

配合主教材刘鸿文主编《材料力学》(第4版)(I)



材料力学

学习指导书

陈乃立 陈倩 编著

高等教育出版社

配合主教材刘鸿文主编《材料力学》(第4版)(I)

材 料 力 学 学 习 指 导 书

陈乃立 陈 倩 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是与刘鸿文主编的《材料力学(I)》(第四版) (“十五”国家级规划教材, 2003年12月出版) (以下简称主教材) 相配套的学习辅导书。目的是使读者澄清材料力学中容易混淆的概念, 避免常犯的错误, 同时扩大知识面和视野, 增强学习兴趣。书中包括“相关链接”、“部分内容辅导”、“力学趣话”、“史海钩沉”、“部分习题解答”、“思考题”等内容。“史海钩沉”和“力学趣话”借鉴科普之文风, 用文学语言重温历史、剖析工程和生活中的材料力学问题。“部分习题解答”将主教材(I) 中约2/3的习题作为例题给出了解答, 其中部分例题求解后还有“讨论”和“常见错误分析”。每章均设有若干源自工程实际和生活中的“思考题”, 以留给学生充分的思维空间。

本书可作为学生学习材料力学时的参考书, 也可作为考研的复习用书、工程技术人员的自学用书和教师的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学学习指导书/陈乃立, 陈倩编著. —北京:
高等教育出版社, 2004. 1

ISBN 7-04-013077-7

I. 材... II. ①陈... ②陈... III. 材料力学—
高等学校—教学参考资料 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 099616 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市南方印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 1 月第 1 版
印 张	20	印 次	2004 年 1 月第 1 次印刷
字 数	370 000	定 价	23.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

本书是与刘鸿文主编,刘鸿文、林建兴、曹曼玲修订的《材料力学(I)》(第四版)、“十五”国家级规划教材)(以下简称主教材)配套的教学辅导用书,是浙江大学国家工科基础课程力学教学基地建设成果之一。刘鸿文教授主编的《材料力学》(第二版)、(第三版)叙述简练、概念准确、体系严谨,国内影响广。第二版于1987年获全国高等学校优秀教材奖;第三版于1997年获国家级教学成果一等奖和国家科技进步二等奖。要给这样一本精品教材写学习指导书,笔者深感肩负重任,惟有踏实工作、严谨治学,才有望为此主教材增色。

编著本书时的指导思想是:多一些创新,少一些雷同;指导书不是教材,不必追求完整性和系统性,有话则长,无话则短,甚至省略不写;风格可自由些。

鉴于上述想法,指导书中未包含常见的“基本要求”、“内容要点”、“主要公式”等内容,而设有“部分内容辅导”——其中包括对主教材中某些内容从另一角度的理解和分析、对易犯错误的警示、相似力学现象的类比、作图规律性的总结、解题要点等,旨在扩展学生的知识面,培养学生的分析、综合、类比等逻辑思维能力。

指导书中的特色板块是“史海钩沉”和“力学趣话”。前者重温材料力学史上惨痛事故的前因后果,使学生以史为鉴,深刻认识到研究材料力学的重要性;后者则借鉴和改编科普佳作,力求用更为优美的文学语言,来剖析工程和生活中的材料力学问题,使学生步入科学殿堂时,少几分枯燥,多几分欣赏,得到美的享受,从而激发学生的学习兴趣和想像力。这两个板块也为增加教师讲课的生动性提供了素材。

指导书的主体“部分习题解答”将主教材(I)中约 $2/3$ 的习题作为例题给出了解答,其中包括各类典型题及偏难、偏繁的综合题。未解答全部习题,是想给教师留下足够的布置习题的空间。考虑到读者理解力的差异,习题解答较为详尽,以尽量避免因未说清而导致阅读时被卡住,解题重在理清思路。部分例题求解后还有“讨论”和“常见错误分析”。前者是对解题特点的深入探讨或解题规律的总结等;后者则列举常见错误,分析错误原因,告诫学生不再重犯,教师批阅作业时可重点注意这些错误。

为留给学生充分的思维空间,指导书每章均设有若干源自工程实际和生活中的“思考题”,其中相当大比例的题目是自行设计的。思考题旨在培养学生综合运用材料力学知识、解决实际问题的能力。

