大学数学辅导

学习·复习·考研—1

分析中的基本定理和典型方法

宋国柱　编

- 本书是复习、考研的理想读物
- 传授了分析课程的各种典型解法
- 提供了200多个新鲜有趣的例题
- 收录了南京大学考研题解

科学出版社
www.sciencep.com

分析中的基本定理和典型方法

宋国柱　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书总结了数学分析中的基本定理和典型方法，介绍了数学分析中各种类型的问题和解题技巧，书中200多个例题中包括了一些比较新鲜有趣的问题，作为教材的补充也选择了一些帮助理解基本概念、掌握基本方法的问题. 书末给出两个附录：附录一给出了南京大学出版社出版的《数学分析教程》（许绍溥、宋国柱等编）一书中第一章到第十九章的总习题及其解答；附录二介绍了南京大学硕士研究生入学考试的数学分析试题（1992～2003年）及其解答。

本书可作为综合性大学、高等师范院校基础数学和应用数学专业、信息和计算数学专业及统计专业的学生和教师的参考书及报考硕士研究生的复习用书。

图书在版编目（CIP）数据

分析中的基本定理和典型方法/宋国柱编. —北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-012874-5

Ⅰ. 分… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 数学分析 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 007543 号

策划编辑：吕 虹/文案编辑：邱 璐 贾瑞娜/责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年5月第一版 开本：B5(720×1000)
2004年5月第一次印刷 印张：26
印数：1—4 000 字数：497 000

定价：39.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　　言

本书是编者在南京大学数学系近20年讲授“数学分析”课的讲稿及给本科毕业生和青年教师报考研究生复习数学分析的讲稿基础上写成的。全书系统地总结了数学分析中的基本定理和典型方法，书中所选的问题和习题具有代表性，给出的解题方法注重技巧性，有助于广大读者掌握数学分析这门课程的基本内容和各种解题技巧。在本书200多个例题中包括了一些比较新鲜有趣的问题，作为通常教材的补充，也选择了一些帮助理解基本概念、掌握基本方法的问题，每章后面还附有一定数量、一定难度的习题，对其中较困难的习题，书中还作了适当提示，希望读者能自己独立完成。为了帮助读者学好“数学分析”，本书还给出了许绍溥、宋国柱等编著的《数学分析教程》上、下册中第一章到第十九章总习题解答以及南京大学硕士研究生入学考试 数学分析试题(1992～2003)及其解答，以供读者参考。

本书可作为大学生学习数学分析的课外读物，对数学系学生准备研究生考试极有参考价值，也可作为教师的教学参考书。

由于编者水平有限，时间比较仓促，不当与错误之处在所难免，所作的解答也未必是最好的，恳切地希望读者批评指正。

编　　者

目　　录

第一章　函数与极限

极限理论是学习高等数学和数学分析的基础．在这一章里我们将首先介绍极限理论中的基本定理及其应用,然后用较多的篇幅来介绍各种类型的数列和函数极限问题相应求解方法,选题注重代表性,解题方法富有技巧性．

§1.1　数列和函数的极限理论

在本节将介绍极限理论中五个基本定理及其应用．

(一) 区间套定理

设$\{[\alpha_k,\beta_k]\}$是数轴上一串闭区间,如果满足条件

(i) $[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]\subset[\alpha_k,\beta_k](\forall k)$,

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}(\beta_k-\alpha_k)=0$,

则存在惟一的实数 $\alpha\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_k,\beta_k]$,且$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\alpha$.

(二) Borel 有限覆盖定理

设 $F\subset X$(X 为 n 维欧氏空间)是有界闭集,$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$是 F 的一个开覆盖,则从$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$中可取出有限个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_m$,使$\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_i\supset F$.

(三) 聚点存在定理

设$\{x_n\}$是欧氏空间 X 中的有界点列,则必存在子序列 x_{n_k},使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$,$x_0$ 称作$\{x_n\}$的一个极限点．若$\{x_n\}$是 X 中的有界无穷集合,则存在 x_{n_k} 互异,使 x_{n_k} 收敛于 x_0,此时称 x_0 是$\{x_n\}$的一个聚点．

(四) 单调数列极限定理

R^1 中单调有界数列必有有限极限．

(五) Cauchy 收敛原理

R^1 中点列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n,m>N$

时,有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

我们称满足上述条件的点列$\{x_n\}$为 Cauchy 点列.

