立体几何一题多解

翟连林主编

北京出版社

中学数学智力开发丛书

立体几何一题多解
Liti Jihe Yiti Duojie
翟连林 主编
*
北京出版社出版
（北京北三环中路6号）
新华书店北京发行所发行
房山区印刷厂印刷
*
737×1092毫米 32开本 9.375印张 207,000字
1990年6月第1版 1991年6月第2次印刷
印数 18,101—39,900
ISBN 7-200-00888-5/G·384
定价：3.65元

编写说明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务。要完成这一任务，必须演算一定数量的题目。但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律。这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微。

长期的教学实践使我们体会到，恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度“追踪”，能“以少胜多”地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧。为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套“中学数学智力开发丛书”。这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。

在编写这套丛书时，我们力求做到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法

及基本解题规律。

在本书编写过程中，承蒙阮光南和耿雪二同志帮助绘图，刘金玲、董春容、王学东三同志帮助核算，在此一并致谢。

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编者

1989年1月

目　　录

第一章　一题多解的意义与作用

随着教学改革的深入发展，教育界的有识之士已经深刻认识到：应该把智力开发、培养能力作为教学的主要指标抓紧抓好。显然，对于数学解题的教与学的研究是十分必要的。这是因为解题是数学学习中理论联系实际的重要手段，解题是培养能力的有力杠杆，解题是启迪智慧、开拓思维的必由之路！

立体几何是研究空间图形的性质、画法、计算及其应用的初等数学的一门学科。因此，它对培养学生的空间想像能力，逻辑论证能力和计算能力具有很重要的意义。

那么，如何才能提高立体几何的教与学的水平呢？这就需要把数学思想纳入世界中学数学教学改革的大潮流中——重视数学解题的研究。而一题多解正是数学解题的一个重要侧面；一种有效的方法。

这就是要重视立体几何一题多解的主要理由。

下面，通过一些典型例题来说明立体几何一题多解在总结知识与方法，开发智力、培养能力以及训练思维各方面的积极作用。

例1　立方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，求 AC 与 BD_1 所成的角。

【分析 1】 异面直线 AC 与 BD_1 同处于立方体中，故可用三垂线定理解之（如图1-1）。

【解法 1】 连结 BD，

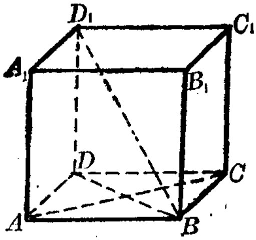


图 1-1

$\because$ $AC\perp BD$，又BD为BD_1在面AC上之射影，

则由三垂线定理可知$AC\perp BD_1$，

$\therefore$ AC与BD_1所成的角为$90°$

【分析 2】 以AC、BC为邻边作平行四边形$ACBE$，$\because$ $AC\parallel BE$，$\therefore$只须求$\angle EBD_1$即可（如图1-2）。

【解法 2】 如图1-2。作$BE\parallel AC$，交DA延长线于E，则BD_1与AC所成之角即BD_1与BE所成之角。设$AB=a$，则$BE=\sqrt{2}a$，$BD_1=\sqrt{3}a$，$ED_1=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$。

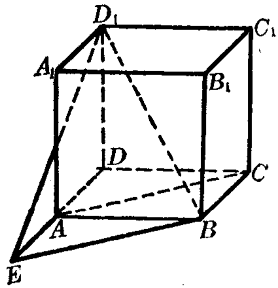


图 1-2

在$\triangle EBD_1$中，由余弦定理，得

$$\cos\angle EBD_1$$

$$=\frac{(\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{3}a)^2-(\sqrt{5}a)^2}{2\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{3}a}=0.$$

$\because$ $0<\angle EBD_1<180°$，故$\angle EBD_1=90°$，

$\therefore$ AC与BD_1所成之角为$90°$。

【评注】 解法 1 属直接法，解法 2 尚须构造平行四边形，运用转化思想。两法比较，解法 1 较简；但解法 2 提供的转化思想方法，在寻求两条异面直线所成之角度时确属通法，应掌握。

