



供中等以上水平学生使用

丛书主编/薛金星



高才生

第二次修订

怎样学好

高一数学(上)



北京教育出版社 北京出版社





高才生

GAOCAI SHENG

◎丛书主编 / 薛金星

★供中等以上水平学生使用

怎样学好

高 一 数 学
上

北京教育出版社
北 京 出 版 社



高才生丛书

怎样学好高一数学(上)

ZENYANGXUEHAOGAORYISHUXUE

薛金星 丛书主编

*

北京教育出版社 出版
北 京 出 版 社

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网 址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

各 地 书 店 经 销

北京市昌平兴华印刷厂印刷

*

880×1230毫米 32开本 8.5印张 210千字

2004年5月第3版 2004年5月第1次印刷

ISBN 7-200-02759-6/G·890

定价:11.80元



你能学好

——来自《高才生——怎样学好》编辑部的访谈录

《高才生——怎样学好》系列丛书是“北京金星创新教育研究中心”组织全国各地名校名师编写的一套紧跟初、高中各科**新教材**的**教辅用书**。该中心主任薛金星老师就有关问题回答了学生记者的提问。

学生：请问薛老师，您为什么要组织编写“高才生”系列丛书呢？

薛老师：我们编写这套丛书主要是鉴于现在中学生课业负担重、学无要领、练不得法的实际情况，旨在解决学生学习过程中遇到的实际问题。比如要点不明确，重、难点把握不准，眉毛胡子一把抓，知识不能融会贯通，不会归纳总结等。这套丛书可以**拓展教材内容**和**促进课堂教学**，培养学生理解和运用知识的能力。

学生：那么，这套丛书有什么特点呢？

薛老师：①理念新。按照国家新修改的教学大纲要求和新教材改革精神进行编写，借鉴了国内外教学和考试改革的新经验，博采众长，力求体现以培养学生创新精神和实践能力为重点的素质教育思想。

②立意高。尊崇“知识—能力—问题—价值观”综合立意，以人为本，融实用精神、创新理念和学习兴趣于书中，切实注重培养和提高综合运用学科知识的能力。

③内容实。重视方法与思路指点，注重方法、技巧和规律的总结，全面归纳常考知识点，深入浅出地分析重点、突破难点、揭示疑点、点悟迷津。

④方法活。注重知识、问题、能力、思想的有机融合，追求栏目、体例、版式、语言的创新，全方位服务于学生对问题的思考与解析。

学生：请您再谈谈我们该怎样使用这套丛书呢？

薛老师：“高才生”系列丛书是**随堂同步用书**，既可以用来课前预习指导和课上理解消化，也可用来课后复习巩固。总之，该丛书能使学生有备而学，有疑能解，避免走弯路，有效学习，有效复习，提高成绩。

学生：请问使用该书遇到问题怎么办？

薛老师：本套丛书成立图书使用工作委员会，如有疑难问题可来信说明。该丛书在全国各地均有销售，也可来信邮购。来信请寄：北京市天通苑邮局6503号信箱，《高才生》编辑部薛金星收，电话：(010) 61743009 邮编：102218。



编写委员会

顾 问 高 文(人民教育出版社物理室)

王 鹤(《中学物理研究》杂志社)

策 划 北京金星创新教育研究中心

丛书主编 薛金星

本册主编 王在福

审 订 孙晓东(全国中学物理特级教师)

您的支持和参与将有力地推进中国文化教育事业的建设和发展。北京金星创新教育研究中心联络方式如下,欢迎垂询。

地址:北京市天通苑邮局6503号信箱

电话:(010)61743009

邮编:102218

E-mail:JinxingShuye@sina.com



阅读导引



基础知识导读

大楼建的好,基础最重要,每课的“基础知识导读”为你储备知识奠定基础。



重要问题学法指导

上课时重点问题最担心,总想让老师多讲几遍,“重要问题学法指导”为老师排忧,为学生解惑。



方法技巧归纳

解题方法单一、思路不开阔是学生的通病。“方法技巧归纳”给你总结解题思路、方法和技巧,给你解题金钥匙。



解题方法·技巧·策略

每次做题总像走迷宫,费时又费力。“解题方法、技巧、策略”教你应对各类题型的高招!