区间套定理与 Borel 有限覆盖定理是上面五个定理中两个最基本的定理,它们彼此是等价的,分析中许多困难问题可以利用这两个定理来解决,我们首先证明这两个定理的等价性.

问题 1 设$\mathscr{F}=\{(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)\}_{\lambda\in\mathscr{A}}$是有穷闭区间$[a,b]$的一个开覆盖,试用区间套定理证明$\mathscr{F}$中必存在有穷个开区间$(\alpha_k,\beta_k)(k=1,2,\cdots,m)$覆盖$[a,b]$.

证 采用反证法.设$[a,b]$只能被$\mathscr{F}$中无限个开区间所覆盖,为了方便起见,我们记$[a,b]$为$[a_0,b_0]$,若分$[a_0,b_0]$为$\left[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}\right]$和$\left[\frac{a_0+b_0}{2},b_0\right]$两部分,则其中至少有一个不能被$\mathscr{F}$中有限个开区间所覆盖,记这样的闭区间为$[a_1,b_1]$,继续上述步骤,我们可以得到一串闭区间$\{[a_n,b_n]\}$,它满足条件

(i) $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$, $n=1,2,3,\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$;

(iii) 每个$[a_n,b_n]$不存在$\mathscr{F}$的有限覆盖.

由(i)、(ii)可知$\{[a_n,b_n]\}$满足区间套定理条件,故存在惟一点$c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,且$\lim\limits_{k\to\infty}a_n=\lim\limits_{k\to\infty}b_n=c$.因$\mathscr{F}$覆盖$[a,b]$,$c\in[a,b]$,所以必存在开区间$(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}$,使$c\in(\alpha,\beta)$,但由于$\lim\limits_{k\to\infty}a_n=\lim\limits_{k\to\infty}b_n=c$,故存在充分大的自然数$n_0$,使

$$[a_{n_0},b_{n_0}]\subset(\alpha,\beta)$$

从而与(iii)矛盾,故必存在$\mathscr{F}$中的有限个开区间覆盖$[a,b]$.

问题 2 应用 Borel 有限覆盖定理来证明区间套定理.

证 设$\{[a_n,b_n]\}(a_n<b_n,n=1,2,3,\cdots)$是一区间套序列,即它满足条件

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

我们要应用有限覆盖定理来证明必存在惟一点$\alpha\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$.

先证$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$,设不然,$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\varnothing$,令

$$G_n=(-\infty,+\infty)/[a_n,b_n]=(-\infty,a_n)\cup(b_n,+\infty)$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}[a_n,b_n]=\mathscr{C}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=(-\infty,+\infty)$$

此处 $\mathscr{C}A=(-\infty,+\infty)/A$，从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n\supset[a_1,b_1]$，据 Borel 有限覆盖定理，必存在有限个开集 $G_{n_k}(k=1,2,\cdots,m)$ 覆盖 $[a_1,b_1]$，即

$$\bigcup_{k=1}^{m}G_{n_k}\supset[a_1,b_1]$$

其中 $G_{n_k}=(-\infty,a_{n_k})\cup(b_{n_k},+\infty)$，从而

$$\begin{aligned}\varnothing=[a_1,b_1]/\bigcup_{k=1}^{m}G_{n_k}&=\bigcap_{k=1}^{m}([a_1,b_1]/G_{n_k})\\&=\bigcap_{k=1}^{m}[a_{n_k},b_{n_k}]\end{aligned}$$

这与 $\bigcap\limits_{k=1}^{m}[a_{n_k},b_{n_k}]=[a_{n_m},b_{n_m}]\neq\varnothing$ 矛盾，故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$.

再证惟一性，设有 $x,y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，则 $x,y\in[a_n,b_n](\forall n)$，于是 $|x-y|\leqslant b_n-a_n(n=1,2,3\cdots)$，令 $n\to+\infty$ 就得 $x=y$. 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 是非空单点集 $\{\alpha\}$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$ 显然成立.

