

高等数学(一)

微 积 分

杨立文 主编

C
A
L
C
U
L
U
S

中国物价出版社

面向21世纪的立体教材

高等数学(一)

微积分

主 编 杨立文
副主编 杨丽丽 梁宝钰
燕建梁

中国物价出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学. 1, 微积分/杨立文主编. —北京: 中国
物价出版社, 2003. 8

ISBN 7-80155-604-6

I 高... II 杨... III. 微积分—高等学校: 技术
学校—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 072274 号

出版发行/中国物价出版社(邮编:100837)

地址:北京市西城区月坛北小街2号院3号楼

电话:读者服务部 68022950 发行部 68033577)

经销/新华书店

印刷/山西文博印业有限公司印刷

开本/850×1168毫米 大32开 印张/18.375 字数/461千字

版本/2003年8月第1版 印次/2003年8月第1次印刷

印数/5000册

书号/ISBN 7-80155-604-6/O·1

定价/27.60元

《高等数学》教材编委会

主 任:景滨杰

委 员:(以姓氏笔画为序)

丁琴芳 杨丽丽 宋建梅

贾俊义 梁宝钰 董竹青

燕建梁

序

数学,是科学的语言,是各类专业的理论基础。

杨立文先生主编的这部《高等数学》,有质量、有新意、有特色:独特的构思。本书在语言表述、内容设计上下了功夫,真正做到了深入浅出。基础弱的读者,也将通过本书轻松地入门开窍,学到真东西,进而学会读书。考虑到发展创造性智力技能这一核心要求,全书着力阐释概念、原理,既细致准确,又形象直观。大量的精选例题,引导读者掌握基本概念、基本原理、基本方法及其有机联系,以及数学的分析思想。

丰富的内容。全书严格按照教育部面向 21 世纪教材的规划,包容了工科类专科和文科类专、本科教育以至“考研”的基本内容,适用于管理、经济、农林、生物等多类专业,可使自学考试、职称考试等多类读者各取所需。有利于“知识面宽、应用能力强、素质高”培养目标的实现。

立体的结构。按照不同的需要层次,分别构建了知识框架,清晰地展现了内容的基本体系。

宽阔的平台。书中注重深化概念和建模训练,渗透数学的思想原理,展现数学与其他知识的结合,为读者获得更多的数学知识和其他专业知识,提供了多种“接口”。为读者通向知识高速公路,提供了一座立交桥。

传统上,许多教材偏重以抽象的数学语言表述概念和证明定理,这对于仅以数学为工具的读者而言,是不合适的。编者对此认识比较清醒并处理得当,是本书的又一特色,也使本书非常适合于高等职业教育。

作者以普及数学知识的愿望,使本书具有自学辅导书的特点。学习高等数学的各类读者,包括有志于自学成才者,都将从本书中获得补益。

愿它在教学实践中早臻完美。

张亚光 王 森

编写说明

钱学森老先生在很早以前,就勉励我们要重视科学普及工作,重视数学知识的普及。

遵照钱老的教诲,我们确立了“通俗而又严谨,实用而又清晰”的理念,于2000年出版了《管理应用数学—微积分》。以该书为基础,积我们课程建设的心得和国内外专家、同仁的宝贵经验,现决定出版本教材。

人们常说,兴趣是学习的前提,信心是学习的保证。本书力求通俗易懂,并尽可能提供原汁原味的数学营养,使读者轻松进入数学的奇妙世界,并得其要旨。

本书注重实用。一方面,廓清原理、明晰概念,给读者以数学知识的基本结构;另一方面,着力体现数学在应用领域的重要作用。

作为立体教材,全书以管理、经济等文科类的专科教育为基本需要层次;其他需要层次的读者请注意:在正文和习题中,标有*号的,主要供文科类本科选用;标有※号的,主要供工科类专科选用;兼有这两个符号的以及楷体内容,供各类读者选学。全书包含了文科类“考研”的基本内容。各章习题通常分为A、B两部分,A部分为文科类专科的基本练习,B部分可用作补充、加强,也可供其他各类读者选用。

书后附有初等数学知识,附有大綱,供参阅;各章后附有小結,帮助读者掌握基本内容,理清逻辑联系。

高等职业技术教育,在台湾和国外,已发展到了培养硕士、博士的教育层次。他们重视基础理论,从“技术微积分”开始,注重“工程”与“技术”的衔接。作为借鉴,本书力求将知识综合和杂交,以期培养学生的创造性智力技能。

本书的编写,得到了校领导张改娥教授与任玉平教授的强有力支持。张亚光教授、王森教授担任主审,给了编者许多指导,提供了丰富的宝贵经验。在此,编者向四位教授表示由衷的谢意。