高考信息要求

实话:“谁不想考上!”复习时总怕常考知识点漏掉。“高考信息要求”帮你抓住考分!



典型思维误区警示

每课都有困惑之处,总要麻烦老师。“典型思维误区警示”帮你轻松解决问题!



新·难·活·精题集萃

为什么平时高分,考试时成绩不理想呢?平时题型比较单一保守,考试很难拿到高分。“新·难·活·精题集萃”,各类题型一应俱全,给你新感觉。考试拿高分。



目 录

第一章 集合与简易逻辑 (1)

1.1 集 合	(1)
1.2 子集、全集、补集	(9)
1.3 交集、并集	(16)
1.4 绝对值不等式的解法	(25)
1.5 一元二次不等式的解法	(31)
1.6 逻辑联结词	(44)
1.7 四种命题	(49)
1.8 充分条件与必要条件	(56)
章末总结	(63)
章末检测题	(64)
奥赛辅导——容斥原理	(67)

第二章 函 数 (73)

2.1 函 数	(73)
2.2 函数的表示	(87)
2.3 函数单调性	(97)
2.4 反函数	(107)
奥赛辅导——映射与映射法	(117)
2.5 指 数	(121)
2.6 指数函数	(127)
2.7 对 数	(135)
2.8 对数函数	(142)
2.9 函数的应用举例	(153)



章末总结	(165)
章末检测题	(169)
奥赛辅导——高斯函数	(175)

第三章 数 列 (179)

3.1 数 列	(179)
3.2 等差数列	(189)
3.3 等差数列前 n 项和	(199)
3.4 等比数列	(213)
3.5 等比数列前 n 项和	(227)
研究性学习课题:数列在分期付款中的应用	(242)
章末总结	(248)
章末检测题	(249)
奥赛辅导——递推数列	(255)



第一章

集合与简易逻辑

1.1 集 合



基础知识导读

1. 集合的概念

某些指定的对象集在一起就成为一个集合；组成集合的每个对象叫做这个集合的元素。构成集合的两个必要条件是：研究对象是具体的，其属性是明确的，两者缺一不可。

2. 集合中元素的三性

确定性、互异性、无序性。

3. 集合的分类

按集合元素的数量可分为有限集、无限集和空集；按集合元素的属性可分为点集、数集、序对集等。

4. 集合的表示方法

列举法、描述法、图示法、字母法与区间法。

5. 元素与集合的关系

是个体与整体的关系，用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示。

6. 几个常见的数集

自然数集 N 、正整数集 N^* (或 N_+)、有理数集 Q 、实数集 R 、整数集 Z 。



重要问题学法指导

问题 1 集合中元素的特性

1. **确定性**：对于一个给定的集合，它的元素的意义是明确的。例如“由所有小于



20 的质数组成的集合”，这个集合中元素的意义是明确的. 又如“由高个子组成的集合”，那么这个集合中元素的意义是不明确的，因为“高个子”无严格标准，所以这个“高个子集合”是无法组成的. 对于给定一个集合和一个对象，这个对象是否为此集合的元素，只有“是”与“不是”两种结果.

2. 互异性：对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的. 例如由 1, 2, 3, 1 构成的集合为 $\{1, 2, 3\}$ 而不能写成 $\{1, 2, 3, 1\}$ ；又如把两个集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ ， $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ 的元素合并在一起构成一个新集合，那么这个新集合只能写成 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. 无序性：集合与其中元素的排列顺序无关. 如集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{b, a, c\}$ 是同一集合.

问题 2 列举法与描述法

1. 列举法：诸元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 构成的集合记为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，其符号为 $\{, \dots, \}$ 在使用列举法时应注意以下四点：

① 元素间用分隔号“，”；

② 元素不重复；

③ 不考虑元素顺序；

④ 对于含较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但是必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号. 如：由所有大于 0 的偶数构成的集合可记为 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

列举法常用来表示有限集或具有一定规律便于用列举法表示的无限集，如自然数集可表示为 $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

2. 描述法：使命题 $P(x)$ 为真的 A 中诸元素之集记为： $\{x \in A | P(x)\}$. 其中 x 为该集合中元素的代号，它表明了该集合中的元素是“谁”，是“什么”； A 是特定条件； $P(x)$ 为该集合中元素特有的公共属性、特征. 在使用描述法时，应注意以下六点：

① 写清楚该集合中元素的代号（字母或用字母表达的元素符号）；

② 说明该集合中元素的性质；

③ 不能出现未被说明的字母；

④ 多层描述时，应当准确使用“且”，“或”；

⑤ 所有描述的内容都要写在集合括号内；

⑥ 用于描述的语句力求简明、确切.