问题 3　设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$n=1,2,3,\cdots$，且对每个 $x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$ 有界，则 $[a,b]$ 中必存在一个小区间，使 $\{f_n(x)\}$ 在其上一致有界 .

证　设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 的任一子区间上非一致有界，则对 $M=1$，存在 n_1 以及 $x_1\in[a_0,b_0]=[a,b]$，使 $|f_{n_1}(x_1)|>1$，因为 $f_{n_1}(x)$ 连续，则存在包含 x_1 的子区间 $[a_1,b_1]$，使 $b_1-a_1<\dfrac{b_0-a_0}{2}$，且 $x\in[a_1,b_1]$ 时，有 $|f_{n_1}(x)|\geqslant1$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a_1,b_1]$ 上也非一致有界，则对 $M=2$，必存在 $n_2>n_1$ 以及 $x_2\in[a_2,b_2]$，使 $|f_{n_2}(x)|>2$，从而存在 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2<\dfrac{b_1-a_1}{2}$，当 $x\in[a_2,b_2]$ 时，有 $|f_{n_2}(x)|\geqslant2$. 重复上述步骤，可得一串区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 $[a_n,b_n]\subset[a_{k-1},b_{k-1}]$，$b_k-a_k\leqslant\dfrac{b_0-a_0}{2^k}$，$x\in[a_n,b_n]$ 时，$|f_{n_k}(x)|\geqslant k$，$(k=1,2,3,\cdots)$. 据区间套定理必存在 $x_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]\subset[a,b]$，则

$$|f_{n_k}(x_0)|\geqslant k\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

这说明 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 处无界，与假设矛盾，故本题结论成立 .

问题 4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上正常 (R) 可积，则 $f(x)$ 的连续点在这个区间上处处稠密 .

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上正常 (R) 可积，则对任一子区间 $[a_0,b_0]\subset[a,b]$，

存在子区间$[a_1,b_1]$,使$b_1-a_1<\frac{b_0-a_0}{2}$,$f(x)$在$[a_1,b_1]$上的振幅$<\frac{1}{2}$,不妨设$a_0<a_1<b_1<b_0$,重复上述步骤可得区间套序列$\{[a_n,b_n]\}$,使$b_n-a_n<\frac{b_0-a_0}{2^n}$,$a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}$,而$f(x)$在$[a_n,b_n]$上的振幅$<\frac{1}{2^n}$,$n=1,2,3,\cdots$,则存在$\alpha\in(a_0,b_0)$,使$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$,显然$\alpha$必是$f(x)$的连续点,这就证明了任一子区间$[a_0,b_0]$中均有$f(x)$的连续点,故$f(x)$的连续点处处稠密.

问题 5　设$f'_n(x)$为$[a,b]$上一致有界函数序列,且存在一点$x_0\in[a,b]$使$\{f_n(x_0)\}$有界,则必存在子序列$\{f_{n_k}(x)\}$,使$\{f_{n_k}(x)\}$在$[a,b]$上处处收敛.

证　设$|f'_n(x)|\leqslant M\ (\forall n,x\in[a,b])$,因为

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|=|f'_n(\xi_n)(x-x_0)|\leqslant M\cdot|x-x_0|$$

所以$\{f_n(x)\}$也一致有界.我们记$\{r_k\}$为$[a,b]$中有理点全体,由于$\{f_n(r_1)\}$是有界点列,据聚点存在定理,存在子序列$\{f_n^{(1)}\}$,使$f_n^{(1)}(r_1)$收敛,再考虑$\{f_n^{(1)}(r_2)\}$,同理存在$\{f_n^{(1)}(r_2)\}$的一个子序列$\{f_n^{(2)}(r_2)\}$收敛,依次类推可得

$$\begin{array}{llll}
f_1^{(1)}(r_1), & f_2^{(1)}(r_1),\cdots, & f_n^{(1)}(r_1), & \cdots\\
f_1^{(2)}(r_2), & f_2^{(2)}(r_2),\cdots, & f_n^{(2)}(r_2), & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
f_1^{(k)}(r_k), & f_2^{(k)}(r_k),\cdots, & f_n^{(k)}(r_k), & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

