2005

2005 硕士研究生入学考试

"考试虫"数学(三)8套模拟试卷

考试虫 防伪网
防伪区（刮开此层即见密码）
www.sinoexam.com

主编：教育部考研数学资深命题专家

蔡燧林教授(1992～2000年命题)

胡金德教授(1989～1997年命题)

范培华教授(1987～2000年命题)

李恒沛教授(1987～2001年命题)

王式安教授(1987～2001年命题)

周概容教授(1987～2003年命题)

赠30元

网上超值服务

航空工业出版社

2005 硕士研究生入学考试

"考试虫" 数学(三) 8 套模拟试卷

主编：教育部考研数学资深命题专家
蔡燧林教授(1992～2000 年命题)
胡金德教授(1989～1997 年命题)
范培华教授(1987～2000 年命题)
李恒沛教授(1987～2001 年命题)
王式安教授(1987～2001 年命题)
周概容教授(1987～2003 年命题)

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试"考试虫"数学8套模拟试卷/王式安等主编. —北京：航空工业出版社，2004.8

ISBN 7-80183-423-2

Ⅰ.硕... Ⅱ.王... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第070805号

硕士研究生入学考试"考试虫"数学8套模拟试卷

Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Kaoshi "Kaoshi Chong" Shuxue 8 Tao Moni Shijuan

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

发行电话:010-82863351/2 010-82867079

010-64978486 010-84926529

北京富生印刷厂印刷 全国各地新华书店经售

2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:35.5 字数:670千字

印数:1—8000 全四册定价:48.00元

前　言

本书特点：

1. 含金量高. 教育部考研数学试题的命制经过多年的风风雨雨形成了一套成熟的运作体系，其命题人员、命题思路具有明显的延续性和稳定性，从而确保了极强的科学性. 我们荣幸地邀请到教育部考试中心，考研数学资深命题人员：蔡燧林教授（1992～2000 年命题)、胡金德教授（1989～1997 年命题)、范培华教授（1987～2000 年命题)、李恒沛教授（1987～2001 年命题)、王式安教授（1987～2001 年命题)、周概容教授（1987～2003 年命题)，每套试卷均由以上教授严格按照 2005 年考研大纲要求、精选材料、逐题推敲、优化设计而命制完成. 题型和题量与 2005 年考研试题完全一致，并按考试大纲中的样题排版. 本书编者既是数学考试大纲的制定者，又是多年的数学命题人，对考研数学命题绝对有最深刻、最权威的把握. 可以断言，由他们所编写的这 8 套试卷，无论从深度、广度，还是风格都与真题高度一致；对考生而言，这 8 套试卷的含金量是最高的.

2. 所有习题解答准确详尽. 鉴于有些同类辅导用书没有给出解题的正确详尽过程，给考生使用带来不便，本书对所有习题（包括填空、选择）都给出了清晰、翔实的解答. 本书通过试卷解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和最新发展趋势，让全国的考生共享名师的指点，以节约最后复习阶段的宝贵时间，帮助考生取得理想的成绩.

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要通过对试题的比较、对试卷详尽解析和对复习方法的把握，发现一些规律性的东西，使这些宝贵资料为已所用，从而迅速提高自身水平和应试能力，轻松应对考试. 如果在使用本书时，感觉基础欠佳，可以参看由这些教授编写的《考研数学基础教程》一书.

考试虫

2004 年 8 月

目　录

数学(三)　卷1

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) 设曲线 $y=\frac{2}{5-x^n}$ 在点 $(1,\frac{1}{2})$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\xi_n$ = ________.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+|x|)^2\mathrm{d}x$ = ________.

(3) 幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n n}x^{2n-3}$ 的收敛半径 R = ________.

(4) 设 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}$, $g(x)=1-x$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$,则 $f(\boldsymbol{A})\cdot g(\boldsymbol{A})$ = ________.

(5) 设 $(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{A+X}+\overline{\overline{A}+X}=B$,则 X = ________.

(6) 设汽车发动机无故障工作的时间服从指数分布,平均无故障工作的时间为100个小时,则其实际无故障工作的时间不少于80个小时的概率等于________.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x^3}\int_0^x(1-\cos t)\mathrm{d}t, & x>0\\ 0, & x=0\\ \frac{1}{x^2}\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}t, & x<0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

(A) 左极限存在,但右极限不存在.　　(B) 右极限存在,但左极限不存在.

(C) 极限存在,但不连续.　　(D) 连续.

【　】

(8) 若一条二次曲线把 $(-\infty,0)$ 内的曲线段 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $(1,+\infty)$ 内的曲线段 $y=\frac{1}{x}$ 连结成一条一阶可导的曲线,则定义在 $[0,1]$ 上的这条二次曲线为

(A) $y=-2x^2+2x+1$.　　(B) $y=-x^2-x+1$.