使用描述法易犯的错误的是丢掉大括号内的竖线以及竖线左侧的部分. 只剩下 $\{P(x)\}$. 如集合 $\{x \in \mathbf{R} | x > 3\}$ 不可记为 $\{x > 3\}$ 而记为 $\{x | x > 3\}$ ；当题目中可知 A 为实数集 $\mathbf{R}$ 时， $\{x \in A | P(x)\}$ 可记为 $\{x | P(x)\}$. 描述法多用来表示无限集.

问题 3 空集

不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\emptyset$. 要注意 $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 的不同含义. 其中“0”为数 0；“ $\{0\}$ ”表示集合中含有一个元素 0；“ $\emptyset$ ”为不含任何元素的集合，即



空集;“ $\{\emptyset\}$ ”为含有一个元素“ $\emptyset$ ”的集合.



解题方法·技巧·策略

题型1 集合中元素的特性:在解题中,“确定性”可建立方程,“无序性”需要讨论,而“互异性”则可以用来排除

例1 下面给出的四类对象中,构成集合的是()

- A. 某班个子较高的同学 B. 无限接近于零的实数 x
C. 相当大的实数 D. 倒数等于它本身的实数 x

分析:所给对象能否构成集合,应该是完全确定的,要有一个衡量的“标准”,不能模棱两可.

解:因为 A、B、C 中的对象都没有一个确定的标准衡量,则都不能构成集合,故选 D.

答案:D

注意:判断能否构成集合,关键看“元素”是否具有确定性、互异性、无序性,特别是确定性.

例2 已知集合 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 若 $1 \in A$, 求实数 a 的值.

分析: $\because 1 \in A$, 则 $a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3$ 都可能为 1, 则须分类讨论解决, 但必须验证.

解:①若 $a+2=1$, 则 $a=-1$, 此时 $A = \{1, 0, 1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾, 应舍去.

②若 $(a+1)^2=1$, 则 $a=0$ 或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时, $A = \{2, 1, 3\}$ 满足题意;

当 $a=-2$ 时, $A = \{0, 1, 1\}$ 与互异性矛盾, 舍去.

③若 $a^2+3a+3=1$, 则 $a=-1$ 或 $a=-2$ (舍去).

当 $a=-1$ 时, $A = \{1, 0, 1\}$ 应舍去.

综上所述 $a=0$.

注意:在求解有关集合中元素的问题时,互异性至关重要,要引起重视.

题型2 集合的表示方法:研究描述法表示的集合时,要先确定其代表元素是什么;然后再分析限定条件.文氏图、数轴等也常常表示集合

例3 用另一种方法表示下列集合

(1) $A = \{(x, y) | x+y=5, x, y \in \mathbb{N}\};$

(2) $\{(x, y) | (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0\};$

(3) $\{x | (x-1)^2(x-2)=0\};$

(4) $\left\{ (x, y) \left| \begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases} \right. \right\};$



$$(5) \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7} \right\};$$

$$(6) \{2, 3, 4\};$$

(7) $x^2 - 9$ 的一次因式组成的集合;

$$(8) \left\{ m \mid \frac{6}{5-m} \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

分析: 本题主要考查集合的两种表达方式的相互转化、集合语言与数学语言的相互转化, 在做题时, 要注意本书前面所提的要求.

解: (1) 由 $x+y=5$, 得 $y=5-x$, 又 $x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$,

$\therefore 5-x \geq 0$, 即有 $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 对应的 y 值依次为 $5, 4, 3, 2, 1, 0$. 又 A 中的代表元素为 (x, y) .

$\therefore A$ 中的元素为 $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$.

则 $A = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$.

(2) 方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ 是关于 x, y 的二元二次方程, 其解成对出现. 即 (x, y) 是该方程的一组解. 而方程的解为 $x=1$ 且 $y=2$, 所以 $A = \{(1, 2)\}$.