我们深知,写一部好教材,需要深厚的专业功底,也需要丰富的教学实践,厚积薄发。殷望专家、同仁不吝指正,以利于我们提高、改进。

编 者

目 录

第一章 函数	(1)
第一节 集合	(1)
一、集合及其表示法	(1)
二、实数集	(3)
第二节 函数的概念和表示法	(7)
一、常量与变量	(7)
二、函数的概念	(8)
三、函数的表示法	(13)
第三节 函数的简单性质	(14)
一、奇偶性	(15)
二、单调性	(16)
三、有界性	(17)
四、周期性	(17)
第四节 反函数	(18)
第五节 基本初等函数	(21)
一、常值函数 $y = c$	(21)
二、幂函数 $y = x^a$ (实数 $a \neq 0$)	(21)
三、指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	(22)
四、对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	(22)
五、三角函数	(23)
六、反三角函数	(23)
第六节 复合函数 初等函数	(25)

一、复合函数.....	(25)
二、初等函数.....	(27)
第七节 函数在经济管理中的应用	(28)
一、线性函数的应用.....	(28)
二、非线性函数的应用.....	(29)
小结	(32)
习题一	(34)
第二章 极限与连续	(42)
第一节 数列的极限	(42)
一、数列.....	(42)
二、数列的极限.....	(43)
第二节 函数的极限	(47)
一、 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	(47)
二、 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	(50)
三、无穷小与无穷大.....	(53)
第三节 极限的运算法则	(54)
第四节 两个重要极限	(58)
一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(58)
二、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	(61)
第五节 无穷小的比较	(63)
第六节 函数的连续性	(66)
一、函数的连续性.....	(66)
二、函数的间断点.....	(67)
三、初等函数的连续性.....	(69)
四、闭区间上连续函数的性质.....	(72)

小结	(73)
习题二	(74)
第三章 导数与微分	(85)
第一节 导数的概念	(85)
一、引例	(85)
二、导数的定义	(87)
三、求导数举例	(89)
四、导数的几何意义	(91)
五、可导性与连续性的关系	(93)
第二节 导数的基本公式与运算法则	(94)
一、函数的和、差、积、商的求导法则	(95)
二、反函数的求导法则	(97)
三、复合函数的求导法则	(98)
第三节 函数的导数运算	(101)
一、初等函数的导数运算	(101)
二、隐函数的导数运算	(103)
※三、参数方程所确定的函数的导数	(104)
※四、相关变化率	(106)
第四节 高阶导数	(106)
第五节 微分及其应用	(109)
一、微分的定义	(110)
二、微分的几何意义	(111)
三、微分的运算	(112)
四、微分的应用	(114)
小结	(115)

习题三	(117)
第四章 导数的应用	(127)
第一节 中值定理	(127)
第二节 洛比达法则—不定式的定值法	(134)
第三节 函数的单调性与极值	(139)
一、函数的单调性	(139)
二、函数的极值	(141)
三、最大值与最小值	(144)
第四节 变化率的经济应用—边际分析与弹性分析	(148)
第五节 函数图形的描绘	(153)
一、曲线的凹凸性与拐点	(154)
二、曲线的渐近线	(155)
三、函数图形的描绘	(157)
※第六节 曲率	(159)
一、曲率的概念	(159)
二、曲率的计算	(160)
小结	(162)
习题四	(163)
第五章 不定积分	(173)
第一节 不定积分的概念	(173)
一、原函数的概念	(173)
二、不定积分的概念	(174)
三、不定积分的几何意义	(175)
四、不定积分的性质	(176)

第二节 直接积分法	(178)
一、不定积分基本公式	(178)
二、直接积分法	(179)
第三节 换元积分法	(182)
一、第一类换元积分法	(182)
二、第二类换元积分法	(191)
第四节 分部积分法	(196)
※第五节 几种特殊类型函数的不定积分	(201)
一、有理函数的不定积分	(201)
二、三角函数有理式的不定积分	(204)
三、其他说明	(204)
小结	(205)
习题五	(207)
 第六章 定积分	 (216)
第一节 定积分的概念	(216)
一、引例	(216)
二、定积分的定义	(219)
三、定积分的几何意义	(221)
第二节 定积分的基本性质	(223)
第三节 微积分基本定理	(227)
一、一个明显的物理事实	(227)
二、定积分与不定积分的关系	(228)
三、牛顿—莱布尼兹公式	(232)
第四节 定积分的换元积分法与分部积分法	(234)
一、定积分的换元积分法	(234)

二、定积分的分部积分法	(239)
第五节 定积分的应用	(241)
一、几何上的应用	(241)
※二、物理上的应用	(250)
三、经济上的应用	(252)
第六节 反常积分(广义积分)简介	(257)
一、无限区间上的反常积分(无穷限积分)	(257)
二、无界函数的反常积分(瑕积分)	(259)
小结	(261)
习题六	(262)
 第七章 多元函数	(273)
第一节 空间解析几何与向量代数简介	(273)
一、空间直角坐标系	(273)
二、曲面与方程	(276)
※三、向量代数初步	(282)
第二节 多元函数的概念	(292)
一、多元函数的定义	(293)
二、二元函数与它的几何意义	(293)
三、二元函数的极限与连续性	(295)
第三节 偏导数与全微分	(298)
一、偏导数及其几何意义	(298)
二、全微分	(304)
※三、方向导数与梯度	(308)
※四、微分法在几何上的应用	(311)
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法	(315)