(C) $y=-x^2+x+1$.　　(D) $y=x^2-x+1$.

【　】

(9) 设函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t \ln(1+u^2)\mathrm{d}u, g(x)=\int_0^x(\tan t-t)\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价无穷小.

【　】

(10) 已知 $u_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$,且级数 $\sum(-1)^n u_n$ 条件收敛,若 $v_n=2u_{2n}-u_{2n-1}(n=1,2,3,\cdots)$ 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 收敛或发散依赖于 $\{u_n\}$ 的具体形式.　　(D) 发散.

【　】

(11) 已知 $y_1=10, y_2=10+x^3, y_3=10+x^3+\mathrm{e}^{2x}$ 是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=a_3(x)$ 的三个特解,则该方程的通解可以表示为

(A) $C_1x^3+C_2\mathrm{e}^{2x}+10$.　　(B) $C_1x^3+C_2x\mathrm{e}^{2x}+10$.

(C) $C_1x^3+C_2\mathrm{e}^{2x}$.　　(D) 10.

【　】

(12) 设线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有通解 $k_1[1,2,0,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[4,-1,-1,-1]^{\mathrm{T}}+[1,0,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 其中 k_1,k_2 是任意常数,则下列向量中也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量的是

(A) $\alpha_1=[1,2,0,-2]^{\mathrm{T}}$.　　(B) $\alpha_2=[6,1,-2,-2]^{\mathrm{T}}$.

(C) $\alpha_3=[3,1,-2,-4]^{\mathrm{T}}$.　　(D) $\alpha_4=[5,1,-1,-3]^{\mathrm{T}}$.

【　】

(13) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,4,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=[2,7,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4=[3,10,4]^{\mathrm{T}}$,设 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C}_{3\times3}$, $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{D}_{3\times3}$ 则

(A) 存在矩阵 $\boldsymbol{C}_{3\times3}$,使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

(B) 不存在矩阵 $\boldsymbol{C}_{3\times3}$,使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

(C) 存在矩阵 $\boldsymbol{D}_{3\times3}$,使得 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(D) 不存在矩阵 $\boldsymbol{D}_{3\times3}$,使得 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关.

【　】

(14) 设 $F_n(x)$ 是基于来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本的经验分布函数;$F(x)$ 是总体 X 的分布函数,则下列命题错误的是,对于每个给定的 $x, F_n(x)$

(A) 是分布函数.　　(B) 依概率收敛于 $F(x)$.

(C) 是一统计量.　　(D) 其数学期望是 $F(x)$.

【　】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15)(本题满分 9 分)

设函数 f 具有连续偏导数，g 具有连续导数，且 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x^2+y^2,yz,z)=yg(\frac{z}{x})$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

得分	评卷人

(16)（本题满分8分）

设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$，求 $I=\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

得分	评卷人

(17)（本题满分9分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上连续，且满足 $\int_0^x tf(t^2-x^2)dt=\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，求 $f(x)$ 及其极小值点.

得分	评卷人

(18)(本题满分8分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, x\in(0,1), f(x)\neq 0$

证明:对于 $\forall a>1, \exists \xi\in(0,1)$ 使得 $\frac{af'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

得分	评卷人

(19)(本题满分8分)

某商店每月销售2400双运动鞋,每双鞋成本150元,每年的库存费用为日均存货成本的6%,每次订货费用为100元.试问每批定货量为多少时,方使每月的库存费用与订货费用之和最少,并且求出这个费用(假设运动鞋是均匀出售的).

得分	评卷人

(20)(本题满分13分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$,

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

(Ⅱ)求可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵.

(Ⅲ)计算 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$.

得分	评卷人

(21)(本题满分13分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & s \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & s^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & s^{n-1} \end{bmatrix}$,证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称阵,问整数 s,n 满足什么关系时,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

得分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

假设连续型随机向量的密度(X,Y)在矩形$G=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上为常数,而矩形$G$之外为0.求边长为$X$和$Y$的矩形面积$S$的概率分布.

得分	评卷人

(23)(本题满分 13 分)

假设随机变量X和Y的联合分布是二维正态分布,证明“X和Y独立”与“X和Y不相关”等价.

数学(三)　卷2

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{b}{4}(x+1)}=\int_{-\infty}^{\frac{b}{2}}te^t\,dt$,则常数$b=$______.

(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$______.

(3) 设$z=e^{xy}+xF(\dfrac{y}{x})$,其中$F$为可导函数,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

(4) 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$n$维向量,$(n\geqslant 3)$,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2+a\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$, $2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关,则$a=$______.

(5) 一个学徒工在同一台机床上接连加工了3个零件,假设第k个零件不合格的概率为$p_k=1/(k+1)$ $(k=1,2,3)$,以X表示不合格品的件数,则$\mathbf{P}\{X=2\}=$______.