本书书稿由主教材的修订者之一林建兴教授审阅。出版社的这一选择,可谓“举贤不避亲”。审稿后在交流意见的过程中,林教授对主教材的深刻理解和严谨的治学风范给我们留下了深刻印象;我们也得以了解,主教材的主编和修订者为力求论述准确、清楚,是如何斟酌字句,反复推敲、讨论,数易其稿的,这些都深深地影响了本书的成稿过程。林教授的修改意见可举例如下(加点的文字是修改后加的):“任一横截面上的轴力等于横截面一侧所有外力在杆轴线上投影的代数和”,对行文严谨之要求,于此可见一斑。林教授为此付出了艰辛的劳动,在此深表谢意。

本书的撰写得到了浙江大学国家工科基础课程力学教学基地和工科力学教研室同事们的鼎力支持,在此一并致谢。

“海纳百川,有容乃大”。个人或个别学校在某门课程上教学经验的积累是有限的,而国内广大的材料力学教师和求学者中蕴藏着极大的创造力。希望大家都能来浇灌这朵“小花”,那是“花匠”之幸,“小花”之幸,“小花”必将开得更茂盛。对本书的批评指正意见请寄:

浙江大学力学系 陈乃立 收

E-mail: NaiLi _ Chen@163. net

编著者
2003年9月

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581698/58581879/58581877

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务部

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

策划编辑	黄 毅
责任编辑	李 澈
封面设计	于 涛
责任绘图	杜晓丹
版式设计	胡志萍
责任校对	存 怡
责任印制	孔 源

目 录

第一章 绪 论	1
一、相关链接	1
二、史海钩沉	3
三、部分内容辅导	5
四、部分习题解答	7
五、思考题	10
第二章 拉伸、压缩与剪切	12
一、力学趣话	12
二、部分内容辅导	13
三、部分习题解答	15
四、思考题	55
第三章 扭 转	58
一、部分内容辅导	58
二、部分习题解答	60
三、思考题	79
第四章 弯曲内力	81
一、部分内容辅导	81
二、部分习题解答	83
三、思考题	111
第五章 弯曲应力	114
一、力学趣话	114
二、部分内容辅导	115
三、部分习题解答	117
四、思考题	139
第六章 弯曲变形	142
一、部分内容辅导	142
二、部分习题解答	146
三、思考题	182
第七章 应力和应变分析 强度理论	184
一、部分内容辅导	184
二、部分习题解答	185
三、思考题	212

第八章 组合变形	213
一、部分内容辅导	213
二、部分习题解答	214
三、思考题	234
第九章 压杆稳定	236
一、史海钩沉	236
二、部分内容辅导	237
三、部分习题解答	239
四、思考题	257
第十章 动载荷	259
一、部分内容辅导	259
二、部分习题解答	260
三、思考题	276
第十一章 交变应力	278
一、史海钩沉	278
二、部分内容辅导	279
三、部分习题解答	280
四、思考题	292
附录 I 平面图形的几何性质	294
参考文献	312
作者简介	313

第一章 绪 论

一、相关链接

1. 材料力学课程的地位和作用

材料力学是一门技术基础课。它有自己的理论体系,有理论与实验相结合的分析 and 解决问题的方法。材料力学的理论与计算公式,在各工程部门的结构设计中被广泛地采用。同时,它又是学好各种后续课程——机械零件、结构力学、弹性力学及其他专业设计课程的必要基础。可见,学好材料力学课程是非常重要的。材料力学课程重在培养学生对工程设计中强度、刚度、稳定性问题的明确的基本概念、必要的基础知识、比较熟练的计算能力和初步的实验分析能力。