例2 立方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，棱长为a。

（1）求 B_1 到平面 BC_1A_1 的距离。

（2）求异面直线 AC 与 BD_1 的距离。

（1）**【分析1】** 过 B_1 作$B_1H\perp$面 BC_1A_1于H，H点在哪里？细察$\triangle BC_1A_1$，发现它是正三角形，$\therefore H$ 是正$\triangle BC_1A_1$ 之中心，连结 A_1C_1，B_1D_1 交于 O，再连结 BO，则H必在 BO上，于是求出B_1H即可（如图1-3）。

【解法1】 如图1-3．连结A_1B，BC_1，A_1C_1，则$\triangle BC_1A_1$为正三角形．连结 B_1D_1 交 A_1C_1 于 O，再连 BO，过 B_1 作 $B_1H\perp$面 BC_1A_1于H，则H必在 BO上．又 B_1H为$\mathrm{Rt}\triangle BB_1O$ 之斜边上的高，于是

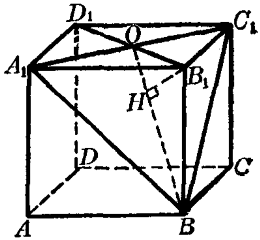


图 1-3

$$OB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a\ ,$$

$$OB=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a,$$

$$\therefore\ B_1H=\frac{BB_1\cdot OB_1}{OB}=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

故 B_1 到平面 BC_1A_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

【分析2】 我们把 $B_1\text{-}BC_1A_1$ 看作三棱锥，设B_1到平面BC_1A_1之距离为h，利用三棱锥的体积关系即可求得h值（如图1-3）。

【解法2】 设 B_1 到平面 BC_1A_1 的距离为 h，则 h 为三棱锥$B_1-BC_1A_1$的高，又$\because A_1B_1\perp$面B_1C，$\therefore A_1B_1$ 为三棱锥

A_1-BB_1C_1的高。于是

$$S_{\triangle A_1BC_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

$$S_{\triangle BB_1C_1}=\frac{1}{2}a^2,$$

$$\because\quad V_{B_1-BA_1C_1}=V_{A_1-BB_1C_1},$$

即 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a$,

$$\therefore\quad h=\frac{\sqrt{3}}{3}a。$$

故 B_1 到平面 BC_1A_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

(2)【分析1】欲求异面直线 AC 与 BD_1 的距离,易证 $AC\perp BD_1$,故我们可用异面直线距离的定义来求解(如图1-4)。

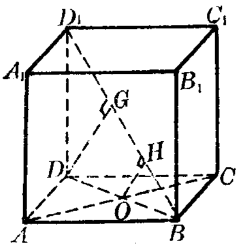


图 1-4

【解法1】如图1-4.连结AC,BD,交于 O,则 $AC\perp BD$.又$AC\perp DD_1$,BD 与 DD_1 有公共点D,

$\therefore AC\perp$平面 BDD_1,

在平面 BDD_1 内,过 O 作$OH\perp BD_1$于H,则有 $AC\perp OH$.

$\therefore$ OH 是二异面直线 AC、BD_1之公垂线段,故 OH 即其距离。

$\because$ $DD_1=a$, $BD=\sqrt{2}a$, $BD_1=\sqrt{3}a$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDD_1$中,作 $DG\perp BD_1$ 于 G,

$$\therefore \quad DG=\frac{DD_1\cdot BD}{BD_1}=\frac{a\cdot\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\because \quad OH \mathbin{/\!/} \frac{1}{2}DG,\quad \text{则}\quad OH=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

$\therefore$ AC、BD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$。

【分析 2】 AC、BD_1 为异面直线，可考虑过其中一条如 AC，作 BD_1 的平行平面ACM，这样，就把求AC、BD_1之间的距离转化为求平行平面的直线 BD_1 与平面ACM的距离了。那么，如何确定平面 ACM 呢?若取 DD_1 中点为M。$\because O$ 为BD中点，则在$\triangle DBD_1$中由中位线性质，即得

