$$

事实上，由于 $n \in \mathbf{N}^+$ 和 $n > [x]$，则 n 至少为 $[x]+1$，即有

$$n \geqslant [x]+1 > x.$$

例如，$n > [\pi] = 3$，必有 $n \geqslant 4 \Longrightarrow n > \pi (n \in \mathbf{N}^+)$.

在下一节的数列极限的论证中，经常要用到公式(1)，所以要事先引入取整函数 $y=[x]$.

---

① 记号 $\triangleq$ 读作“记为”或“定义为”.