使$\{f_n^{(k)}\}$是$\{f_n^{(k-1)}\}$的一个子序列,$\{f_n^{(k)}(r_k)\}$收敛,我们按对角线取子序列$f_1^{(1)}$,$f_2^{(2)},\cdots,f_k^{(k)},\cdots$,则$\{f_k^{(k)}(x)\}$对一切有理数$\{r_k\}$收敛.现任取无理数$x\in[a,b]$,对任给的$\varepsilon>0$,存在有理数$r\in[a,b]$,使$|x-r|<\frac{\varepsilon}{3M}$,则

$$\begin{aligned}|f_{k+p}^{(k+p)}(x)-f_k^{(k)}(x)|\leqslant&|f_{k+p}^{(k+p)}(x)-f_{k+p}^{(k+p)}(r)|\\&+|f_{k+p}^{(k+p)}(r)-f_k^{(k)}(r)|+|f_k^{(k)}(r)-f_k^{(k)}(x)|\end{aligned}$$

由于$\{f_k^{(k)}(r)\}$收敛,必存在N,使$k>N$时,对一切自然数p有

$$|f_{k+p}^{(k+p)}(r)-f_k^{(k)}(r)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

而

$$|f_k^{(k)}(x)-f_k^{(k)}(r)|\leqslant M\cdot|x-r|<\frac{\varepsilon}{3}$$

故当 $k>N$ 时,对一切自然数 p 成立

$$|f_{k+p}^{(k+p)}(x)-f_k^{(k)}(x)|<\varepsilon$$

即 $\{f_k^{(k)}(x)\}$ 是 Cauchy 点列,故 $\{f_k^{(k)}(x)\}$ 收敛.

注　我们还可以证明 $\{f_k^{(k)}(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.为此,我们记 $\{f_k^{(k)}(x)\}$ 为 $\{f_n(x)\}$,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$,由于 $\{f'_n(x)\}$ 一致有界,则易证 $\{f_n(x)\}$ 是等度连续的,即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $x_1,x_2\in[a,b]$,$|x_1-x_2|<\delta$ 时,对一切 n 有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon \tag{1.1}$$

在式(1.1)中令 $n\to\infty$,就得

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon$$

故 $f(x)\in C[a,b]$.现在我们证明 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

证法一　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 $f(x)$,则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $\{n_k\}$ 和点列 $\{x_k\}\subset[a,b]$,使对一切 k 有

$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geqslant\varepsilon_0 \tag{1.2}$$

不妨设 $x_k\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0\in[a,b]$,则

$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_0)|\leqslant f_{n_k}(x_k)-f_{n_k}(x_0)|+|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 等度连续,$f(x)$ 连续,$x_k\to x_0$,则存在 N,当 $k>N$ 时,有

$$|f_{n_k}(x_k)-f_{n_k}(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$|f(x_k)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{4}$$

从而 $k>N$ 时,有

$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\leqslant\frac{3}{4}\varepsilon_0$$

这与式(1.2)矛盾,故 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证法二　证明 $\{f_n(x)\}$ 满足一致收敛 Cauchy 收敛准则.事实上,由于 $\{f_n(x)\}$ 等度连续,则任给 $\varepsilon>0$,必存在 $\delta>0$,当 $x_1,x_2\in[a,b]$,$|x_1-x_2|<\delta$ 时,有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{1.3}$$

和

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{1.4}$$

将$[a,b]m$ 等分,使$\frac{b-a}{m}<\delta$,分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$,对 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 存在N,当 $n>N$ 时

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad (i=0,1,2,\cdots,m) \tag{1.5}$$

$x\in[a,b]$,必有 $i(0\leqslant i\leqslant m-1)$,使 $x\in[x_i,x_{i+1}]$,则据式(1.3),式(1.4),式(1.5),当 $n>N$ 时,有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon\qquad (\text{对一切自然数 } p \text{ 成立})$$