$$BD_1 \mathbin{/\!/} OM,$$

从而有 $BD_1 \mathbin{/\!/}$ 平面 ACM。再寻求特殊点M，作$MH\perp BD_1$于H，于是 MH 即为所求（如图1-5）。

【解法 2】 如图1-5。取 DD_1 的中点M，连结AM、MC，O 为AC、BD 的交点，再连 OM。

则 $OM \mathbin{/\!/} BD_1 \Rightarrow BD_1 \mathbin{/\!/}$ 平面 ACM。

过 M 作 $MH\perp BD_1$ 于H，由解法 1 可知 $MH=\frac{\sqrt{6}}{6}a$。

$\therefore$ AC、BD_1的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}a$。

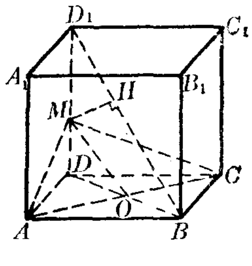


图 1-5

【评注】（1）题中的两种解法均具有典型性：解法 1 属于直接法，简洁明快；解法 2 属于“三棱锥体积相等法”，较复杂的题目用此法往往有效。

（2）题中的解法1从定义入手，是解决初等数学问题最基本的方法之一；解法2运用转化思想：线线距离$\xrightarrow{\text{转化}}$线面距离$\xrightarrow{\text{再转化}}$点面距离。故解法2具有普遍性。

例3 三棱锥$P\text{-}ABC$中，已知$PA\perp BC$，$PA=BC=l$，PA，BC的公垂线$ED=h$。

求证：$V_{\text{三棱锥}P\text{-}ABC}=\frac{1}{6}\cdot l^2\cdot h$。

【分析1】 运用“体积组合”的思想方法，如图1-6，连结AD，PD，于是有

$$V_{\text{三棱锥}P\text{-}ABC}=V_{B\text{-}PAD}+V_{C\text{-}PAD}.$$

【证法1】 连结AD和PD，

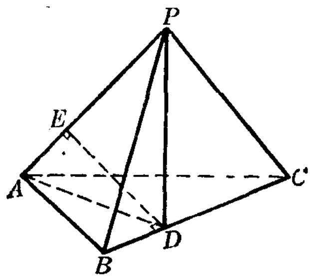


图 1-6

∵ $BC\perp PA$，

$BC\perp ED$，

∴ $BC\perp$平面PAD。

又$ED\perp PA$，

则 $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}PA\cdot ED$

$=\frac{1}{2}lh$，

∴ 三棱锥$B\text{-}PAD$的体积

$$V_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}l\cdot h\right)\cdot BD=\frac{1}{6}l\cdot h\cdot BD.$$

同理，三棱锥$C\text{-}PAD$的体积

$$V_2=\frac{1}{6}l\cdot h\cdot CD.$$

∴ $V_{\text{三棱锥}P\text{-}ABC}=V_1+V_2=\frac{1}{6}l\cdot h\cdot BD+\frac{1}{6}l\cdot h\cdot CD$

$$=\frac{1}{6}l\cdot h(BD+CD)=\frac{1}{6}l\cdot h\cdot BC$$

$$=\frac{1}{6}l^2\cdot h。$$

【分析 2】换一个角度思考，按体积公式，先作出三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的高，也可获证。

【证法 2】自顶点 P 作高 PH（如图1-7），则有 $PH\perp BC$，$\because PA\perp BC$，

$\therefore$ $BC\perp$平面PAH．

连结 PD、AD，由 DE 是 PA，BC 的公垂线可知

$BC\perp$平面 PAD．

故$\triangle PAH$ 与$\triangle PAD$ 共面，H在直线 AD 上．于是有

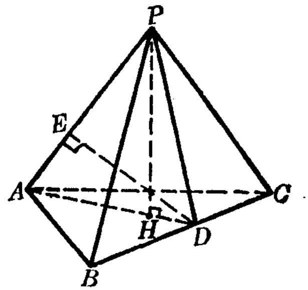


图 1-7

$$V=\frac{1}{3}PH\cdot S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{1}{6}PH\cdot AD\cdot BC \quad ①$$

