LANGMAN 朗曼

北京朗曼教学与研究中心

Peculiar

北京朗曼教学与研究中心

宋伯涛 总主编

非常讲解

张志朝 韩新生 主编

Explanations

高二数学
教材全解全析（上）

天津人民出版社

北京朗曼教学与研究中心教研成果

PECULIAR EXPLANATIONS

非常讲解

高二数学教材全解全析（上）

主编　张志朝　韩新生

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

非常讲解．数学．高二．上/张志朝．韩新生主编．－天津:天津人民出版社，2002

ISBN 7－201－04108－8

Ⅰ．非… Ⅱ．张…韩… Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028947 号

非常讲解
高二数学教材全解全析(上)

主编 张志朝 韩新生

天津人民出版社出版

出版人：刘晓津

(天津市张自忠路 189 号 邮政编码：300020)

北京市昌平长城印刷厂印刷 新华书店发行

*

2004 年 5 月第 3 版 2004 年 5 月第 1 次印刷

890×1240 毫米 32 开本 14 印张

字数:459 千字 印数:1－30,000

定价:16.00 元

ISBN 7-201-04108-8

敬告读者

《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书汇集了北京朗曼教学与研究中心最新教学科研成果。值此再版之际，北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意！

在购买《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书时，请读者认准封面上**"北京朗曼教学与研究中心教研成果"** **"宋伯涛总主编"**等字样，以防假冒。

近年来，发现个别出版物公然冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌或大量盗用书中内容。在此，本中心**严正声明：凡冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌，盗用书中内容的行为，均为侵犯知识产权行为，本中心将根据有关法规追究侵权者的法律责任。**

保护知识产权，打击盗版、盗用行为是每一个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现有侵权行为，请及时告知北京朗曼教学与研究中心，本中心对您的正直行为表示由衷的感谢。

如您在使用本书过程中发现有疏漏之处或疑难问题，可来信与本中心联系，我们将悉心听取您的意见和建议，竭诚为您排忧解难。让我们携手共勉，共同打造朗曼光辉形象！

本书在全国各地均有销售，您也可以来信邮购。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱，北京朗曼教学与研究中心**蒋雯丽**(收)；邮编：100101。

联系电话：010-64925885；64925887；64943723；64948723。

另外，北京朗曼教学与研究中心新建大型教学网站**"朗曼 1+1 网"**将于 **2004 年 5 月 18 日**正式开通。网站内容丰富，科目齐全，欢迎登录！

轻松浪漫的学习旅程，将从点击"朗曼 1+1 网"开始！

网址：http://www.lmedu.com.cn

再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已有三年，义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大，新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受，我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心，对于教师来说，就是改变角色定位；对于学生来说，就是变革学习方式。本着这样的精神，同时为了适应课程改革深入发展的需要，今年再版时，我们在广泛征求专家、教师、学生和家长意见的基础上，作了较大程度的修改。

本书按照源于新教材又高于新教材的原则进行修改，对它的各个知识点以及能力要求进行全面的讲解，分析和指导，每节设如下栏目：**大纲考纲要求**、**教材解析**、**方法指引**、**巩固练习**等。其中教材解析为本书各节的重点，它在新教材的基础上，对章节的各知识点逐个进行详细的讲解和分析，着重知识和技能的拓展与培养和规律方法的揭示与总结，通过典型常规题，创新开放题及实践应用题等让学生对新教材的知识点进行探究和体验，并按以下三点进行设计：

1.对典型例题进行全面剖析，并设以下四个栏目：①**思路点拨**：点拨解题思路，提供解题策略。②**解答**：按照解题方案，给出规范解答。③**误点剖析**：指出解题常见错误，并点击错误产生的原因，进行防错提示。④**评注**：总结解题过程的注意点，剖析解题技巧的关键处。开设以上小栏目，其目的是，开启学生思路，着眼规律方法总结。