(3) 1 是方程的二重根, 如果把方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解集写成 $\{1, 1, 2\}$ 是不正确的, 因为集合中的元素是互异的, 如果写成 $\{1, 2\}$ 显然体现不出 1 是二重根, 因此这种方法也不妥, 因此应写成 $\{1, 2\}$, 其中 1 的右下标 (2) 表明 1 是方程的二重根.

(4) 方程组的解是 $x=3, y=2$. 故此集合只有一个元素, 用列举法表示为 $\{(3, 2)\}$.

(5) 观察集合元素的结构特征, 不难发现: 分子为 $n, n \in \mathbf{N}^*, n \leq 5$; 分母为 $n+2, n \in \mathbf{N}^*, n \leq 5$, 故此集合用描述法表示为 $\left\{ x \mid x = \frac{n}{n+2}, n \in \mathbf{N}^*, n \leq 5 \right\}$.

(6) 联想非零自然数, 容易描述为 $\{x \mid 2 \leq x \leq 4, x \in \mathbf{N}\}$, 若联想 2, 3, 4 是方程 $(x-2)(x-3)(x-4)=0$ 的解, 则描述为 $\{x \mid (x-2)(x-3)(x-4)=0\}$.

(7) $\because x^2 - 9 = (x-3)(x+3), \therefore x^2 - 9$ 的一次因式组成的集合为 $\{x-3, x+3\}$.

(8) $\because \frac{6}{5-m} \in \mathbf{N}^*$, 则 $5-m \in \mathbf{N}^*$ 且 $5-m$ 为 6 的约数, $\therefore 5-m=1, 2, 3, 6$. 即 $m=-1, 2, 3, 4$. 用列举法表示为 $\{-1, 2, 3, 4\}$.

注意: 列举法与描述法, 各有优缺点, 在实际应用中要注意选取简便的方法.

学生在表示方程或方程组的解集时易出错. 如本题中 (2) 的解集易错写成 $\{1, 2\}$. 这是不明确二元方程解的形式造成的. 同样本题中 (4) 易错写成 $\{3, 2\}$, 或错写成 $\{(x, y) \mid x=3, y=2\}$, 或错写成 $\left\{ (x, y) \mid \begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix} \right\}$.

例 4 观察下面三个集合: (1) $\{x \mid y=x^2+1\}$, (2) $\{y \mid y=x^2+1\}$, (3) $\{(x, y) \mid y=x^2+1\}$ 它们所表示的意义相同吗? 为什么?



分析:对于给定的集合,首先要理解清楚集合中的元素指什么,元素满足什么条件,区别符号术语所表达的含义.

解:不相同.集合(1)是函数 $y=x^2+1$ 的自变量 x 所有允许值组成的集合,因为 x 可以取任意实数,所以 $\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$; (2)是函数 $y=x^2+1$ 的所有函数值 y 组成的集合,由二次函数的图象知: $y\geq 1$, 所以 $\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geq 1\}$; 而集合(3)是函数 $y=x^2+1$ 图象上所有点的坐标组成的集合.

注意:在解决集合问题时,元素的公共属性是什么很重要,在解题时,要审清题意,以免出错.

题型3 集合的综合应用:注意与方程、不等式的联系,同时要特别注意空集的特殊性

例5 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, a\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\}$

(1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值; (2)若 A 中至多有一个元素,求 a 的取值范围.

分析:讨论方程 $ax^2+2x+1=0$ 实数根的情况,从中确定 a 的取值范围,由题意:方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个实数根,两个实数根,或无实数根.

解:(1)当 $a=0$ 时,原方程变为 $2x+1=0, x=-\frac{1}{2}$ 符合题意.

当 $a\neq 0$ 时,方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程,

$\Delta=4-4a=0$ 时,即 $a=1$ 时,原方程的解为 $x=-1$ 符合题意,

所以 $a=0$, 或 $a=1$ 时, A 中只有一个元素.

(2) A 中至多有一个元素,则 A 中有一个元素或 A 中没有元素,

当 $\Delta=4-4a<0$, 即 $a>1$ 时,原方程无实数解,

由(1)知,当 $a=0$ 或 $a\geq 1$ 时, A 中至多有一个元素.

