

中学数学基础电视讲座

北京市工农教育研究室 编

三角
輔導資料

中学数学基础电视讲座

三角辅导资料

北京市工农教育研究室 编

冶金工业出版社

内 容 提 要

本《资料》是为配合教育部、中央广播事业管理局举办的“中学数学基础”电视讲座三角课的教学而编写的。全书共分五章：第一章任意角的三角函数；第二章三角恒等式；第三章反三角函数和三角方程；第四章任意三角形的解法；第五章向量、复数和正弦波。

本《资料》的读者对象为：中学数学基础电视讲座的收看者、职工业余学校的学员和教师、广大社会青年，也可供各类中等学校师生参考。

中学数学基础电视讲座
三角辅导资料
北京市工农教育研究室 编

*

冶金工业出版社出版
(北京灯市口74号)
新华书店北京发行所发行
太原印刷厂印刷

*

787×1092 1/32 印张8 7/8 字数191千字

1982年2月第一版 1982年2月第一次印刷

印数00,001~52,500册

统一书号：7062·3835 定价0.73元

前 言

为了配合教育部、中央广播事业管理局举办的“中学数学基础”电视讲座三角课的教学，便于学员预习、听课和复习，并为辅导教师提供参考资料，我们根据目前采用的课本——“中学数学基础”《三角》（人民教育出版社出版）组织编写了“中学数学基础电视讲座”《三角辅导资料》，由本讲座三角课主讲教师俞斯晨和北京师范学院数学系戴镇南两位副教授执笔。

本《资料》的内容包括任意角的三角函数，三角恒等式，反三角函数和三角方程，任意三角形的解法，向量、复数和正弦波五章。考虑到在职青年的实际情况和电视教学的特点，本《资料》在编写中，注意了各个教学单元之间的衔接，指出了学习重点和学习方法，并对课程的进度安排、每章的重点和基本要求、每讲的内容、典型的例题以及习题配备等都作了明确的说明，以期指导学员复习和练习。

由于时间仓促，编者水平有限，书中不当之处，恳请读者批评、指正。

北京市工农教育研究室

1981年9月

目 录

第一章 任意角的三角函数

第一节 角的概念的推广	1
第一讲 角的概念的推广	1
任意大小的角	1
弧度制	4
锐角三角函数概念的复习	6
第二节 任意角的三角函数	7
第二讲 任意角的三角函数 (一)	7
任意角的三角函数的定义	10
第三讲 任意角的三角函数 (二)	15
任意角的三角函数定义的复习	15
终边相同的角的同一三角函数的值相等	16
三角函数的符号	16
第四讲 任意角的三角函数 (三)	21
同角三角函数的基本关系	21
八个基本关系式的应用举例	23
第五讲 任意角的三角函数 (四)	26
诱导公式 (A)	26
$-\alpha$ 的三角函数公式	26
$90^\circ + \alpha$ 的三角函数公式	28
$-\alpha$ 和 $90^\circ + \alpha$ 的三角函数公式应用举例	30
第六讲 任意角的三角函数 (五)	31
诱导公式 (A) [续]	31
$180^\circ + \alpha$ 的三角函数公式	31
$270^\circ + \alpha$ 的三角函数公式	32

360° + α 的三角函数公式	32
诱导公式 (A) 的应用举例	34
第七讲 任意角的三角函数 (六)	36
诱导公式 (B)	36
诱导公式应用举例	37
第三、四节 三角函数的图象和性质	41
第八讲 三角函数的图象和性质 (一)	41
单位圆	41
第九讲 三角函数的图象和性质 (二)	46
正弦函数的图象	46
正弦函数的性质	48
第十讲 三角函数的图象和性质 (三)	52
余弦函数的图象	52
余弦函数的性质	54
第十一讲 三角函数的图象和性质 (四)	58
正切函数的图象和性质	58
余切函数的图象和性质	61
第一章习题课 (一)	64
第一章习题课 (二)	70
第一章总结说明	76

第二章 三角恒等式

第一节 和差角公式	79
第一讲 和差角公式 (一)	79
两点间距离公式的复习	79
和差角公式的概念	80
和差角的余弦公式	80
第二讲 和差角公式 (二)	83
和差角的正弦公式	83

和差角的正切公式	84
第二节 倍角和半角公式	86
第三讲 倍角和半角公式 (一)	88
倍角公式	88
例题	88
第二章习题课 (一)	92
公式的记忆	92
例题	93
第四讲 倍角和半角公式 (二)	98
半角公式	98
半角公式的证明	98
例题	100
第三节 积与和差互化	104
第五讲 积与和差互化 (一)	104
积化和差公式	104
公式应用举例	105
第六讲 积与和差互化 (二)	108
和差化积的公式	109
公式应用举例	110
第二章习题课 (二)	113
公式的检验举例	113
公式应用举例	114
第二章习题课 (三)	118
第二章总结说明	123