2.试解变式题(或相关题)。从不同角度提出与上述典型题相关或相近的问题，供学生在练习中通过模仿，达到融会贯通，举一反三的目的。

3.每道典型题都针对教材中某一知识点，旨在通过对例题的探索，获得对教材相关内容的实践与体验。

作者在编写过程中，力求讲解教材全部内容，信息量大，做到精讲精析精选，讲解透彻且具有深度，辨析清晰细致，讲解分析方法新颖独到，与众不同，别具一格，不落窠臼。

《非常讲解》系列丛书讲解细致，分析透彻，层次分明，条理清晰，内容丰富，对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点，对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思考以及解决问题能力具有极强的实用性和指导性，是朗曼中心继《中学1+1》系列丛书后又一成功力作，两者堪称姊妹篇。其侧重点各不相同，前者偏重于对教材的讲解与分析，后者偏重于对重点及疑难问题的讲解与测试，它们既是一个整体，又互为补充，相得益彰。

学习《课程标准》，更新教育观念，有一个不断深入的过程；课程改革的实施，也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》，改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助，虽然我们兢兢业业，勉力为之，但因水平有限，难免有错漏之处，诚望批评指正，以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系。联系电话：010-64925885，64925887，64943723，64948723；通信地址：北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱；邮编：100101。

宋伯涛

2004 年 5 月于北师大

目录 CONTENTS

第八章 圆锥曲线方程

第六章　不等式

本章知识导学

不等式是高中数学的重要内容之一，本章是在高一学习一元一次不等式、一元二次不等式等知识的基础上，进一步学习不等式的概念、性质，不等式的证明，不等式的解法，及含有绝对值的不等式. 其中不等式的性质是证明不等式和求解不等式的理论依据，掌握并灵活应用不等式的性质是学好本章的关键，不等式的证明和解不等式是本章的主要内容. 因此，它们是本章的重点，不等式的证明方法较多且灵活多变，故它是本章的难点.

6.1　不等式的性质

不等式的性质是解不等式与证明不等式的理论依据. 高考中这一部分内容考查广泛、题型多变. 主要考查以下三个方面：①利用不等式性质，判断不等式或其有关结论是否成立. ②利用不等式的性质，进行数值大小的比较. ③利用不等式的性质，判断有关充要条件的问题等.

大纲考纲要求

1. 熟练掌握实数的性质

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$，$a<b\Leftrightarrow a-b<0$，$a=b\Leftrightarrow a-b=0$.

2. 掌握不等式的性质，熟悉性质定理的证明方法.

3. 能利用实数的性质，将比较大小问题转化为研究二数（或式）的差的符号问题.

本节重点：不等式及其概念.

难点：准确地使用性质，得出正确结论.

教材解析

1. 不等式的概念

（1）不等式的定义：

用不等号（$<$，$>$，$\leqslant$，$\geqslant$）连接两个实值函数解析式的式子叫做不等式；如 $f(x)>g(x)$，$f(x)\leqslant g(x)$ 等. 用"$<$"或"$>$"号连接的不等式叫严格不等式，用"$\leqslant$"或"$\geqslant$"号连接的不等式，叫做非严格不等式.

(2)不等式的分类:

①按成立条件分:如果不论用什么实数代替不等式中的字母它都能够成立,这样的不等式叫绝对不等式.

例如:$a^2+1>a$、$x+5>x+4$、$(a+1)^2>-1$ 等均为绝对不等式.

如果只有用某些范围内的实数代替不等式中的字母它才能够成立,这样的不等式叫条件不等式.

例如:$2x-1>1-x$、$x^2<x+1$、$\frac{1}{x}>1$ 等均为条件不等式.

如果用无论什么样的实数值代替不等式中的字母,不等式都不能成立,这样的不等式叫矛盾不等式.

例如:$|x-1|+|x+1|<1$、$a^2<-2$ 均为矛盾不等式.

绝对不等式、条件不等式与矛盾不等式相互之间没有包容性,即三者中任意二个都是互斥的.

②按不等号开口方向分:在两个不等式中,如果每一个的左边都大于右边,或每一个的左边都小于右边,这样的两个不等式叫同向不等式.

如果一个不等式的左边大于右边,而另一个不等式的左边小于右边,那么这两个不等式叫异向不等式.

例如:$2a+3>a+1$ 与 $a^2-3>3a+1$ 是同向不等式.

$3a+2>a+4$ 与 $3a^2-5<2a^2+4$ 是异向不等式.

【例 1】 给出以下判断:

①不等式 $x^2+1>1-x^2$ 是绝对不等式;

②不等式 $x^2-2x+1>0$ 是条件不等式;

③不等式 $|x|+1<\frac{1}{2}|x|$ 是矛盾不等式;

④不等式 $\frac{1}{3}x-\frac{1}{x}>1$ 与 $\frac{2}{x}-x<2$ 是同向不等式.

