

高正兴 李绍参 等

中学
X U E
D A I
S H U
的
D E
基
J I
础
C H U
与
Y U
拓
T U O
广
G U A N G

中学数理化教师提高丛书

华中理工大学出版社

中学数理化教师提高丛书

中学几何的基础与拓广

杨文茂 欧阳仲威

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

中学几何的基础与拓广 / 杨文茂 欧阳仲威 等编
武汉:华中理工大学出版社, 1997 年 7 月

ISBN 7-5609-1591-1

I. 中…

II. ①杨… ②欧阳…

III. 几何课-中学-教学参考资料

IV. G633.633

中学几何的基础与拓广

杨文茂 欧阳仲威 等编

责任编辑: 林化夷 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编: 430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社照排室排版

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本: 850×1168 1/32 印张: 9.75 字数: 239 000

1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—6 000

ISBN 7-5609-1591-1/G·153

定价: 9.80 元

(本书若有印装质量问题, 请向出版社发行科调换)

内 容 提 要

本书是《中学数理化教师提高丛书》之一,其主要内容有中学几何的方法和演绎原理;平面解析几何的基础与拓广;经典微分几何及现代阐述;整体微分几何简介;几何学的其他有关问题.

本书题材丰富新颖,其内容来源于中学,又高于中学,是中学数学联系大学数学的桥梁.对中学几何的有关知识,抓住其实质认真分析加于拓广,并注意提高.本书体现科学性、时代性、系统性、实用性和可读性.

本书的读者对象是中等学校教师、大学理科学学生以及成绩优秀的高中生和数学爱好者.

《中学数理化教师提高丛书》编委会

主编 郑隆圻 王心宽

编委 (以姓氏笔画为序)

王心宽	孙正川	李绍参	陈文生
欧阳仲威	范鸿章	郑隆圻	杨文茂
林六十	汤光宋	梁法驯	张兆华
姚磊明	龚义建	高正兴	高仕汉
裴幼强	樊 恺		

总 序

切实加强中学教师队伍特别是青年教师队伍的建设,是教育面向 21 世纪的一项紧迫的战略任务。为了帮助中学数理化教师提高思想与业务素质以及教学能力、教研能力、科研能力,促进中学教育教学质量的提高,我们组织编写了这套《中学数理化教师提高丛书》。

本丛书遵循以下编写原则:充分考虑 21 世纪经济建设与教育发展的需要,认真总结多年来中学教育改革的经验,以及开展中学教师继续教育的研究成果;编著的内容源于中学、又高于中学,努力挖掘中学知识与大学知识之间的联系;对中学有关知识内容,抓住实质深刻阐述,并适度拓广,插漏补缺,重点提高;努力做到应用正确的哲学与方法论和先进的教育理论指导所撰内容,并融为一体,注重科学性、时代性、系统性、实用性与可读性;尽量不与已有中学教师进修书籍重复,做到有创新的见解,有独到的分析,有新颖的内容,有作者的研究成果。丛书由郑隆圻、王心宽等 10 多位教授、专家组成编委会,由在中学数理化教育方面有研究成果与实践经验的教授、专家,以及有研究实力的中青年同志撰稿,其读者对象是各类中等学校数理化教师、教研工作者、大学理科专业学生、高中阶段部分成绩优秀的学生,以及高中以上文化程度的自学者。

我们深信,这套丛书的出版,将对中学师资队伍建设与中学理科教育改革,起到积极的促进作用。

《中学数理化教师提高丛书》编委会

一九九六年四月于武汉

序 言

这套丛书的出版是一件很有意义的工作. 由于笔者工作范围之限, 只能对数学方面提出一点看法. 如果还多少有一些想法对其他学科也有些作用, 则甚至有一些喜出望外了.

自文化大革命结束以来, 中学教育无论在数量和质量方面都有了飞跃的进展. 比之当时百废待兴的局面自然是今非昔比. 尽管在未来几十年中改革和发展都还会有极多复杂的情况出现, 但是总可以采取比较“正规”的, 按教育客观规律办事的方法, 而临时性的措施应该更少一些了. 因此, 中学教师的继续教育问题就亟待更有系统地提出与解决了.