2. 力学推动了社会和科学技术的进步

力学与数学、物理、化学、天文、地理、生物并列为七大基础学科。力学课程应该是工程类专业学生的必修课。

力学的发展源远流长。20 世纪前,机械工业、大水利工程、大跨度桥梁、铁路与机车、船舶、兵器等近代工业,无一不是在力学知识积累和完善的基础上产生与发展起来的。例如,高新技术领域中的航空航天技术(包括人类登月、建立空间站、航天飞机和卫星测控)主要靠力学而发展。一架载客 400 人的波音 747 飞机,其质量超过 100 t。这样的庞然大物,竟然可以自由翱翔于空中,是得益于近代空气动力学的成就;在飞机遇到不稳定气流时,其机翼能够克服上下颤动,确保航行安全,则是固体力学和结构力学的成就;客机跨海越洋,遥遥数万里,无论昼夜,都能准确无误地到达终点,既不会延误,也不会迷路,更不会失控,这是导航与自动控制技术的贡献,其最核心的技术却是一般力学研究的成果。

20 世纪中产生的其他高新技术,还有高层与新型建筑、巨型轮船和深水潜艇、大跨度与新型桥梁(如吊桥、斜拉桥)、高速公路、海洋平台、精密和大型机械、机器人、高速列车、大型水利工程、海底隧道等,它们都是在力学基础上得以实现并不断发展完善的。

20 世纪产生的另一些高新技术,如核反应堆工程、电子工程、计算机工程等,都对力学提出了各种难题。如核反应堆的核心部分——堆芯的核燃料元件盒,在高温、压力和核辐射的作用下,将如何变形?这种变形对核反应堆的运行又有何影响?同样处于高温和压力作用下的反应堆压力壳,其结构应如何设计,才能有足够的强度。又如,微机芯片在很小体积内的存储器数以百万计,延长芯

片寿命的关键是,如何解决因通电发热引起的热应力问题;再如,在通信工程中有架设通信网络以及高性能天线的力学问题;光盘与硬盘等存储设备的设计与生产,也都与力学有关;计算机硬盘驱动器的振动和稳定性问题,也是正在研究的力学课题。

在 21 世纪,生命科学或生物学将得到重大发展,如果认为这门学科与力学无关,那就大错而特错了。以生物医疗器械为例,人造心肺以及其他人造器官,都是在力学家的参与下才得以实现的。现在,诸如血液流动、肌肉与骨骼损伤等基本理论问题,已形成了一门分支学科——生物力学。它将回答下列问题:人类头骨在事故中的冲击响应是什么?人体的心脏肌肉如何控制血压?动脉瘤的发生源于何种控制功能紊乱?

上世纪 70 年代后期,日本的汽车工业空前繁荣,其竞争力主要来自节油的发动机和外壳的一次冲压成型。冲压成型是塑性力学在金属压力加工工艺中的成功应用,而节油发动机也有一半是靠力学对燃烧过程的研究成果。

21 世纪中,能源危机迫在眉睫。能源的增长,主要靠勘探、开采、发展水电和新能源,如核能发电。无论采用哪种方式或是降低能耗,力学都扮演着重要角色。例如,采煤过程中需要井下支护,以确保生产安全。这将使用大量木材与其他材料制成的桩,俗称“以木换煤”。岩石力学、工程地质力学的研究可使桩数大为减少,降低生产成本。

在水力发电站的建设中,需要了解基岩的力学性质,研究如何建造耐用而又省钱的坝体结构,这又是大型结构工程的课题。长江三峡水利枢纽工程提出了水工力学、通航水力学、爆炸及溃坝水力学、河流动力学、岩基力学、坝体抗震等力学课题,因此力学是整个长江三峡工程的关键。

新材料技术是我国“十五”期间要取得突破的关键领域之一。任何一种新材料的问世,都要给力学提出新的课题。主要有:如何改进材料加工过程;如何评价材料制作的构件及组成结构后的力学行为等。例如,塑料应用于工程时,由于力和变形都与时间有关,表现为粘弹性,用于钢材等一般材料的传统设计准则不再适用,需要建立新的设计准则。从上世纪 60 年代开始,强度和刚度综合性能优良的纤维增强复合材料大量应用于火箭、飞机、卫星等高新技术领域,很快形成了一门新兴的、材料学与力学相互交融的学科——复合材料力学。材料的另一类力学问题是材料的破坏、断裂。迄今为止的结构与机械事故几乎都是由破坏和断裂引起的,因而形成了断裂力学和损伤力学。材料在外界作用下经变形、损伤到失稳或破坏的过程,目前尚不能清楚地描述,这是固体力学最根本的难题。与此相应的是目前工程材料可实现的强度与其理论强度相差 1~2 个数量级。又如,现有各种复杂结构的设计还不够科学、优化,多数结构依靠过大的安全系数来换取安全,不仅浪费材料,而且仍未能防止灾难性事故的发生。上述各