其中正确的为 ( )

A. ①、② B. ②、③ C. ③、④ D. ①、④

思路点拨 对照绝对不等式、条件不等式、矛盾不等式及同向(异向)不等式的概念作出判定.

解:(1)由于当 $x=0$ 时,不等式 $x^2+1>1-x^2$ 不成立,故判断①不正确.

(2)由于当 $x=1$ 时,不等式 $x^2-2x+1>0$ 不成立,而当 $x\neq1$ 时,它却成立,故判断②正确.

(3)由于 $|x|+1<\frac{1}{2}|x|$ 恒不成立,故它是矛盾不等式,即判断③正确.

(4)④中所说的两个不等式是异向不等式,故判断④不正确.

综上所述,应选择 B.

误点剖析 在判断①与②时，如果不严格对照绝对不等式与条件不等式的定义，就会误认为①正确，而②不正确，避免误判的方法可参照下述评注.

评注：①一个不等式为绝对不等式$\Leftrightarrow$它们的解集为 R；

②一个不等式为条件不等式$\Leftrightarrow$它们的解集为 A 满足$\varnothing \subsetneqq A \subsetneqq R$；

③一个不等式为矛盾不等式$\Leftrightarrow$它们的解集为$\varnothing$.

以上三点可以作为判断一个不等式为何类不等式的依据和方法.

试解相关题

1—1 在不等式：①$2a+1>-a-1$；②$2a^2-1>1-a^2$；③$|a-1|+|a+1|>1$；④$9a^2+6a+1<0$；⑤$\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{1}{2}$中为条件不等式的有______.（写出序号即可）

答案与提示 ①、②

(3)实数比较大小的依据和方法：

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$；如果 $a-b$ 等于零，那么 $a=b$. 反之，它们的逆命题也成立，也就是：

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

由此可见，比较两个实数的大小，基本方法是作差，对差的正负做出判断，即可得出结论. 这里“对差的正负做出判断”是个关键. 有时还要将差变形，有时要讨论.

【例 2】 现给出下列三个不等式：①$a^2+1>2a$；②$a^2+b^2>2\left(a-b-\dfrac{3}{2}\right)$；③$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

其中恒成立的不等式共有 （ ）

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

思路点拨 应先作差 $A-B$，若暂时无法确定差的符号，应将差进行恒等变形，在变形过程中，常用的方法是因式分解和配方.

解：对于①$\because$ $a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant 0$，$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$a^2+1=2a$，$\therefore$ $a^2+1>2a$ 不恒成立；

对于②$\because$ $(a^2+b^2)-2(a-b)=(a^2-2a+1)+(b^2+2b+1)+1=(a-1)^2+(b+1)^2+1>0$，$\therefore$ $(a^2+b^2)>2(a-b-1)$恒成立.

对于③$\because$ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd$，

$\therefore$ 当 $ad=bc$ 时，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2=0$.

$\therefore$ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$ 不恒成立.

综上判断可知：应选择 B.

误点剖析 在判断①、③是否恒成立时，如果忽视特殊情况，就会产生判断错误，而利用“$A>B$ 恒成立$\Leftrightarrow A-B>0$ 恒成立”进行判断，可避免错误发生.

评注：(1)要判定一个不等式恒成立，需要证明，而要判定一个不等式不成立，举出一个反例即可. (2)将①、③中的大于号“$>$”改成“$\geqslant$”后，①、③均恒成立.

试解相关题

2－1 有以下四个不等式：

①$(x+1)(x+3)>(x+2)^2$

②$ab-b^2<a^2$

③$\dfrac{1}{|a|+1}>0$

④$a^2+b^2\geqslant 2|ab|$

其中恒成立的为______.(写出序号即可)

答案与提示 ③、④

【例 3】 a,b 为实数，下面命题中正确的是 ( )

A. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　　B. 若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$

C. 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$　　D. 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$

思路点拨 利用特殊性通过举反例说明命题不真，再结合排除法获得本例的正确选项.

解：(1)当取 $a=0,b=-1$ 时，满足 $a>b$ 及 $|a|>b$，但 $a^2>b^2$ 不成立，故 A 与 B 均为假命题.