当然, 可以要求中学教师都有更高的学历; 如果满足不了, 也可以用某种形式来补一补课; 也可以开一些研讨会等等来帮助解决某些问题, 但是根本之图是要求中学教师能多读一点书. 这样就提出了一问题, 读什么书? 怎样读书才能有用? 有不少人认为教什么就学什么就行了, 不少人(包括高等师范院校相当一批师生在内)已经感到念这么多高等数学是没有用的. 有不少人认为这违反了“师范性”反而造成思想不安、队伍不稳, 如此等等. 也有完全相反的看法, 认为只有多念更高深的数学课程, 本科完了还有研究生, 这样才能从“根本上”提高水平, 从“根本上”稳定队伍, 从“根本上”解决师范性问题. 那么什么是“师范性”呢? 为人“师表”, 应该有什么样的“规范”呢? 作为一个教师, 特别是一个中学教师, 他的工作对象是“人”, 是十来岁思想最活跃, 最具可塑性的人, 要去塑造一个人, 有思想政治的要求, 有道德情操的要求, 当然还有生活能力、劳动技能等等, 而从数量上“作大头”的仍是科学文化方面的要求. 对于一个数理化教师, 不但要求他以自己的思想情操去感化

学生,更要求他能从自己的专业方面去塑造一个人。当然,例如一个数学教师不应该以为自己的学生将来很多人成为数学家。但是,数学不只是谋生技能,更不能只是进入高一级学校的敲门砖。从这门科学中,我们看到人类是怎样解决他们面临的许多问题,又怎样从具体问题形成了许许多多数学定理、数学理论,……,人们曾经不只是为了某个具体的目的去研究一个个具体的数学问题,而是追求深层次的真理,又怎样由此而造出美好的世界。这就是创造。我们现在常说要培养“能力”。其实,哪里有什么“抽象的能力”,如果不进行创造的实践而侈谈“能力”的培养,犹之乎不下水而谈游泳的道理一样。一个十来岁的孩子解一个简单的数学题,他可能在创造,而范进 60 岁中举,哪怕是中了状元也没有什么创造,也谈不上什么能力。当然,写八股文也算一种“能力”吧!问题不在于是念高等数学还是初等数学,而在于如何对待这孩子能够接受的知识,是一个态度问题。我不相信这里有什么固定的方法,更没有什么诀窍。可以看一看每一个事业有成的人,几乎都受到一两位中学教师的影响,而这位教师的影响,最深刻的不仅在于具体的知识,而在于他的情操,他对待科学的态度等等,即在于他自己的科学素质。

我们常说把大学的知识和中学知识结合起来,其实这是培养高的科学素质的根本之途。有一些历史的经验:19 世纪末到本世纪初的德国大数学家克莱因,写了一部名著《高观点下的初等数学》,应该感谢湖北教育出版社,愿意赔本出这本书,其实这是作者多年利用假期为中学教师讲课的教材,而且实际上把自己的研究的成果都讲给教师们听。直至今日我们再读这本书仍感到富有启发,使人思为泉涌,可以懂得许多自以为再也没有问题的东西,一句话,可以懂得什么叫把大学和中学结合起来。我愿向每一个有志于提高自己数学水平的数学教师推荐这本书,条件是这位教师应该读过相当于大学一、二年级的数学课程。另一个范例是前苏联的经验。其中最宝贵的是,第一流的数学家,甚至是数学大师,

也都愿意为中学教师的提高尽心尽力,最近一位同志翻译了前苏联的大数学家辛钦写的《数学分析八讲》,看一下这位名重一时,贡献卓著的概率论大师,是怎样讲最基本的数学分析知识,从什么是实数,什么是函数开始,而且并不超过大学一年级的内容,看一下他的讲法和我们自己对这门最基本的数学课程的理解,相距何在,就知道为了提高自己的“素质”还要下多少功夫.现在大家都在讲素质教育,如果在科学文化方面也要提出素质问题而不只是谋生技能,更不是进入高级学校的敲门砖的话,那么最重要的是教师的素质.