方面的每一项研究稍有进展,其创造的价值都是极为可观的。

在交通运输领域,我国客运列车近年不断提速后,也仅达到 150 km/h,建造高速铁路势在必行。这涉及线路的曲率、坡度以及列车运行中的摆振问题,还涉及振动控制问题,以达到舒适、减噪和避免疲劳破坏的目的,这些都需要精细的力学分析。

化学工业中,由实验室反应转化为规模生产,因为物质宏观迁移规律、流动状态不清楚,一般要经过小试和中试。当前发达国家应用计算流体力学,预先模拟物质的流动,因而在某些情况下可免去小试和中试。此外,通过流场计算,利用湍流增加混合等手段,增加参加反应成分的接触,从而加快反应速度。很多化学反应必须在高温、高压等苛刻条件下进行,化工容器的强度设计必须考虑这些因素,而设计的基础主要是力学。长期运行的化工容器的结构寿命估算、初始裂纹引起的高压容器爆炸事故分析等,都是力学攻关的课题。

力学在国防建设中也发挥着重要作用。现代战争是高新技术的较量。无论是军队的快速调动、给养补给,还是攻防装备的设计,都有力学的课题。攻防设备的机械产品,其运动由力学规律所支配。攻防设备的电子产品,例如控制系统、雷达、干扰与抗干扰系统,也都与力学有着密切的关系。比如,怎样通过测量不同时刻雷达与目标之间的距离和雷达的方位角,确定目标的速度和加速度。

21 世纪应该是人们深入研究和认真解决环境问题和灾害问题的时候,这将涉及多个学科,包括:海洋学、气候学、生态学、化学、医学,其中也有力学。例如,为了防止土地沙漠化,必须认识沙漠推进与沙丘移动规律,这需要特别的力学风洞实验,建立精细的力学模型,再在此基础上进行力学分析与计算。再如,地震如何预报?地震时断层处发生了什么变化?震源的能量是怎样以地震波的形式传播,并使大地发生震撼而可能摧毁建筑物和桥梁?滑坡是如何产生的?土壤和岩石基础在不破坏的前提下可以承受建筑物对它的多大压力?这些都是需用固体力学方法研究的命题。

总之,力学在推动社会与科学技术进步中的重要作用,正如著名力学家谈镐生在 20 世纪 80 年代所说的“了解物理世界的现象,没有一门科学能离得开力学。正是由于力学的普遍存在,到处被利用,今天力学已渗透了所有的物理科学的学科,而形成了所有学科的理论基础”(参见参考文献[17])。

二、史海钩沉

震惊世界的两次强度失效事故:

1. “泰坦尼克号”沉没之谜

1912 年 4 月 14 日,当时最大最豪华的 4 600 t 英制游轮“泰坦尼克号”首次满载着 2 227 名乘客离开英国的南安普敦港驶向纽约。乘客们都以为自己乘坐

的是最豪华、最结实的轮船,做梦也不曾想到会有大祸临头。因为该船的底部已被隔成各个独立的舱房,任一舱房受损进水都不会影响别的舱房。即使在最坏的情况下,如与别的船相撞导致一部分舱房进水,整个“泰坦尼克号”沉没至少也需要3天时间,在那么长的时间内无论如何也能得到救援。因此,这次处女航几乎可以说是万无一失的,更何况造船用的是当时最优质的钢材。

然而,令人遗憾的是,“泰坦尼克号”未能逃脱世界航海史上最大海难事故的命运。被称为“不沉之船”的“泰坦尼克号”连同它的1513位乘客,仅在3小时内就被格陵兰海冰冷的海水吞没了。

这艘偌大的游轮究竟为什么会沉于海底呢?由于技术上的原因,直至1991年,第一次科学考察队才开始到水下对残骸进行考察,并收集了残骸的金属碎片供科研用。这些碎片以及沉船在海底的状况使人们终于解开了巨轮“泰坦尼克号”罹难之谜。考察队员们发现了导致“泰坦尼克号”沉没的两个重要细节。