(2)当 $a=-1,b=0$ 时，满足 $a^2>b^2$，但 $a>b$ 不成立，故 D 也为假命题.

因此只能选择 C.

误点剖析 有的学生误认为“较大数的平方必然较大”，而选 A. 其实 $a>b$，可得 $a-b>0$，那么在此不等式两边同乘以$(a+b)$时，

①如果 $a+b>0$，则$(a-b)(a+b)>0$，故 $a^2>b^2$；

②如果 $a+b<0$，则$(a-b)(a+b)<0$，故 $a^2<b^2$；

③如果 $a+b=0$，则$(a-b)(a+b)=0$，故 $a^2=b^2$.

因此，当 $a>b$ 时，a^2 与 b^2 的大小并不确定.

评注：事实上，$a>b$ 是 $a^2>b^2$ 的既不充分也不必要的条件，故 A、D 均不正确. B 不正确，而 B 的逆命题却是正确的，即由 $a^2>b^2$ 可推出 $|a|>b$，故 $|a|>b$ 是 $a^2>b^2$ 的必要不充分条件. 我们可以证明 C 是正确的，本例采用特殊值法与排除法相结合达到了“水落石出”的效果.

试解相关题

3－1 设 a、b 为实数，下面命题中不正确的是 ( )

A. 若 $a>b$,则 $a^3>b^3$　　B. 若 $|a|>b$,则 $a^3>b^3$

C. 若 $a>|b|$,则 $a^3>b^3$　　D. 若 $a^3>b^3$,则 $a>b$

答案与提示　B.

【例 4】 已知 $a>b(ab\neq 0)$,试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

思路点拨　要比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小,只要利用已知条件来研究 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 是正数、负数还是为零.

解: $\because$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$,又 $a>b(ab\neq 0)$

(1)当 a,b 同号,即 $a>b>0$ 或 $b<a<0$ 时,则 $ab>0,b-a<0,\frac{b-a}{ab}<0$,

$\therefore$ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(2)当 a,b 异号时,必有 $a>0,b<0$,则 $\frac{1}{a}>0,\frac{1}{b}<0$,$\therefore$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

误点剖析　对以上出现的二种情况都应给予讨论,不能有所偏废.如果忽视某一方面,容易造成解答错误,请予以注意.

评注: 由本例的结论可知:我们不能简单的认为大数的倒数必定小.正确的结论应该是:当两数同号(可以同为正,也可以同为负)时,大数的倒数必定小.

试解相关题

4－1　若 $a<b<0$,则下列不等式中成立的为(　　)

A. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$

C. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a+b}$　　D. $\frac{1}{a+b}>\frac{1}{a-b}$

4－2　已知 $|a|>|b|(b\neq 0)$,试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

答案与提示　4－1　选 D.

4－2　$\because$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$,又 $|a|>|b|(b\neq 0)$,

(1)当 a,b 同号时,

(i)若 $a>b>0$,则 $ab>0,b-a<0,\frac{b-a}{ab}<0$,$\therefore$ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

(ii)若 $a<b<0$,则 $ab>0,b-a>0,\frac{b-a}{ab}>0$,$\therefore$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(2)在 a,b 异号时,

(i)若 $a>0,b<0$，则$\frac{1}{a}>0,\frac{1}{b}<0$，∴ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(ii)若 $a<0,b>0$，则$\frac{1}{a}<0,\frac{1}{b}>0$，∴ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. 不等式的性质

(1)不等式的基本性质

①对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$.

证明：∵ $a>b\Leftrightarrow a-b>0,b<a\Leftrightarrow b-a<0$，

又∵ $a-b=-(b-a)$且正数的相反数是负数，而负数的相反数是正数，

∴ $a-b>0\Leftrightarrow b-a<0$. ∴ $a>b\Leftrightarrow b<a$.

②传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

证明：∵ $a>b,b>c$，∴ $a-b>0,b-c>0$.

∵ $(a-b)+(b-c)>0$，即两个正数的和仍为正数.

∴ $a-c>0$，∴ $a>c$.

说明：1°在上述两性质的证明中，要用到比较大小的定义，还用到“正数的相反数是负数，负数的相反数是正数”，以及“两个正数的和仍为正数”.

2°关于性质②，要正确处理带等号的问题：在传递性的两个不等式中，如果有一个不带等号，那么等号是传递不过去的.

