中国科学院教材建设专家委员会规划教材配套用书

应试指南丛书

医药高等数学学习辅导

严云良　金展平　主编

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
配套用书

医药高等数学
学习辅导

严云良　金展平　主 编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是中国科学院教材建设专家委员会规划教材《医药高等数学》的配套用书,《医药高等数学》侧重于理论,本书侧重于理论知识的归纳总结、各类各层次习题的分析与解法. 它有利于培养学生归纳总结、分析解决问题的能力,也有利于沟通教与学两教学环节.

本书可供高等医药院校各专业各层次的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学学习辅导/严云良,金展平主编.—北京:科学出版社,2004.9

中国科学院教材建设专家委员会规划教材配套用书

ISBN 7-03-014250-0

Ⅰ. 医… Ⅱ. ①严…②金… Ⅲ. 医用数学:高等数学-中医学院-教学参考资料 Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087120 号

责任编辑:曹丽英 / 责任校对:张怡君

责任印制:刘士平 / 封面设计:卢秋红

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 9 月第 一 版　　开本:720×1000 1/16

2004 年 9 月第一次印刷　　印张:12 1/4

印数:1－6 000　　字数:237 000

定价:16.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

《医药高等数学学习辅导》编写人员

主　编　严云良　金展平

副主编　马志庆　杨松涛　邵建华　郑洁刚
　　　　　周介南　钱微微　黄　浩　朱予民

主　审　周永治

编　委　（按姓氏笔画排序）

马志庆　山东中医药大学
邓　超　南京中医药大学
闫雪隐　辽宁中医学院
许华萍　浙江中医学院
朱予民　天津中医学院
伍　平　贵阳中医学院
杨　洁　北京中医药大学
杨松涛　安徽中医学院
邵建华　上海中医药大学
邱渊磊　浙江中医学院
郑洁刚　湖南中医学院
周介南　南京中医药大学
赵　莹　上海中医药大学
钟志强　南京中医药大学
钱微微　浙江中医学院
黄　浩　福建中医学院
梅凤兰　湖北中医学院
覃　洁　广西中医学院
颜素容　北京中医药大学

编写说明

《医药高等数学》、《医药数理统计》、《医药数学实验》是全国19所中医院校参加编写的数学系列教材.自2001年由科学出版社出版以来,受到广大师生欢迎.为了使大学数学教材与中学数学更好地衔接,也为了使教材适应中医院校规模迅速扩大、专业不断增多新形势发展的需要,编写组根据教育部对高等中医院校高等数学等课程精品教材的要求,由中国科学院教材建设专家委员会指导,听取了多方的意见,对教材作了修改、补充,编写了第二版的**《医药高等数学》、《医药数理统计》**与它的配套教材:**《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》**.该配套教材适应医药类、管理类、信息类(部分)、人文类的专业需要,将于2004年9月由科学出版社正式出版.

《医药高等数学学习辅导》是《医药高等数学》的配套教材,相应地也有10章.每章包括三大部分:一、内容提要与基本要求;二、习题解答(是该章习题的解答过程);三、增补习题解答(增补一些有代表性有适当难度的习题).书的最后有自测题,供学生练习.它有利于学习对高等数学的概念、理论的理解,有利于对运算和方法的掌握,帮助学生在学好高等数学的同时培养自己分析解决问题的能力,有利于教师的教学工作.

参加教材编写的有:黑龙江中医药大学、长春中医学院、辽宁中医学院、甘肃中医学院、天津中医学院、北京中医药大学、河南中医学院、山东中医药大学、安徽中医学院、南京中医药大学、上海中医药大学、浙江中医学院、江西中医学院、福建中医学院、湖北中医学院、湖南中医学院、广西中医学院、贵阳中医学院等.

由于我们水平有限,编写时间又仓促,不当与错误之处肯定不少,恳请读者与同行批评指正.