一个细节说明,造船工程师们只考虑到船底、船尾或船首有被撞坏的可能性。在深夜里行进的“泰坦尼克号”遭遇冰山,当人们发现并想躲避却为时已晚。如果值班人员没有发现冰山,轮船直接撞到冰山上,或许游轮受损伤进水的只是船首部分的舱房,船一定不会整个沉没。但不幸的是,值班员偏偏发现了冰山,并且怀着侥幸的心理想让船转过身来躲避冰山,这样一来,冰山就像一把利刃似的从船的侧面切入,把船拦腰斩断。这样,就不是一两个舱房进水,而是所有的舱房都进了水。结果“泰坦尼克号”在几个小时内就覆没于大海之中了。

第二个细节是造船工程师只考虑到要增加钢的强度,而没有想到要增加其韧性。把残骸的金属碎片与如今的造船钢材作一对比试验,发现在“泰坦尼克号”沉没地点的水温中,如今的造船钢材在受到撞击时可弯成V形,而残骸上的钢材则因韧性不够而很快断裂。由此发现了钢材的冷脆性,即在 $-40^{\circ}\text{C} \sim 0^{\circ}\text{C}$ 的温度下,钢材的力学行为由韧性变成脆性,从而导致灾难性的脆性断裂。而用现代技术炼的钢只有在 $-70^{\circ}\text{C} \sim -60^{\circ}\text{C}$ 的温度下才会变脆。不过不能责怪当时的工程师,因为当时谁也不知道,为了增加钢的强度而往炼钢原料中增加大量硫化物会大大增加钢的脆性,以致酿成了“泰坦尼克号”沉没的悲剧。

另据美国《纽约时报》报导,一个海洋法医专家小组对打捞起来的“泰坦尼克号”船壳上的铆钉进行了分析,发现固定船壳钢板的铆钉里含有异常多的玻璃状渣粒,因而使铆钉变得非常脆弱、容易断裂。

这一分析表明:在冰山的撞击下,可能是铆钉断裂导致船壳解体,最终使“泰坦尼克号”葬身于大西洋海底。

2. 切尔诺贝利核电站为什么发生大爆炸?

切尔诺贝利核电站是前苏联于1973年开始修建、1977年启动的最大的核电站。1986年4月26日凌晨,两声沉闷的爆炸声打破了核电站周围的宁静。

随着爆炸声,一条 30 多米高的火柱掀开反应堆的外壳,冲向天空。反应堆的防护结构和各种设备整个被掀起,温度高达 $2\,000\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的烈焰吞噬着机房,熔化了粗大的钢架。携带着高放射性物质的水蒸气和尘埃随着浓烟升腾弥漫,这次爆炸造成了灾难性的后果。爆炸释放的能量相当于 500 颗在广岛投放的原子弹。爆炸破坏了核反应堆,使反应堆内 180 多吨浓缩铀燃料的 3% 被释放到大气中,放射性污染遍及前苏联居住着 694.5 万人的 15 万平方公里的地区,核电站周围 30 km 范围被划为隔离区,庄稼被全部掩埋。

那么,究竟是什么原因酿成了这场灾难?事后的调查表明,这是由一系列的操作失误造成的人为事故。刚完成检修的第四核反应堆重新启动时,将产生的蒸汽输向已经关闭的涡轮机,而能够关掉反应堆的自动保护装置却事先被切断了。这样,反应堆不断工作产生蒸汽,却没有宣泄的出口。反应堆外壳所承受的蒸汽压力和温度远远超出了它的设计要求,最终引发了热能爆炸。