(6) 设总体$X\sim N(a,2)$,$Y\sim N(b,2)$并且独立;基于分别来自总体X和Y的容量相应为m和n的简单随机样本,得样本方差S_x^2和S_y^2,则统计量

$$T=\frac{1}{2}[(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2]$$

服从______分布,参数为______.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设$f(x)$在$x=0$的某一邻域内有连续的四阶导数,且当$x\neq 0$时,$f(x)\neq 0$同时

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{(\tan x-x)x}{f(x)}, & x\neq 0\\ 8, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处连续,则必有

(A) $f'(0)=3$.　　(B) $f''(0)=2$.

(C) $f'''(0)=4$.　　(D) $f^{(4)}(0)=1$.

【　】

(8) 设$f(x)$可导,且$\int_0^1[f(x)-\dfrac{1}{2}x(x-1)f''(x)]dx=5$,$f(1)=4$,则$f(0)=$

(A) -1.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 不能确定.

【　】

(9) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导函数,且 $f'(x) < g'(x)$,则必有

(A) $f(x) < g(x)$.

(B) $f(-x) > g(-x)$.

(C) 对任意的 x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g'(x)$.

(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \int_0^x g(t)\mathrm{d}t, \forall x > 0$.

【 】

(10) 设 $f(x) \neq 0$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导的奇函数,则下列函数为奇函数的是

(A) $x^3\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.

(B) $\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$.

(C) $\int_0^x [f'(t) + f(t)]\mathrm{d}t$.

(D) $\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t$.

【 】

(11) 设 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1, I_i = \iint\limits_D f_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, f_i(x,y) = (x+y)^i (i = 1,2,3)$,则 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序为:

(A) $I_3 < I_2 < I_1$.

(B) $I_2 < I_3 < I_1$.

(C) $I_1 < I_3 < I_2$.

(D) $I_1 < I_2 < I_3$.

【 】

(12) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$, $i = 1,2,\cdots,s$ 都线性无关,以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s]$,则方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$

(A) 必无解.

(B) 必惟一解.

(C) 必无穷多解.

(D) 解不能确定.

【 】

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵,$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,且满足 $a \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant b$, $\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{E}$ 必是正定阵,则参数 μ 应满足

(A) $\mu > b$.　(B) $\mu < b$.　(C) $\mu > a$.　(D) $\mu < a$.

【 】

(14) 设随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,则 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 服从辛钦大数定律,只要各随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

(A) 有相同的数学期望.

(B) 服从同一离散型分布.

(C) 服从同一泊松分布.

(D) 服从同一连续型分布.

【 】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15)(本题满分 9 分)

已知不等式 $e^x + e^{-x} \leqslant m + x(e^x - e^{-x})$ 对任意实数 x 成立,求常数 m 的取值范围.

得分	评卷人

(16)(本题满分8分)

设 $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x \mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots$,求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

得分	评卷人

(17)(本题满分9分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义,对于任意 x,恒有 $f(x+1) = af(x)$,其中 a 是不为0的常数.当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$f(x) = x(1-x^2)$.试问当 a 取何值时 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处存在.

得分	评卷人

(18)(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在(0,4) 内二阶可导,且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(4) = 1$,证明存在 $\xi \in (0,4)$ 使得 $f''(\xi) = -\frac{1}{2}$.

得分	评卷人

(19)(本题满分 8 分)

已知函数 $f(x)$ 在$[0,2]$ 上连续,$f(0) = 2, f(2) = 0$,在$(0,2)$ 内 $f''(x)$ 存在,且 $f''(x) < 0$,若对任意的 $x \in [0,2]$,由曲线 $y = f(x)$ 与连接点$(0,2)$ 和点$(x, f(x))$ 的直线所围成的平面图形的面积等于 $S = \frac{x^3}{3}$,求函数 $f(x)$.

得分	评卷人

(20)(本题满分13分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\4&1&3\\0&a&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

(Ⅰ) a 为何值时, $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 时,求可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

得分	评卷人

(21)(本题满分13分)

设 A 是三阶矩阵, $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$, $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=[5,-1,-3]^{\mathrm{T}}$ 都是对应于特征值0的特征向量.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值及对应的特征向量.

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

得分	评卷人

(22)(本题满分13分)

设某自动生产线上产品的不合格品率为0.02,试求随意抽样检验的30件产品中,

(Ⅰ)不合格品不少于两件的概率 α;

(Ⅱ)在已经发现一件不合格品的条件下,不合格品不少于两件的概率 β.

(Ⅲ)为使抽到不合格品的件数为0的概率不大于0.10,至少需要抽验多少件产品?

得分	评卷人

(23)(本题满分13分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x\geqslant\alpha,\\ 0, & x<\alpha.\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

(Ⅰ)当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的矩估计量;

(Ⅱ)当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的最大似然估计量.

(Ⅲ)当 $\beta=2$ 时,求未知参数 α 的最大似然估计量.