这里我们有意不谈对数学有特殊重要性的解题,训练问题,也没有讲到特殊作用的数学竞赛问题,这是需要专门讨论的.但是可以说一句,这不会和上面讲的一切矛盾.

十分高兴,现在有一批有志者在本世纪之末开始编写这一套丛书,决心在这个方向上走上踏实的一步.尽管征途漫漫,困难重重,也不能以上面提到的大师们和他们的经典著作来要求于这丛书.方向是正确的,工作是十分有意义的,希望读者会从这丛书中得到启发,得到益处,更希望有更多的有志者投入这个工作.

齐民友

1996年6月1日于珞珈山

前 言

几何是中学数学的重要内容,由于基础教育的局限性,其对象和目的决定中学几何在内容上是浅显的,从理论的角度来说也不严谨.本书阐述中学几何的基础,并就主要内容作适度的拓广.

全书共分七章.第一章从历史发展的角度就几何学的内容、研究几何学的方法等,介绍若干与中学几何有联系的几何学分支的概况,以明确中学几何在几何体系中的地位.考虑到中学几何的主要部分是建立在演绎法基础上的逻辑体系,我们在第二章阐述中学几何的演绎原理,在介绍 Euclid 的《几何原本》,Hilbert 公理系统,分析中学几何公理系统的特点的基础上,就几何教学中的思维训练发表作者个人的看法.用坐标建立几何对象的代数模型,是自 Descartes 以来研究几何学的主要方法.在第三章中我们介绍平面解析几何基础,并就平面解析几何中的问题,代数与几何的一些联系展开讨论.第四章把平面解析几何拓广到 n 维欧氏空间,并介绍仿射几何、射影几何与线性几何,重点放在与初等几何有密切联系的内容.考虑到微积分作为中学数学的重要内容是一个必然的趋势,而且初等几何中许多基本问题在微分几何中有完美的表述.我们写了第五章和第六章.第五章是局部微分几何,用初等向量分析和外微分、活动标架法两种方式阐述.第六章集中了三维欧氏空间的曲线和曲面的初等整体结果.第七章谈了四个方面的问题.抽象化是现代几何发展的一大特点,因而介绍 Riemannian 几何的主要内容.拓扑学是现代数学的重要基础,是从几何发展演变而来的,在重点介绍与微积分有紧密联系的点集拓扑学以后,集中谈了以多面体为原始模型的同调论的一些内容.组合数学中的一些几

何问题,常见于竞赛数学教科书中,我们通过一些例题叙述了若干基本问题.计算机的发展与应用,引起社会的巨大变革.在最后一节中,介绍几何定理的机器证明的概况及图论,图论虽是计算机科学的基础理论,但把重点还是放在用图论解决一些初等几何中的问题上.

我们要特别指出的是:数学各分支的基础,是严密、抽象的数学理论,决不是简短的篇幅能够说清楚的.因此,我们对所涉及的基础性的理论问题,只给出一个概况,或予以形象描述,指出一个方向,而要深入探讨时,可查阅有关的专著.数学的严密性是相对的,基础教育中的数学的不严密性是绝对的,但教育者应该做到心中有数.

几何学是近、现代数学最活跃的领域,现代几何与数学各分支的发展交错穿插,工具不断更新、成果日新月异.但任何尖端的问题,始终植根于现实生活中,都有其初等的模型.而大量具体、形象的实际问题抽象化即形成数学理论的各分支.随着科学技术的不断进步,人们对事物认识的再深化,推动数学各分支的近现代发展.本书是从一个侧面阐述高等数学、现代数学与初等数学关系的一个尝试.

几何是中学生普遍感到困难的课程,也是历史上数学教育改革冲击最大的学科.对几何在中学数学中的地位,几何教材中各部分内容的侧重等,有过颇多的争议.我们认为:数学教育的改革和任何社会变革一样,要想达到预期的效果,不能脱离一个国家数学教育的现状和历史,不论采取何种模式,一个知识渊博的教师,热爱自己的学生,辅以恰当的教学方式,能取得最佳教学效果,培养社会需要的优秀人才.

书中涉及数学各领域的内容很多,对于出现的概念和符号尽量予以解释或描述,仍有一些需要查阅有关的资料.