注意:“ $a=0$ ”这种情况容易被忽视,对于方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两种情况:一是 $a=0$, 它是一元一次方程;二是 $a\neq 0$, 它是一元二次方程. 只有在 $a\neq 0$ 情况下,它才可以用判别式 Δ 来解题.

例6 设集合 $A=\{a|a=n^2+1, n\in\mathbf{N}\}$, 集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5, k\in\mathbf{N}\}$, 若 $a\in A$, 试判断 a 与 B 的关系.

分析:判断一个对象 a 与集合 B 的关系,即判断“属于”或“不属于”关系,若“ $a\in A$ ”,则 a 可以写成“ $n^2+1, n\in\mathbf{N}$ ”的形式;判断 a 是否属于 B , 则看 a 是否可表示成“ $k^2-4k+5, k\in\mathbf{N}$ ”的形式.

解: $\because a\in A$,

$\therefore a=n^2+1$

$=n^2-4n+4n-4+5$

$=(n^2+4n+4)-4(n+2)+5$



$$=(n+2)^2-4(n+2)+5$$

$$\because n \in \mathbf{N}, \therefore n+2 \in \mathbf{N}, \therefore a \in B.$$

注意:在由 $a \in A$ 判断 a 是否属于 B 的过程中,关键是先要变(或凑)形式,即由“ n^2+1 ”向“ k^2-4k+5 ”的形式变化,然后再判断.



高考信息要求

集合概念和表示方法是学习集合知识的基础,集合是高考常考的内容,一般以选择题形式,结合集合的交、并、补知识,考查对集合符号术语的理解和判断能力.如:

1. (2000 年全国) 设集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 5\}$ 则 $A \cup B$ 中的元素个数是()

A. 11

B. 10

C. 16

D. 15

解析: $\because A = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\therefore A \cup B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -10 \leq x \leq 5\}.$$

答案:C.

2. (1996 年全国) 已知全集 $I = \mathbf{N}$, 集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, 则()

A. $I = A \cup B$ B. $I = (\complement_I A) \cup B$ C. $I = A \cup (\complement_I B)$ D. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B)$

答案:C.



典型思维误区警示

本节内容易在以下环节出错

1. 在学习集合的概念时,元素的性质中确定性和互异性易出错,特别在求字母的取值时,往往不检验所得解的正确性,易产生增根,如例 2.

2. 在表示集合时,要正确运用描述法和列举法,如方程组
$$\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=4, \\ z+x=5 \end{cases}$$
 的解集为

$\{(2, 1, 3)\}$ (列举法) 或 $\left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=3. \end{cases} \right\}$ (描述法), 不可写成 $\{(x, y, z) \mid (2, 1, 3)\}$, 也

不能写成 $\{2, 1, 3\}$, 更不能写成 $\{x=2, y=1, z=3\}$ 或 $\{(x, y, z) \mid x=2, y=1, z=3\}$.



方法技巧归纳

1. 集合及其元素是数学中的原始概念,学习时,应结合实例弄清它的含义,集合中的元素有**确定性**、**互异性**、**无序性**和**任意性**等性质. 如例 2.
2. 掌握集合的表示法是进一步学习和应用集合知识的基础. 因此,必须切实理解各种表示法的含义及一些常见数集的符号. 如例 3、例 4.
3. 元素与集合的关系有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种,且仅有这两种关系. 如例 6.