例如 $a\geqslant b,b>c\Rightarrow a>c;a>b,b\geqslant c\Rightarrow a>c$.

而 $a\geqslant b,b\geqslant c$，可推出 $a\geqslant c$，应这样理解：若 $a\geqslant b,b\geqslant c$，$a>c$ 或 $a=c$ 成立，当且仅当 $a=b$ 且 $b=c$ 时才会有 $a=c$.

例如：当 $\alpha\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$时，肯定有 $1\geqslant\sin\alpha$ 且 $\sin\alpha\geqslant\cos\alpha$，但是两个等号成立的条件分别是 $\alpha=\frac{\pi}{2},\alpha=\frac{\pi}{4}$，这就是说两个等号不能同时成立，故只能有 $1>\cos\alpha$.

③可加性：若 $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.

证明：$a>b\Leftrightarrow a-b>0\Leftrightarrow(a+c)-(b+c)>0\Leftrightarrow a+c>b+c$.

说明：性质③是“不等式中任何一项的符号变成相反的符号后可以把它从一边移到另一边”的依据. 所以，也可将可加性作为移项法则.

④加法法则：“同向不等式可加”. $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

说明：此结论可推广至：两个或两个以上的同向不等式两边分别相加，所得不等式与原不等式同向. 需要说明的是：加法法则的逆命题不成立，即 $a+c>b+d\nRightarrow a>b,c>d$. 但可以肯定的是：在 $a>b$、$c>d$ 中至少有一个成立.

⑤减法法则：“异向不等式相减”. $a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$.

说明：只要将 $c<d\Rightarrow -c>-d$，利用加法法则可证.

⑥可乘性：若 $a>b,c>0$，那么 $ac>bc$；若 $a>b,c<0$，那么 $ac<bc$.

说明：1°本性质的证明用到："同号相乘得正"、"异号相乘得负"的运算法则；在使用可乘性时要特别注意研究"乘数的符号".

性质⑥说明：研究乘数 c 的符号是非常关键的. 如当 $c\neq 0$ 时，$c^2>0$，可以由 $a>b$ 推得 $ac^2>bc^2$，而如果 $c\in\mathbf{R}$，则 $a>b$ 可推出 $ac^2\geqslant bc^2$（当 $c=0$ 时取"="号）.

2°推论 1：正的同向不等式相乘不等号方向不变. 即

$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

此推论可推广至两个或两个以上的两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向.

推论 2：异向不等式可以相除，即

$a>b>0,0<c<d\Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

⑦乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{Z},n>1)$.

⑧开方法则：当 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{Z},n>1)$.

说明：1°本性质定理的证明使用的是反证法：应该注意否定$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$会出现两种情况，即$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$和$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，需要分别推出矛盾.

2°若 $a>b>0\Rightarrow a^s>b^s$（s 为正有理数）.

3°$a>b>0\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}(m,n\in\mathbf{N}^*)$，即在不等式两边进行 n 次乘方或 n 次开方是有条件的，而当 m,n 是正奇数时，$a>b\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}$ 可以不加限制条件.

(2)对不等式性质的几点说明：

在上述不等式的性质中，只有 $a>b\Leftrightarrow b<a$，$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$，$a>b>0\Leftrightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n>1)$，$a>b\Leftrightarrow ac>bc(c>0)$ 等是可以逆推的，可以在解不等式和证明不等式中使用. 而 $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$ 等这些只能由前者推后者的性质却只能用在证明不等式中而不能用在解不等式中.

如 $\begin{cases}4x>3\\3x>4\end{cases}$ 的解是 $x>\dfrac{4}{3}$，而如果使用上述性质令两式相加 $7x>7$，∴ $x>1$ 这样就扩大了不等式的解集. 究其原因就是 $7x>7\Rightarrow\begin{cases}4x>3\\3x>4\end{cases}$ 是不成立的，所以在使用上述性质时，要弄清性质成立的条件.

【例 5】 判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；　　(2)若 $\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}$ 则 $a>b$；

(3)$a>b,ab\neq 0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；　　(4)若 $a>b,c>d$ 则 $ac>bd$.

思路点拨 解决这类问题，主要是根据性质判定，其实质就是看是否具备性质所需要的条件.

解:(1)错误. 当 $c=0$ 时不成立.