故 $f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

问题 6 设$\{[a_n,b_n]\}$为给定的闭区间序列($a_n<b_n$),其中任意两个区间都至少有一个公共点,求证必存在一点 ζ,使 $\zeta\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

证 显然两个区间$[a,b]$和$[c,d]$有公共点 $\Leftrightarrow$ $c\leqslant b$ 和 $a\leqslant d$,据条件$[a_n,b_n]$两两相交,故对一切 n 和p 有

$$a_n\leqslant b_p \tag{1.6}$$

从而$\{a_n\}$有上界,令 $\zeta=\sup\limits_n\{a_n\}$,由式(1.6)知 $\zeta\leqslant b_p(\forall p)$,但 $\zeta=\sup\limits_n\{a_n\}$,故 $\zeta\geqslant a_p(\forall p)$,从而 $\zeta\in[a_p,b_p](\forall p)$,即

$$\zeta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

§1.2 求数列极限的几种典型方法

求数列极限常用的基本方法有:①比较法则:$\alpha_n\leqslant x_n\leqslant\beta_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\alpha$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$;②证明数列单调有界;③对于待定型 1^∞ 利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$; ④利用 Cauchy 收敛准则,等等. 这些方法是读者熟知的,在这里不作介绍,本节我们将介绍另外几种典型的求数列极限方法.

1.2.1 Stolz 定理及其应用

Stolz 定理 设 $n>N$ 时,$y_n<y_{n+1}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$ (l 为有限数或无穷大),则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

由 Stolz 定理立即可得

推论 1　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=a\qquad(x_n>0)$.

推论 2　设 $x_n>0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

证　令 $x_0=1$，作新序列 $x_1'=\dfrac{x_1}{x_0}$, $x_2'=\dfrac{x_2}{x_1}$, $\cdots$, $x_n'=\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, $\cdots$，则 $\sqrt[n]{x_n}=\sqrt[n]{x_1'\cdot x_2'\cdots x_n'}$，由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=a$，故据推论 1(ii) 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

Stolz 定理给出了一种求离散的待定型 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限方法，它与洛必达法则很相似.

问题 7　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}\qquad(\alpha>0)$.

解　应用 Stolz 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{n^\alpha-n^\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{n^\alpha\left[\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}\\&=\frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

问题 8　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\{b_n\}$ 是单调增加的正数列 $(0<b_n<b_{n+1})$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_n}=0$$

证　令 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$，利用 Abel 求和公式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_n b_n$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{A_1(b_1 - b_2) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)}{b_n} + A_n \right]$$

应用 Stolz 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{A_1(b_1 - b_2) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)}{b_n - b_{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} (-A_{n-1}) = -A\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{b_n} = 0$$

问题 9　设 $u_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = h$，试证明

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{h}$$

证　首先由 Stolz 定理推论 2 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = h$，令 $x_n = \sqrt[n^2]{u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_n}$，$\ln x_n = \frac{\ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n}{n^2}$，应用 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}}{2} = \ln \sqrt{h}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{h}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{h}$$

问题 10　设 $u_n = e^{\frac{n}{4}} n^{-\frac{n+1}{2}} (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{\frac{1}{n}}$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解　令 $x_n = u_n^n$，则 $u_n = \sqrt[n]{x_n}$，由推论 2，可把求根式极限化为求比值极限，即求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\mathrm{e}^{\frac{2n+1}{4}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

取对数

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}&=-\frac{n(n+1)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2n+1}{4}\\&=-\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]+\frac{2n+1}{4}\\&=O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

问题 11　Stolz 定理可以推广到连续变量情形．

设$f(x)$定义在$(a,+\infty)$内,且在每个有穷区间(a,b)内有界,$g(x)$严格单调增加至$+\infty$,则

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}\qquad(f(x)>0)$.

假定(i)、(ii)两式右边极限存在(有限或无穷).