然而,对于人类来说,这次爆炸仍然是“幸运”的。因为它仅仅是一次过热的蒸汽爆炸,而非核爆炸。否则这对于人类是绝对的灭顶之灾。

这次大爆炸也向人类敲响了警钟:如何杜绝灾难性事故的发生,如何在恶劣的环境条件下,遏制更大灾难的发生,这也是对力学工作者提出的新的挑战性问题。

三、部分内容辅导

1. 材料力学和理论力学研究对象的区别

理论力学所研究的物体,若其大小不能忽略不计,一般都视为刚体,这是理想化的力学模型;而材料力学所研究的物体,除特别指明外,一般视为变形体,其力学模型更接近于实际。故理论力学只研究力的运动效应,而材料力学则主要研究力的变形效应。实际物体往往随所研究问题的不同,有时看作刚体,有时看作变形体。例如,为求主教材(以下简称教材)图 1.5 所示支架中各杆的内力,列出节点 A 的平衡方程时,把各杆看作刚体,不考虑各杆的变形,此即原始尺寸原理。在求得内力、计算 A 点的位移时,才考虑各杆的变形。在其他问题中,往往列静力平衡方程(如求约束反力和截面内力)时,把各构件都看作刚体。实践已证明,这种简化处理方法在小变形的条件下,其误差在工程实际允许的范围内。

2. 理论力学中某些定理在材料力学中的应用受到严格限制

理论力学中的加减平衡力系原理及其推理——力的可传性、力系简化的基础——力的平移定理、力偶等效定理(力偶矩相等的两力偶等效)等,只适用于刚体,而不适用于变形体。例如,研究杆的伸长时,作用于杆件两端的拉力(见图 1.1a)不能根据力的可传性,变换成一对压力(见图 1.1b);计算梁的变形时,作用于 AB 梁上的分布载荷 q (见图 1.2a)不能简化为作用于梁中点的集中力

$F(F = ql)$ (见图 1.2b),因为两者所引起的梁的变形是不同的。

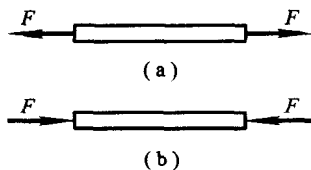


图 1.1

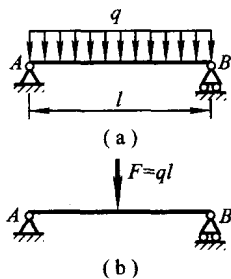


图 1.2

3. 材料连续性假设的数学意义

既然材料具有连续性,则材料内任一点的力学量(如应力、应变)都是该点坐标的连续函数,对坐标增量为无穷小时的极限分析[如教材(1.1)式中, $\Delta A \rightarrow 0$ 时的极限,(1.3)式中 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限,(1.4)式中 $\overline{MN} \rightarrow 0$ 且 $\overline{ML} \rightarrow 0$ 时的极限]就有了数学依据,有利于建立相应的数学模型。

4. 材料的均匀性假设与各向同性假设的区别

均匀性和各向同性是完全不同的性质,不应混淆。如用矢量的长短来表示材料某力学性能的强弱,则图 1.3a 表示均匀而非各向同性的材料;图 1.3b 表示各向同性而非均匀的材料;图 1.3c 才表示均匀且各向同性的材料。

5. “应力”与“压强”的区别

“应力”虽与“压强”量纲相同,但两者的物理意义不同。应力是微小面积 ΔA 上的内力平均集度当 $\Delta A \rightarrow 0$ 时的极限,它与内力的分布有关,而压强是单位面积上的外力;应力一般不垂直于截面,它可分解为垂直于截面的正应力 σ 和切于截面的切应力 τ ,而压强一般垂直于作用面;压强常呈均匀分布或线性分布,而应力的分布要复杂得多;压强一般作用于物体表面,而应力存在于受力物体内部的任意一点。

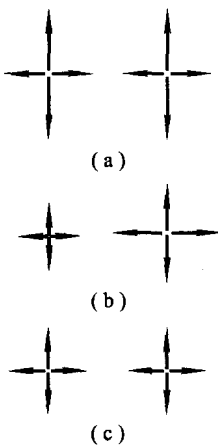


图 1.3

6. “变形”与“应变”的联系与区别

“变形”是指物体大小和形状的变化。沿某一方向线段长度的改变量,称为线变形,单位长度线段的线变形定义为线应变或简称应变,记作 ϵ 。任意角角度的改变量,称为角变形,直角的角变形当夹角的两边长度趋于零时的极限,定义为直角顶点在两直角边确定的平面内的剪应变或角应变,记作 γ 。可见,变形与应变具有以下特点:

(1) 线变形(或角变形)反映的是线段长度(或角度)的改变量,它与线段的

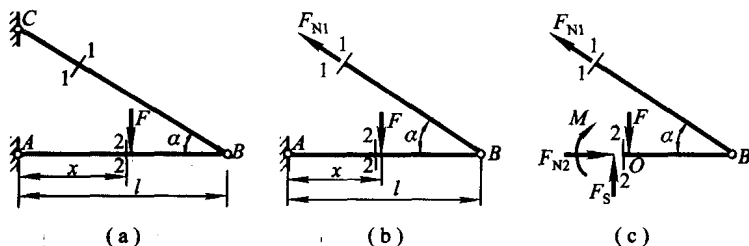
长度(或角度的大小)有关;而 ϵ (或 γ) 是在极限情况下导出的, 消除了长度(或角度)的影响, 它们只与点的位置和指定的方向有关。

(2) ϵ 是对过某点的某一方而言, γ 则是对过某点的某一对垂直方向而言。一般地说, 变形体中所选的点和方向不同, 其 ϵ 和 γ 也将不同。因此, ϵ 和 γ 必须指明是对哪一点、沿哪一个(或一对)方向。

(3) ϵ 和 γ 都是量纲一的量, γ 一般用 rad(弧度)表示。

四、部分习题解答

例题 1.1 在图 a 所示简易吊车的横梁上, F 力可以左右移动。试求截面 1-1 和 2-2 上的内力及其最大值。(教材习题 1.3)



例题 1.1 图

解 用截面 1-1 切断 CB 杆, 研究 CB 杆右下部分与 AB 杆的组合。因 CB 为二力杆, 故 1-1 截面上只有轴力 F_{N1} , 画出受力图如图 b 所示。列出平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N1} \sin \alpha \cdot l - F \cdot x = 0 \quad (a)$$

由(a)式得

$$F_{N1} = Fx / (l \sin \alpha)$$

当 $x = l$ 时

$$F_{N1, \max} = F / \sin \alpha$$

在上述组合中, 再以截面 2-2 切断 AB 杆, 研究图 c 所示部分。 AB 杆不是二力杆, 其任一截面的内力系向截面形心 O 的简化结果, 一般为一个合力和一个合力偶。今将合力分解成截面的法向分量 F_{N2} 和沿截面的切向分量 F_S , 合力偶用 M 表示。则由平衡方程

$$\sum M_O = 0, \quad F_{N1} \sin \alpha (l - x) - M = 0 \quad (b)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} - F_{N1} \cos \alpha = 0 \quad (c)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_S - F + F_{N1} \sin \alpha = 0 \quad (d)$$

得

$$M = Fx(l-x)/l, \quad F_{N2} = xF \cot \alpha / l, \quad F_S = (1-x/l)F$$

当 $x = l/2$ 时, 有 $M_{\max} = Fl/4$; 当 $x = l$ 时, 有 $F_{N2, \max} = F \cot \alpha$; 当 $x = 0$ 时, 有 $F_{S, \max} = F$ 。

讨论

(1) 试分析内力 F_{N1} 、 F_{N2} 、 M 分别使相应的杆件引起哪几种基本变形? F 和 F_S 的组合使 AB 杆产生何种基本变形?

(2) 本题有何实际应用价值?

(3) 若仅以题 1.1 图 c 所示的局部杆件的组合为研究对象, 可求得未知量 F_{N1} 、 F_{N2} 、 M 、 F_S 吗? 为什么?

常见错误分析

(1) 2-2 截面上内力未画全。当杆件受力较复杂时, 根据力系简化的理论, 杆件任一截面上内力系向截面形心简化, 一般地得一合力(分解为垂直截面的法向分量和沿截面的切向分量)和合力偶。

(2) 固定铰支座 A 处的约束反力应有水平和铅垂分量, 仅有一个分量是错误的。

(3) 未知内力的方向可任意假设。本题中, 若各内力的方向与图示相同, 则为正值; 反之为负值。不能仅凭数值, 要结合图形才能判别答案的正误。

例题 1.2 图示三角形薄板因受外力作用而变形, 角点 B 垂直向上的位移为 0.03 mm , 但 AB 和 BC 仍保持为直线。试求沿 OB 的平均应变, 并求 AB 、 BC 两边在 B 点的角度改变。(教材习题 1.5)