(2)正确. ∵ $c^2\neq 0$ 且 $c^2\geq 0$, ∴ 在 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 两边同乘以 c^2 不等式方向不变.

∴ $a>b$.

(3)错误. $a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立条件是 $ab>0$.

(4)错误. $a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$, 当 a,b,c,d 均为正数时成立.

误点剖析 如果我们在判断(1)、(4)时,不注意字母的取值范围,忽视有关的特殊值,就会认为(1)、(4)均正确.

评注:在利用不等式的性质判断结论的真伪时,关键要搞清性质定理的条件与所研究的结论的条件是否一致,一致的为真. 而不一致的往往只要举一个反例即可否定这个结论.

试解相关题

5－1 在下列四个命题中,假命题为 ( )

A. 若 $ac^2>bc^2$, 则 $a>b$ B. 若 $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$, 则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. 若 $a<b<0$, 则 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$ D. 若 $a<b<0$, 则 $\frac{a}{b}<1$

5－2 判定下列命题的正误:

①若 $a>b,c>d\Rightarrow a-c>b-d$

②若 $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

③若 $ac>bc$, 则 $a>b$

④若 $a<b<0$, 则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

答案与提示 5－1 选 D.

5－2 ①×; ②×; ③×; ④√

【例 6】 已知 $a<0,-1<b<0$, 则 a、ab、ab^2 的大小关系为 ( )

A. $ab^2>ab>a$ B. $a>ab>ab^2$

C. $ab>ab^2>a$ D. $ab>a>ab^2$

思路点拨 要作出正确的选择,关键是要比较 1、b、b^2 的大小.

解:∵ $-1<b<0$, ∴ $1>b^2>0>b>-1$,

即有:$b<b^2<1$,

两边同乘以 a, 且∵ $a<0$, ∴ $ab>ab^2>a$.

故应选择 C.

误点剖析 由于 $a<0,b<0$, ∴ $ab>0$、$ab^2<0$、$a<0$. 因此在三者中,ab

最大.接下来应判断 a 与 ab^2 的大小,易误认为:$a>ab^2$.事实上,对于两个负数,绝对值大的反而小.

评注:本例也可以用特殊值法去求解,例如:取 $a=-1,b=-\frac{1}{2}$,则 $a=-1,ab=\frac{1}{2},ab^2=-\frac{1}{4}$.故 a、ab、ab^2 的大小关系也就明确了.

试解相关题

6-1　已知 $a<0,0<b<1$,则 a、ab、ab^2 的大小关系为　　　　(　　)

A. $a<ab<ab^2$　　　　B. $a>ab>ab^2$

C. $ab<ab^2<a$　　　　D. $ab>ab^2>a$

6-2　已知 $a<0,b<-1$,则 a、ab、ab^2 从大到小的排列为__________.

答案与提示　6-1　选 A.

6-2　$ab>a>ab^2$.

【例 7】　实数 a,b,c,d 满足下列三个条件:

(1)$d>c$;

(2)$a+b=c+d$;

(3)$a+d<b+c$.

请将 a,b,c,d 按照从小到大的次序排列,并证明你的结论.

思路点拨　本题的条件较多,从何入手?如果两两比较,一般需要进行6次,但如果能找到一个合理的程序,利用传递性可优化解题过程.

解:$\because\ a+d<b+c$,$\therefore\ d-b<c-a$,…(1)

又$\because\ a+b=c+d$,$\therefore\ c-a=b-d$,…(2)

$\therefore$ 由(1)、(2)得 $\begin{cases}d-b<b-d\\a-c<c-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d<b\\a<c\end{cases}$.

由 $d>c$ 得 $a<c<d<b$.

误点剖析　本题获解的关键是由(1)、(2)利用可加性推导出了:$\begin{cases}d<b\\a<c\end{cases}$.如果我们的思维在这里受阻,解题就无法展开.

评注:由于找到了一个合理的程序,使得上面的解法没有节外生枝,解题过程简捷明快.

试解相关题

7-1　已知实数 a、b、c、d 满足下列三个条件:

(1)$d<c$;(2)$a-c=d-b$;(3)$d-c>a-b$.

试确定 a、b、c、d 从大到小的排列.

答案与提示　由(2)得 $d+c=a+b$,将此式分别与(3)式相加可得:$d>a$.