撰稿人杨文茂、欧阳仲威、姚荣国、罗韞逊、毕少翔是高等学校、中专和中学讲授各层次几何课程的教师,写作过程参阅了许多

前辈和同行的专著(见附录),也凝聚着作者几十年教学经验的点点滴滴。

全书由欧阳仲威统稿,杨文茂审校。

作 者

1996年6月

目 录

第一章 什么是几何学	(1)
§ 1.1 研究几何学的方法	(1)
§ 1.2 构成几何图形的元素	(3)
§ 1.3 Klein 的几何思想	(4)
§ 1.4 几何学的维数与分形几何	(6)
§ 1.5 中学几何在几何体系中的地位	(11)
第二章 中学几何的演绎原理	(12)
§ 2.1 Euclid 的《几何原本》	(12)
§ 2.2 关于平行公理的讨论	(16)
§ 2.3 Euclid 几何的公理体系	(20)
§ 2.4 非欧几何学简介	(26)
§ 2.5 中学几何的演绎体系	(33)
§ 2.6 浅谈几何思维训练	(36)
第三章 平面解析几何基础	(46)
§ 3.1 几何与代数的桥梁——坐标	(46)
§ 3.2 几何变换的代数表示	(51)
§ 3.3 《平面解析几何》问题探索	(57)
§ 3.4 向量及在中学数学中的应用	(73)
§ 3.5 初等代数与解析几何	(90)
第四章 平面解析几何的拓广	(97)
§ 4.1 n 维欧氏几何学	(97)
§ 4.2 仿射变换与初等几何	(106)
§ 4.3 射影几何简介	(120)
§ 4.4 线性几何	(139)
第五章 经典微分几何及现代阐述	(149)
§ 5.1 微分几何的产生与发展	(149)

§ 5.2 经典微分几何	(153)
§ 5.3 微分形式与活动标架	(168)
§ 5.4 E^3 中曲线与曲面的现代阐述	(176)
第六章 整体微分几何简介	(194)
§ 6.1 平面曲线的整体性质	(194)
§ 6.2 曲面的整体性质	(205)
§ 6.3 空间曲线的整体性质	(223)
§ 6.4 凸曲面的整体性质	(227)
§ 6.5 极小曲面	(234)
第七章 一些其他的有关问题	(244)
§ 7.1 Riemannian 几何	(244)
§ 7.2 拓扑学大意	(256)
§ 7.3 组合数学与几何	(268)
§ 7.4 计算机与几何学	(278)
外文人名索引	(292)
参考书目	(294)

第一章 什么是几何学

几何学是研究现实世界空间形式及其和数量间的关系的一门科学,是数学的一个重要分支.几何学的科学体系的形成,人们公认是以古希腊数学家 Euclid 的《几何原本》的问世为标志,几何学是最古老,成熟最早的数学分支.几何学发展到现在,其内容、形式均发生了深刻的变化.本章扼要地从历史发展的顺序,介绍研究几何的方法,几何图形的构成元素, Klein 关于几何学按变换群分类的思想及几何学的维数,介绍若干与中学几何密切相关的几何分支的概况.粗略了解这些几何分支的内容,对于认识中学几何在整个几何体系中的地位,探讨中学几何的基础并由此作必要的拓广,是有帮助的.

§ 1.1 研究几何学的方法

几何学——Geometry 一词的原始含义为测地术.史料记载:生活在尼罗河流域的古埃及人,由于河水每年泛滥,两岸田亩地界,尽被淹没,事后必须设法测量,重新勘定田地的界线.经常性的土地测量,古埃及人从经验中得到不少的几何知识.金字塔是世界的一大奇迹,这些金字塔的工程非常浩大,而它的精美造型,直到现在仍令人十分叹服.建造金字塔不仅要有高超的建筑技巧,还需要精确的几何计算.在文明古国巴比伦、埃及的历史记载中,两、三千年前人们已掌握了相当多的关于几何图形的面积、体积等的计算公式.

在我国,最初的几何概念和几何知识可以追溯到远古时代.考古工作者发掘出来的石器时代的陶瓷上,殷商的钟鼎上都有精美的几何图案,说明我们的祖先在石器时代就有了几何图形的概念.