2004年8月

编　者

目　　录

第一章

函数与极限

一、内容提要与基本要求

本章介绍了函数的概念、性质与表示法；数列的极限、函数的极限；函数的增量、函数的连续性．函数是高等数学中研究的主要对象，极限方法是高等数学的主要方法．极限是从量变认识质变，从近似认识精确，从有限认识无限的一种数学方法．本章必须掌握下面几方面的内容．

1．正确理解函数的概念、函数的性质，会求函数的定义域，能将复合函数分解为若干简单函数．

2．正确理解函数的极限，能用 $\varepsilon-\delta$ 定义刻画函数的极限．理解 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义无关．了解极限存在的充分必要条件．

3．熟练掌握极限运算法则．正确理解并能熟练应用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$．

4．了解无穷小量、无穷大量，掌握函数的极限与无穷小量的关系．

5．正确理解函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续的概念，会判断函数的连续性与间断点．了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质．

二、习题一解答

1．指出下列各对函数 $f(x)$，$g(x)$ 是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；　　(2) $f(x)=\ln x^{2}$，$g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;　　(4) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 不同. $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 不同. $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

(3) 不同. $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$, $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,但对应关系不同.

(4) 表示同一函数.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right), f\left(\dfrac{3}{2}\right), f[f(x)], [f(x)]^2$.

解
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{5}$$
$$f[f(x)]=\frac{x}{1+2x}, [f(x)]^2=\left(\frac{x}{1+x}\right)^2=\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & -\infty<x\leqslant 0\\ 2^x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$ 求 $f(-2), f(0), f(3)$.

解　$f(-2)=5$,　$f(0)=1$,　$f(3)=2^3=8$

4. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$;　　(2) $y=2\sin 3x$;

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;　　(4) $y=a\ln(bx-c)$.

解 (1)
$$y=\sqrt{1-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$
(2)
$$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}\quad(-2\leqslant x\leqslant 2)$$
(3)
$$y=\log_2\frac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$$
(4)
$$y=\frac{1}{b}\left(c+e^{\frac{x}{a}}\right)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

5. 试通过 $y=f(u), u=\varphi(x)$,求出 y 关于 x 的复合函数:

(1) $y=e^u, u=\sin x$;　　(2) $y=\sqrt[3]{u}, u=\lg x$.

解 (1)
$$y=e^{\sin x}$$
(2)
$$y=\sqrt[3]{\lg x}$$

6. 下列函数是怎样复合而成的:

(1) $y=\ln\sin\sqrt{3x^2+\dfrac{\pi}{4}}$;　　(2) $y=\cos^3\dfrac{x^2}{2}$;

(3) $y=\arcsin(5+2x^3)$;　　(4) $y=\lg\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

解 (1) $$y=\ln u,u=\sin v,v=\sqrt{w},w=3x^2+\frac{\pi}{4}$$

(2) $$y=u^3,u=\cos v,v=\frac{x^2}{2}$$

(3) $$y=\arcsin u,u=5+2x^3$$

(4) $$y=\lg u,u=\sqrt{v},v=\frac{x-1}{x+1}$$

7. 求符号函数：

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & 当\ x<0\\ 0, & 当\ x=0\\ 1, & 当\ x>0\end{cases}$$

当 $x\to0$ 时的左、右极限，并说明当 $x\to0$ 时极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$. 当 $x\to0$ 时左、右极限不相等，故极限不存在.

8. 指出下列函数在指定条件下，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $\frac{1+2x^2}{x}(x\to0)$；　(2) $\frac{\sin x}{x}(x\to\infty)$；

(3) $\lg x(x\to0^+)$；　(4) $2x+5(x\to-\infty)$；

(5) $\frac{x+1}{x^2-4}(x\to2)$；　(6) $1-\cos2t(t\to0)$.

解 (2) (6) 为无穷小；(1) (3) (4) (5) 为无穷大.

9. $x\to1$ 时，下列各函数哪个是 $1-x$ 的高阶无穷小？哪个是 $1-x$ 的同阶无穷小？哪个是 $1-x$ 的等价无穷小？

(1) $(1-x)^{\frac{3}{2}}$；　(2) $\frac{1-x}{1+x}$；　(3) $2(1-\sqrt{x})$.