一、复合函数的微分法	(315)
二、隐函数的微分法	(321)
第五节 多元函数的极值	(323)
一、二元函数的极值	(323)
二、条件极值 拉格朗日乘数法	(328)
第六节 二重积分	(330)
一、二重积分的概念与性质	(330)
二、二重积分的计算法	(334)
※三、二重积分的应用	(351)
※第七节 三重积分简介	(353)
※第八节 曲线积分	(358)
一、对弧长的曲线积分	(358)
二、对坐标的曲线积分	(360)
三、两类曲线积分的关系	(364)
四、格林公式及其应用	(365)
※第九节 曲面积分	(369)
一、对面积的曲面积分	(369)
二、对坐标的曲面积分	(371)
三、两类曲面积分之间的联系	(375)
四、各种积分间的联系	(377)
小结	(382)
习题七	(384)
 第八章 无穷级数	 (405)
第一节 无穷级数的概念与基本性质	(405)
一、无穷级数的概念	(405)

二、无穷级数的收敛与发散	(406)
三、无穷级数的基本性质	(408)
第二节 正项级数	(410)
第三节 任意项级数 绝对收敛	(414)
第四节 幂级数	(417)
一、幂级数的基本概念	(417)
二、幂级数的运算	(421)
第五节 函数展开成幂级数	(424)
一、泰勒级数	(424)
二、函数展开成幂级数	(426)
第六节 幂级数在近似计算中的应用	(430)
※第七节 傅立叶级数	(432)
一、傅立叶级数的概念	(432)
二、函数展开成傅立叶级数	(433)
小结	(438)
习题八	(440)
 第九章 微分方程与差分方程简介	 (447)
第一节 微分方程的基本概念	(448)
第二节 一阶微分方程	(450)
一、可分离变量的微分方程	(450)
二、齐次微分方程	(452)
三、一阶线性微分方程	(453)
第三节 可降阶的高阶微分方程	(457)
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	(457)
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的二阶微分方程	(457)

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的二阶微分方程	(458)
第四节 二阶常系数线性微分方程	(459)
一、二阶常系数线性齐次微分方程	(459)
二、二阶常系数线性非齐次微分方程	(463)
第五节 差分方程的基本概念	(469)
一、差分	(469)
二、差分方程的概念	(470)
第六节 一阶与二阶常系数线性差分方程	(472)
一、一阶常系数线性差分方程	(472)
二、二阶常系数线性差分方程	(477)
小结	(483)
习题九	(484)
附录 I 初等数学公式	(491)
附录 II 简易积分表	(508)
附录 III 常见的二次曲面简表	(520)
附录 IV 山西高职教育专升本数学考试大纲	(522)
习题参考答案	(529)

第一章

函 数

第一节 集 合

一、集合及其表示法

集合是数学中的一个原始概念,是由人们生活中“集体”、“集团”等具体概念抽象出来的。

所谓集合,就是具有某种特定性质的事物或对象的全体。而构成集合的各个事物或对象称为该集合的元素。例如:

- ① 一个剧场的所有座椅;
- ② 某院校的全体学员;
- ③ 掷两枚骰子,其所有可能的结果;
- ④ 某工厂的所有产品;
- ⑤ 形如 $y = ax^2$ (a 为非零实数) 的所有二次函数;
- ⑥ 直线 $x + y + 1 = 0$ 上的所有点;

以上都是集合。

通常以大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,以小写字母 $a,$

$b, c, \dots$ 表示集合的元素。若 a 是 A 的元素, 则记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A); 若 a 不是 A 的元素, 则记作 $a \notin A$ 或 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A)。

集合中元素的个数称为集合的**基数**。若集合的基数有限, 则称此集合为**有限集合**; 否则称为**无限集合**。

集合常用的表示法如下:

① **穷举法** 在花括号中不重复地列出集合的所有元素以表示集合。如掷一枚骰子可能得到的点数的集合 A , 以穷举法表示为:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

而方程 $(x+1)(x-2)(x-3) = 0$ 的根构成集合 B , 表示为:

$$B = \{-1, 2, 3\}$$

② **图示法** 用平面区域表示集合, 区域内的点表示元素。这种表示法在讨论集合的关系时显得十分直观、形象。

③ **构造法** 如果 B 是具有某种特征的元素 x 的全体组成的集合, 就表示为

$$B = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}$$

这里所谓 x 所具有的特征, 实际就是 x 作为集合 B 的元素而具有的充分必要条件, 即:

$$x \text{ 具有某种特征} \Leftrightarrow x \in B$$

例如, oxy 坐标系即平面直角坐标系中, 围在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内部的点 (x, y) 构成的集合为

$$M = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数}, x^2 + y^2 < 1\}$$

在集合的讨论中常常会涉及到集合间的关系、运算及其规律。

当任意 $a \in A$ 时, 必有 $a \in B$, 则称集合 A 包含于集合 B , 记为 $A \subseteq B$, 此时常称 A 为 B 的子集。

称集合 A 与集合 B 的所有元素构成的新集合为 A 与 B 的并集, 简称为并(或和) 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$