我国最早的数学书《周髀算经》和《九章算术》里也载有许多关于几何的问题. 战国时代公元前 400 年前墨子所著《墨经》十五卷内就有许多详细的几何知识. 但不论是古代巴比伦、埃及还是我国, 在 Euclid 时代以前, 人类积累的几何知识, 只能是一些具体的, 无联系的经验公式, 用以解决生产和日常生活中所遇到的问题, 谈不上有意识的抽象思维, 谈不上严密性, 且经后人证实还有一些错误存在. 古代希腊人是理论数学的创始者, 这种创造是从几何开始的. 古埃及的几何知识传到希腊以后, 一批希腊学者, 他们是数学家同时也是哲学家, 或者是爱好数学的哲学家, 着手对人类有史以来的几何知识进行整理与研究. Pythagoras、Plato、Euclid 等人是他们中的杰出代表. 流传至今的《几何原本》是人类历史上第一部几何著作, 也是第一部理论数学著作, 其内容之丰富不说, 更主要的是它开创的用逻辑推理研究几何的方法, 被数学各分支及科学各领域沿用至今. 人们把这种用逻辑推理的演绎方式研究几何的方法称为综合法或公理法.

17 世纪的工业革命, 推动了数学的发展. 法国哲学家、数学家 Fermat、Descartes 创立坐标理论, 建立几何元素与数或数组的对应, 几何图形与方程或方程组的对应, 开辟了用代数方法研究几何学的新纪元, 这是几何学发展史上的又一个里程碑. 它一方面解决了许多用综合法不能解决的难题, 另一方面又对许多代数理论给予形象直观的几何描述. 坐标法不仅对几何, 而且对数学的其他分支乃至整个科学的发展产生了深远的影响. 坐标法从另一角度提高了几何学的抽象程度, 给几何学的发展注入了活力. 人们称这种通过坐标用代数作为工具研究几何学的几何分支为解析几何学.

17 世纪数学的又一伟大成就是 Newton、Leibniz 各自独立地创立了微积分. 它从产生之日起就与几何学密不可分. 尤其是 Newton, 他大量沿用几何图形给微积分以直观的描述, 同时用微积分作为工具, 研究曲线、曲面的基本性质, 并促使一部分数学工

作者专门从事于用微积分作为工具来研究几何学,人们称之为微分几何.微分几何的产生人们公认是以 Gauss 发表其文章《关于曲面的一般研究》为标志. Riemann 发展 Gauss 的微分几何思想,把对物质世界运动的多因素现象抽象出任意维数的几何空间.把微分几何的对象从直观的曲线、曲面推广到被他称为“流形”的 n 维抽象的几何空间,而传统的微分几何仅是它的特例,人们把用微分几何作为工具研究高维抽象几何图形性质的几何分支称为 Riemann 几何.

初期的微分几何以研究曲线、曲面的局部性质为特征,而局部和整体是矛盾的统一体.在微分几何发展的各个阶段都有一些整体的结果产生,例如:著名的等周不等式,四顶点定理等,但都是孤立的,初等的.随着代数拓扑、李群、微分拓扑及纤维丛理论的发展,人们对几何对象的整体性质,局部性质与整体性质的关系倾注更大的热情,逐渐形成了一门新的几何分支——整体微分几何学.

§ 1.2 构成几何图形的元素

几何学诞生初期,人们把构成几何图形的基本元素看成点——几何图形就是点的集合或点的轨迹.随着社会的发展,人们对事物认识的深化,发现构成几何图形的基本元素,不仅可以是点,而且还可以是线、平面,甚至是其他的曲线、曲面.这种观念一方面在实际上有其价值,而且在理论上有着深远的意义.平面上的一个圆可以看成到一个定点的距离等于定长的点运动而成,而美术工作者在作圆时,先作一个正方形,每边三等分作直线,得八边形,再将八边形每边三等分,再作直线…这些直线构成的图形为圆(图 1-1 与图 1-2).

从代数的角度来说, (a, b) 通常看成是平面上点的坐标.但一条不过原点的直线可以写成 $ax + by + 1 = 0$. 若 (x, y) 固定,令 $(a,$