而在$\triangle PAD$ 中，PH、DE是两边 AD、AP 上的高，故有

$$PH\cdot AD=2S_{\triangle PAD}=PA\cdot DE=h\cdot l \quad ②$$

将②代入①式，得

$$V=\frac{1}{6}h\cdot l\cdot BC=\frac{1}{6}l^2\cdot h.$$

【分析 3】本题困难之处在于：垂直且相等的PA，BC 不在一个平面，如果设法把它们集中在一个平面，就可获得新的思路：作平行四边形 $ABP'P$（如图1-8），于是 PA，

BC 即可集中于$\triangle BCP'$ 中了。

【证法 3】 自 B 点作 $BP' \mathrel{\underline{\parallel}} AP$，于是 $BP' \perp BC$ 且 $BP' = BC = l$，故$\triangle P'BC$ 是等腰直角三角形。再由$PP' \parallel AB$ 可知两个三棱锥$P\text{-}ABC$、$P'\text{-}ABC$ 有相同的体积。

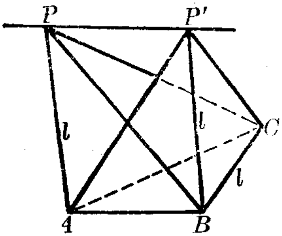


图 1-8

另一方面，由 $PA \parallel P'B$ 可知 $PA \parallel$ 平面 $P'BC$，故点 A到底面 $P'BC$ 的高等于异面直线 PA、BC 的公垂线h，于是有

$$V_{P\text{-}ABC} = V_{P'\text{-}ABC} = V_{A\text{-}P'BC}$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle P'BC}.$$

而等腰$\mathrm{Rt}\triangle P'BC$的面积是$\frac{1}{2}l^2$，故有

$$V_{P\text{-}ABC} = \frac{1}{6}l^2 \cdot h.$$

【评注】 以上三种证法，证法 1 是运用“体积组合”思想，简明而巧妙；证法 2 是由体积公式而联想到应作出三棱锥的高，易想而不难；证法 3 是集中题设条件而作辅助平行四边形，思路巧而方法新，三种证法，各有千秋。

以上三例的一题多解充分揭示了解题时学生的思维流程：知识点的储存与应用。例如，例3的证法3就应用了点面距离、线面距离、线线距离等距离概念；又如上述三例所运用的数学基本方法或数学思想有：直接法、定义法、转化思想方法、体积组合方法等等。显然，这种一题几解、多向思维的解题手段，对于学生开发智力、培养能力是大有裨益

的。

下面我们再看一个有益于培养创造性思维的典型例题。

例4 边长为 a 的正六边形，以它的一边为旋转轴，求旋转体的全面积和体积（如图1-9）*。

【分析1】 仔细观察旋转体的轴截面图（如图1-10），这个旋转体可以看作是由一个圆柱和两个相同的圆台挖去两个相同的圆锥组合而成。

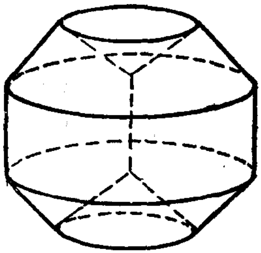


图 1-9

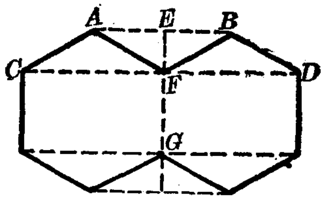


图 1-10

【解法1】 由已知可得

$$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ CF=\sqrt{3}a,\quad EF=\frac{1}{2}a,$$

$$\therefore\quad S_{旋转体}=S_{圆柱}+2(S_{圆台}+S_{圆锥})$$

$$=2\pi(\sqrt{3}a)a+2\left[\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a+\sqrt{3}a\right)a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\pi\cdot a\right]$$

$$=6\sqrt{3}\pi a^2.$$

* 参阅1986，11期《中学数学》（湖北大学）戴俊超：《探索最佳解题途径，启发创造性思维》一文。

$$
\begin{aligned}
V_{\text{旋转体}} &= V_{\text{圆柱}} + 2(V_{\text{圆台}} - V_{\text{圆锥}}) \\
&= \pi(\sqrt{3}a)^2 \cdot a + 2\left\{\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \sqrt{3}a + (\sqrt{3}a)^2\right] - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{a}{2}\right\} \\
&= \frac{9}{2}\pi a^3.
\end{aligned}
$$