解 (1) $$\lim_{x\to1}\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{1-x}=\lim_{x\to1}(1-x)^{\frac{1}{2}}=0$$

当 $x\to1$ 时，$(1-x)^{\frac{3}{2}}$是较 $1-x$ 为高阶无穷小.

(2) $$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

当 $x\to1$ 时，$\frac{1-x}{1+x}$与 $1-x$ 是同阶无穷小.

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{2(1-\sqrt{x})}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{2}{1+\sqrt{x}}=1$$

当 $x\to1$ 时，$2(1-\sqrt{x})$与 $1-x$ 等价，即 $2(1-\sqrt{x})\sim(1-x)$.

10. x^2, $\frac{x^2-1}{x^3}$和 e^{-x}何时是无穷大？何时是无穷小？

解 $x\to\infty$时,$x^2\to\infty$,$\frac{x^2-1}{x^3}\to0$;$x\to+\infty$时,$e^{-x}\to0$;$x\to-\infty$时,$e^{-x}\to\infty$;
$x\to\pm1$时,$\frac{x^2-1}{x^3}\to0$.

11. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-1}{x+3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-5}{x^2+1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(9) $\lim\limits_{x\to-1}(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1})$;　　(10) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x}$;　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x$;

(13) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{k}{x}}$;　　(14) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{x}{2})^{\frac{x-1}{x}}$;　　(16) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$;　　(18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$;

(19) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$;　　(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$ $(a>0)$.

解 (1)
$$\lim_{x\to2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{5}$$

(2)
$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+1)=4$$

(3)
$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

(5)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

(6)
$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{\sin\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}} = -1$$

(7)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{3+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

(8)
$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

(9)
$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right) = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1} = \lim_{x\to-1}\frac{(x-2)(x+1)}{x^3+1}$$
$$= \lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1} = -1$$

(10)
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

(11)
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{\cos3x}}{\dfrac{\sin5x}{5x}\cdot5x} = \frac{3}{5}$$

(12)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = e^k$$

(13)
$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{k}{x}} = \lim_{x\to0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-k} = e^{-k}$$

(14)
$$\lim_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x} = \lim_{x\to0}\left[(1+3\tan x)^{\frac{1}{3\tan x}}\right]^3 = e^3$$

(15)
$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

(16)
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to0} a\ \ln(1+ax)^{\frac{1}{ax}} = a\ \lim_{x\to0}\ln(1+ax)^{\frac{1}{ax}}$$
$$= a\ \ln\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}} = a\ \ln e = a$$

(17)
$$\lim_{x\to\infty} x\ \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 1$$

(18)
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\ \sin\ x} = \lim_{x\to0}\frac{2\ \sin^2 x}{x\sin x} = 2$$

(19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}-1}=-\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x+1}=-1$

(20) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{e^{ax}}}{1+\dfrac{1}{e^{ax}}}=1\quad(a>0)$$

12. 函数 $y=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$,$\Delta x=\dfrac{\pi}{24}$时,$\Delta y=?$

解 $$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)-\sin\frac{\pi}{2}=-0.0086$$

13. 函数 $y=\sqrt{1+x}$,在 $x=3$,$\Delta x=-0.2$ 时,$\Delta y=?$

解 $$\Delta y=\sqrt{1+(3-0.2)}-\sqrt{1+3}=-0.051$$

14. 确定下列函数的间断点:

(1) $f(x)=\tan(2x+\dfrac{\pi}{4})$; (2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; (4) $y=\begin{cases}1+x^2, & x\geqslant0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x<0.\end{cases}$

解 (1) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}$($k$ 为整数).

(2) $x=0$.

(3) $x=1$,$x=2$.

(4) 没有.

15. 根据初等函数的连续性,求下列各函数的极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\tan\dfrac{\pi x}{4}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$.

解 (1) $$\lim_{x\to1}(x^2+1)\tan\frac{\pi x}{4}=(1^2+1)\tan\frac{\pi\cdot1}{4}=2$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0$$

16. 试由 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$ 确定 a,b.