证　(i)先设$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l$,$l$为有限数,不妨设$g(x)>0$,任给$\varepsilon>0$,存在$A>a$,使$x_0\in(A,A+1]$时

$$l-\varepsilon<\frac{f(x_0+1)-f(x_0)}{g(x_0+1)-g(x_0)}<l+\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned}(l-\varepsilon)[g(x_0+1)-g(x_0)]<f(x_0+1)-f(x_0)<\\(l+\varepsilon)[g(x_0+1)-g(x_0)]\end{aligned}$$

类似地可得

$$\begin{aligned}&(l-\varepsilon)[g(x_0+2)-g(x_0+1)]<f(x_0+2)-f(x_0+1)\\&\qquad<(l+\varepsilon)[g(x_0+2)-g(x_0+1)]\\&\qquad\qquad\vdots\\&(l-\varepsilon)[g(x_0+n)-g(x_0+n-1)]<f(x_0+n)-f(x_0+n-1)\\&\qquad<(l+\varepsilon)[g(x_0+n)-g(x_0+n-1)]\end{aligned}$$

相加便得

$$(l-\varepsilon)[g(x_0+n)-g(x_0)]<f(x_0+n)-f(x_0)<$$
$$(l+\varepsilon)[g(x_0+n)-g(x_0)] \tag{1.7}$$

对充分大的 x,我们可以令 $x=x_0+n$,其中 $x_0\in(A,A+1]$,代入式(1.7),并同除以 $g(x)$,则得

$$(l-\varepsilon)\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]<\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x)}<(l+\varepsilon)\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right] \tag{1.8}$$

由于 $f(x_0)$,$g(x_0)$在$(A,A+1]$中有界,据式(1.8)可得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant l+\varepsilon$$

和

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant l-\varepsilon$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的,故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=+\infty$ $(-\infty$的情形类似). 任给正数 M,存在 $A>a$,使 $x_0\in(A,A+1]$时,有

$$f(x_0+1)-f(x_0)>M[g(x_0+1)-g(x_0)$$
$$f(x_0+2)-f(x_0+1)>M[g(x_0+2)-g(x_0+1)]$$
$$\vdots$$
$$f(x_0+n)-f(x_0+n-1)>M[g(x_0+n)-g(x_0+n-1)]$$

对充分大的 x,可令 $x=x_0+n$,其中 $x_0\in A,A+1]$,类似于式(1.8)可得

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x)}>M\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right] \tag{1.9}$$

令 $x\to+\infty$,便得

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant M$$

由于 $M>0$ 是任意的,所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

(ii) 取 $g(x)=x$,令 $F(x)=\ln f(x)$,则由(i)得

$$\lim_{x\to+\infty}\ln[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

1.2.2　上、下极限

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{k\to\infty}\sup_{n>k}\{x_n\}$ − $\{x_n\}$的最大聚点；

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{k\to\infty}\inf_{n>k}\{x_n\}$ − $\{x_n\}$的最小聚点．

此处聚点包括 $\pm\infty$，上、下极限运算有下列简单性质：

(1) 若 $x_n\leqslant y_n$，则$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n$；

(2) 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的上、下极限的存在有限，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

又若 $x_n, y_n\geqslant 0$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\ \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\ \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在有限，则对任何$\{y_n\}$有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n\ \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \qquad (x_n\geqslant 0)$$

注　实际上在(2)，(3)中只要假定等式和不等式两边不出现$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$即可．

定理 1　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$(有限或无穷大)$\Leftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = A$．

利用本定理证明数列极限存在的方法通常是根据条件证明$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$．

问题 12　设非负实数列$\{a_n\}$中任何两项都满足不等式

$$a_{n+m}\leqslant a_n a_m$$

求证序列$\{\sqrt[n]{a_n}\}$当 $n\to\infty$时有有限极限．

证　若$\{a_n\}$中有某个 $a_p=0$，则由 $a_{p+m}\leqslant 0\cdot a_m=0$ 可知对任何 $n\geqslant p$，恒有 $a_n=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$，故不妨设 $a_n>0(\forall n)$，令 $b_n=\ln a_n$，则

$$b_{m+n}\leqslant b_m + b_n$$

固定自然数 p，对任一自然数 n，令 $n=mp+r$，$0\leqslant r<p$，则

$$b_n = b_{mp+r}\leqslant mb_p + b_r$$