【分析 2】 运用"面积组合"、"体积组合"的方法，根据几何体特征，在图1-10的基础上另作辅助线：把 CA、DB延长相交于H点。

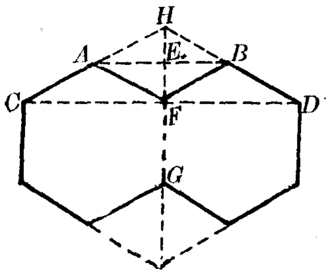


图 1-11

【解法 2】 如图1-11，我们有

$$
\begin{aligned}
S_{\text{旋转体}} &= S_{\text{圆柱}} + 2S_{\text{圆锥}} \\
&= 2\pi(\sqrt{3}a) \cdot a + 2\pi(\sqrt{3}a) \cdot 2a \\
&= 6\sqrt{3}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\text{旋转体}} &= V_{\text{圆柱}} + 2(V_{\text{圆锥}} - V_{\text{旋转体}HFAB}) \\
&= \pi(\sqrt{3}a)^2 \cdot a + 2\left[\pi(\sqrt{3}a)^2 \cdot a \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{a}{2}\right] \\
&= \frac{9}{2}\pi a^3.
\end{aligned}
$$

【分析3】 能否跳出解法1、解法2的圈子，在求

$V_{旋转体}$时，另辟蹊径呢？——答案是肯定的。

【解法 3】 由祖暅原理可以证明，图1-12中上、下两部分的阴影所代表的立体的体积相等，故有

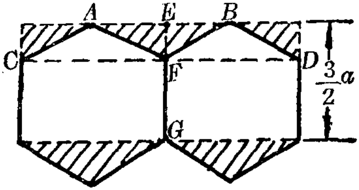


图 1-12

$$V_{旋转体}=V_{圆柱}$$

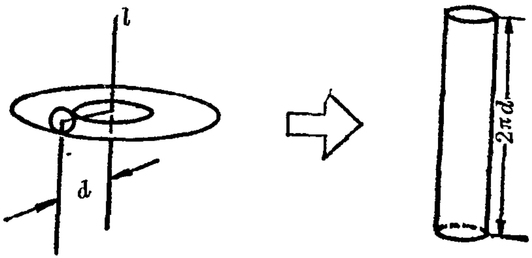
$$=\pi(\sqrt{3}a)^2\cdot\frac{3}{2}a$$

$$=\frac{9}{2}\pi a^3.$$

同解法2可求得 $S=6\sqrt{3}\pi a^2$。

【分析 4】 利用定理：一个有对称中心的平面图形，绕着与它不相交的轴旋转所得几何体的表面积和体积等于以这个平面图为底，以中心到轴的距离为半径的圆周长为高的柱体的侧面积和体积。

这个定理的证明超出初等数学范围，其直观意义可解释为：如图1-13中，设想（甲）是一圆环，把它剖开拉直后便



（甲） （乙）

图 1-13

成为形如（乙）的圆柱，那么，圆环的面积和体积就等于圆

柱的侧面积和体积。

【解法 4】 如图1-14，正六边形的中心O到轴的距离为 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。圆周长 $h=2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$，六边形周长 $c=6a$，六边形面积 $S=6\cdot\frac{3}{4}a^2$。由分析4中提供的定理，可得

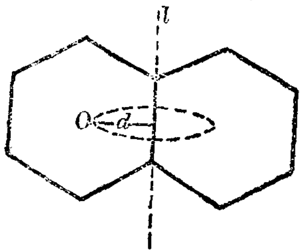


图 1-14

$$S_{旋转体}=ch$$

$$=6a\cdot2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=6\sqrt{3}\pi a^2;$$

$$V_{旋转体}=sh=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{9}{2}\pi a^3.$$

【评注】 解法1思路自然，但较繁杂；而解法2避免了应用圆台的有关公式，较简明；解法3属优质联想，利用祖暅原理，仅仅运用柱体公式即可，比解法1、解法2更优越；解法4干净利落，极为简明，反映了扎实的基本功、解题开阔的视野和创造性的思维方法。