解 $$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}$$

因为极限存在,所以 $1-a=0$,即 $a=1$,从而

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+b)x-b}{x+1}=-(1+b)$$

由给定条件知 $-(1+b)=0$,所以 $b=-1$.

17. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=A$($A$ 为常数),求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{(e^x-1)(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{x(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f(x)=A$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2A$.

18. 已知数列

$$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\cdots$$

证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在，并求之.

证　用数学归纳法先证 $a_n<2$. 当 $n=1$ 时，显然 $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $n=k$ 时结论成立，即 $a_n<2$，那么当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$，故对任一 n 都有 $a_n<2$.

再证 a_n 单调增加.

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}=\frac{(2-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0$$

$\{a_n\}$为单调有界数列，由极限的存在准则Ⅱ（单调有界数列必有极限）知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，由 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$，有 $a_n^2=2+a_{n-1}$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^2=\lim\limits_{n\to+\infty}(2+a_{n-1})$. 即 $A^2=2+A$，解得 $A=2,A=-1$（舍去），故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=2$.

19. 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

解　因为

$$\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\ln[a^1a^2\cdots a^n]=\ln a^{1+2+\cdots+n}=\frac{n(n+1)}{2}\ln a$$

所以，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$$

20. 设 $f(x)$在闭区间$[0,2a]$上连续，且 $f(0)=f(2a)$，则在$[0,a]$上至少存在一点 x，使 $f(x)=f(x+a)$.

证　令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，因为 $f(x+a)$可看成由 $f(u),u=x+a$ 复合而成，所以 $f(x+a)$在$[0,a]$上连续，故 $F(x)$在$[0,a]$上连续.

注意到：

$$F(0)=f(0)-f(a)$$
$$F(a)=f(a)-f(2a)=-[f(0)-f(a)]$$

① 若 $f(0)-f(a)=0$，则 $f(a)=f(0)=f(2a)$，即 $x=0,a$ 时，有 $f(x)=$

$f(x+a)$.

② 若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(0)F(a)<0$，由根的存在定理，在 $[0,a]$ 内至少存在一点 ξ，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综合①，②得：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 x，使 $f(x)=f(x+a)$.

三、增补习题解答

1. 设

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 10x-12, & x>2\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

解 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，函数 $y=1-2x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1)$，其反函数为 $y=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$；当 $x\in[-1,2]$ 时，函数 $y=x^3$ 的值域为 $[-1,8]$，其反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，函数 $y=10x-12$ 的值域为 $(8,+\infty)$，其反函数为 $y=\dfrac{1}{10}(x+12)$. 所以

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{1}{10}(x+12), & 8<x\end{cases}$$

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解 由于

$$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

又因为

$$\left|-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$$

故 $2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ 为有界函数. 而

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0\quad(\text{当 } x\to+\infty)$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0$$

注意:这里用到了不等式

$$|\sin x|\leqslant|x|,x\in(-\infty,+\infty)$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

解　由

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

令 $\dfrac{x^2-2}{3}=u$,则 $x^2=3u+2$,于是

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u+2}$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^2\right]=e^3$$

4. 适当选取 a,使函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x,x<0\\a+x,x\geqslant0\end{cases}$$

是连续函数.

解　显然,当 $x<0$ 时,$f(x)=e^x$ 是连续的;当 $x>0$ 时,$f(x)=a+x$ 也是连续的.只需考察分界点 $x=0$ 处的连续性.因为在 $x=0$ 左侧与右侧,函数表达式不同,我们分别考察 $x=0$ 处的左、右极限:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^x=e^0=1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(a+x)=a$$

因此,取 $a=1$,则

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=1$$

$f(x)$在 $x=0$ 连续,于是 $f(x)$处处连续.

5. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　这里和式中的每一项都是无穷小量,但无穷小的个数不是有限的,所以不能利用极限的四则运算法则.

现在我们将所讨论的序列适当放大和缩小得

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

从本题看出,无穷多个无穷小量相加,其和为 1.可见无限项的和与有限项的和有本质的差别.