新·难·活·精题集萃

1. 下列条件所指对象不能构成集合的是()
 - A. 所有直角三角形
 - B. 《高一数学·上》中所有难题
 - C. 大于 2 的自然数
 - D. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的所有点
2. 由元素 1, 2, 3 组成的集合可记为()
 - A. $\{x=1, 2, 3\}$
 - B. $\{x|x \in (1, 2, 3)\}$
 - C. $\{x|x \in \mathbf{N}^*, x < 4\}$
 - D. $\{6 \text{ 的质因数}\}$
3. 已知 x, y, z 为非零实数,代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组成的集合是 M , 则下列判断正确的是()
 - A. $0 \notin M$
 - B. $2 \in M$
 - C. $-4 \notin M$
 - D. $4 \in M$
4. 下列三个命题中正确的个数为()
 - ① $\mathbf{R} = \{\text{实数集}\}, \mathbf{R} = \{\text{全体实数}\}$;
 - ② 方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解集为 $\{1, 1, 2\}$;
 - ③ 方程 $(x-3)^2 + \sqrt{y-1} + |z-2| = 0$ 的解集为 $\{3, 1, 2\}$.
 - A. 1 个
 - B. 2 个
 - C. 3 个
 - D. 0 个
5. 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=27, \\ 3x+y=2 \end{cases}$ 的解集用列举法表示为____; 用描述法表示为_____.
6. 数集 $\{a^2 - a, 2a\}$ 中 a 的取值为_____.
7. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中, 最多含有_____个元素.
8. 含有三个实数的集合既可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可以表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2002} + b^{2003}$ 的值为_____.
9. 由实数构成的集合 A 满足条件: 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

求证: (1) 若 $2 \in A$, 则 A 中必还有另外两个元素;

(2) A 不可能是单元素集;

(3) A 中至少有三个不同的元素.

参考答案

1. B “难题”不具有确定性.

2. C 因为 $\{x | x \in \mathbf{N}^*, x < 4\} = \{1, 2, 3\}$.

3. D 因为 $M = \{4, 0, -4\}$.

4. D 因为①中, $\mathbf{R} = \{\text{实数集}\}$ 与 $\mathbf{R} = \{\text{全体实数}\}$ 是不正确的. 而②中解集不符合集合中元素的互异性. ③中集合中的形式错了, 应写成 $\{(3, 1, 2)\}$, 因为③中方程只有一个解, 而不是 3 个解.

5. $\{(3, -7)\}, \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x=3, \\ y=-7 \end{cases} \right. \right\}$.

6. $a \neq 0, 3$ 的一切实数 (根据元素的互异性质 $a^2 - a \neq 2a$, 即 $a^2 - 3a \neq 0$, 易得 $a \neq 0, 3$).

7. 2 个 (因为 $\sqrt{x^2} = |x|, -\sqrt[3]{x^3} = -x, |x| = x$ 或 $-x$).

8. 1 由 $0 \in \left\{ a, \frac{b}{a}, 1 \right\}$ 及 $a \neq 0$ 得 $\frac{b}{a} = 0$, 即 $b = 0$, 从而 $\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$, 进而有 $a^2 = 1$, 即 $a = 1$ (舍去) 或 $a = -1$,
故 $a^{2 \cdot 002} + b^{2 \cdot 003} = (-1)^{2 \cdot 002} = 1$.

9. 证明: (1) $\because 2 \in A, \therefore \frac{1}{1-2} = -1 \in A, \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$.

$\therefore$ 必有 $-1, \frac{1}{2} \in A$.

(2) $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 而 $a \neq \frac{1}{1-a}$, 所以 A 不是单元素集.

(3) $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 又 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = 1 - \frac{1}{a} \in A$, 显然 $a \neq \frac{1}{1-a} \neq 1 - \frac{1}{a}$,

所以 A 中至少有三个元素.



1.2 子集、全集、补集



基础知识导读

1. 子集

对于两个集合 A, B , 如果 A 中的任何一个元素都属于 B , 则称 A 包含于 B 或 B 包含 A , 即称集合 A 是集合 B 的子集. 记作: $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

规定: 空集是任何集合的子集.

2. 真子集

对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$; 如果集合 A 是集合 B 的真子集, 那么集合 B 中至少存在一个元素 m , 不属于集合 A .

规定: 空集是任何非空集合的真子集

3. 集合相等

若两个集合含有完全相同的元素(注意元素的无序性), 称 A, B 两个集合相等. 记作: $A = B$.

4. 补集

设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集, 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中的子集 A 的补集. 记作: $\complement_S A$.

5. 全集

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 我们称集合 S 为全集. 记作 U .



重要问题学法指导

问题 1 子集概念的理解

1. 子集概念是由讨论集合与集合间的关系引起的, 两个集合 A 与 B 之间有如下关系:

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A = B \Rightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \\ A \neq B \Rightarrow A \subsetneq B \end{cases}$$

2. 有限集合 A 的子集个数: n 个元素的集合有 2^n 个子集; 有 $2^n - 1$ 个真子集