解法一 延长 OB 至 B' (为便于分析, 示意图中可放大 BB' 的尺寸), 连 AB' 和 CB' , 如图所示。

按线应变的定义, 沿 OB 的平均应变为

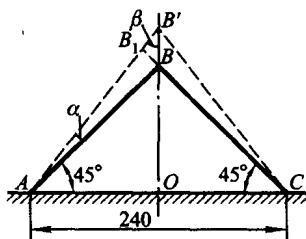
$$\epsilon_m = (OB' - OB) / OB = 0.03 / 120 = 2.5 \times 10^{-4}$$

记 $\angle AB'O = \beta$, $\angle B'AB = \alpha$ 。延长 CB , 交 AB' 于 B_1 点, 因 BB' 很小, $BB_1 \approx BB' \cos 45^\circ$; α 也很小, $\alpha \approx BB_1 / AB$ 。 B 点的直角改变即 B 点的角应变 γ 为

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle AB'C = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) = 2\alpha \approx 2BB_1 / AB$$

$$\approx 2BB' \cos 45^\circ / AB = (2 \times 0.03 \times \sqrt{2} / 2) / (120 \sqrt{2}) \text{ rad}$$

$$= 2.5 \times 10^{-4} \text{ rad}$$



例题 1.2 图

$$\text{解法二} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \angle AB'C = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(OA/OB') = \left[\frac{\pi}{2} - 2 \times \right.$$

$$\left. \arctan(120/120.03) \right] \text{ rad} \approx 2.49968 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

解法三 $\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle AB'C$

因为 γ 很小, 所以

$$\begin{aligned}\gamma &\approx \sin \gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle AB'C\right) = \cos(\angle AB'C) \\ &= \cos 2\beta = (1 - \tan^2 \beta) / (1 + \tan^2 \beta) \\ &= \{[1 - (120/120.03)^2] / [1 + (120/120.03)^2]\} \text{ rad} \\ &\approx 2.499\,68 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$

解法四 因为

$$\gamma/2 \approx \tan(\gamma/2) = \tan(\pi/4 - \beta) = (1 - \tan \beta) / (1 + \tan \beta) = [(1 - 120/120.03) / (1 + 120/120.03)] \text{ rad} \approx 1.249\,84 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

所以 $\gamma = 2.499\,68 \times 10^{-4} \text{ rad}$

上述各解法所得的结果, 只有极其微小的差别。

讨论

(1) 各解法中, 哪些是近似解? 哪些是精确解?

(2) 下列解法是否正确?

$$\begin{aligned}\gamma &= 2(\pi/4 - \beta) \approx 2[\tan(\pi/4) - \tan \beta] = [2 \times (1 - 120/120.03)] \text{ rad} \\ &= 4.998\,75 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$

(3) 在解法二、三、四中, 都要在两个很接近的大数间进行运算, 如 $120/120.03$ 。若忽略 0.03 , 把两数相除结果看作 1 , 就会得出无角度改变的错误结论。故必须用计算器运算, 且不舍弃小数点后的尾数。

常见错误分析

认为 $\gamma = \angle OBA - \angle OB'A$, 即只算了一半。 γ 应是直角的改变量。

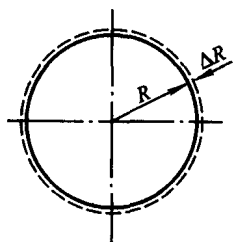
例题 1.3 圆形薄板的半径为 R , 变形后 R 的增量为 ΔR 。若 $R = 80 \text{ mm}$, $\Delta R = 3 \times 10^{-3} \text{ mm}$, 试求沿半径方向和外圆圆周方向的平均应变。(教材习题 1.6)

解 按定义, 沿半径方向的平均应变是半径的长度变化除以半径原长, 即

$$\epsilon_{\text{径}} = \Delta R / R = 3 \times 10^{-3} / 80 = 3.75 \times 10^{-5}$$

沿外圆圆周方向的平均应变是外圆周长的变化除以外圆原周长, 即

$$\epsilon_{\text{周}} = \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{3 \times 10^{-3}}{80} = 3.75 \times 10^{-5}$$



例题 1.3 图