第三章 反三角函数和三角方程

第一节 反三角函数	128
第一讲 反三角函数 (一)	128
反函数概念的复习	128

函数 $y = \sqrt{x}$	130
反正弦函数	130
反正弦函数的定义	131
第二讲 反三角函数 (二)	134
函数 $y = \arcsin x$ 的图象和性质	134
例题	135
第三讲 反三角函数 (三)	139
反余弦函数的定义	139
反余弦函数的图象和性质	140
例题	140
第四讲 反三角函数 (四)	144
反正切函数	144
反余切函数	144
例题	145
第五讲 反三角函数 (五)	149
自变量符号相反的反三角函数间的关系	149
同一个自变量的反三角函数间的关系	151
第二节 三角方程	155
第六讲 三角方程 (一)	155
三角方程的引入和概念	155
$\sin x = a$ 的一般解	156
第七讲 三角方程 (二)	160
$\cos x = a$ 的一般解	160
$\operatorname{tg} x = a$ 与 $\operatorname{ctg} x = a$ 的一般解	162
例题	163
第八讲 三角方程 (三)	164
解法类型 I	164
特殊的代换	166

第九讲 三角方程 (四)	169
解法类型 II	169
方程 $a \sin x + b \cos x = c$ 的一般解法	171
第三章习题课	172
反三角函数	172
应用问题	175
解三角方程	178
第三章总结说明	180

第四章 任意三角形的解法

第一节 任意三角形的边角关系	182
第一讲 任意三角形的边角关系 (一)	182
与本章有关的几何知识	182
正弦定理	183
第二讲 任意三角形的边角关系 (二)	187
余弦定理	188
求高的公式	190
第三讲 任意三角形的边角关系 (三)	192
三角形的面积	192
求三角形外接圆和内切圆半径的公式	195
第二节 斜三角形的解法和应用	197
第四讲 斜三角形的解法和应用 (一)	197
类型 I	198
类型 II	198
第五讲 斜三角形的解法和应用 (二)	203
在物理学中的应用	203
在测高上的应用	204
在机械计算方面的应用	206
第四章习题课	208

第四章总结说明	211
---------------	-----

第五章 向量、复数和正弦波

第一节 向量	214
第一讲 向量 (一)	214
向量的概念	214
向量的加法	216
二向量的差	218
第二讲 向量 (二)	220
数和向量的积	220
平面向量的坐标表示法	222
第五章习题课 (一)	225
第二节 复数	231
第三讲 复数 (一)	231
复数运算的复习	231
复数的几何表示法	234
第四讲 复数 (二)	236
复数和平面向量	236
复数与平面向量的差异	240
第五讲 复数 (三)	241
利用复数三角式作乘法与乘方	241
利用复数三角式作除法与开方	244
第六讲 复数 (四)	247
复数三角式的应用	247
复数的指数式	250
第五章习题课 (二)	253
第三节 正弦波	259
第七讲 正弦波 (一)	259
正弦波形	259

第八讲 正弦波 (二)	264
同频率的正弦波的叠加	264
第五章总结说明	269

第一章 任意角的三角函数

本章的主要内容为角的概念的推广，任意角的三角函数、三角函数的图象和三角函数的性质，全章共分四节，讲十三讲：第一节角的概念的推广一讲；第二节任意角的三角函数六讲；第三节三角函数的图象与第四节三角函数的性质四讲。

在本章之末有两讲习题课和全章总结说明。

第一节 角的概念的推广

第一讲 角的概念的推广（课本1~6页）

任意大小的角

通过曲柄连杆机构和互相啮合的齿轮的实例，可以引入大于 360° 的角和负角。

角可以看成是由一条射线绕着它的端点 O ，从原来的位置 OA 旋转到另一个位置 OB 而形成的。如图1-1、旋转开始时的射线 OA 叫做角 α 的始边，旋转终止时的射线 OB 叫做角 α 的终边，射线的端点 O 叫做角 α 的顶点。

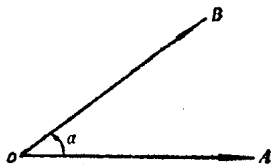


图 1-1

今后，将经常在直角坐标系里讨论角，即使角的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴正半轴重合。

角的形成可以有两种相反的旋转方向，在直角坐标系

里，把按反时针方向旋转而成的角作为正角，把按顺时针方向旋转而成的角作为负角，如图1-2。当一条射线不作任何旋转时，我们也可把它看成一个角，叫做零角。

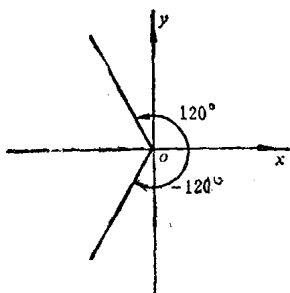


图 1-2

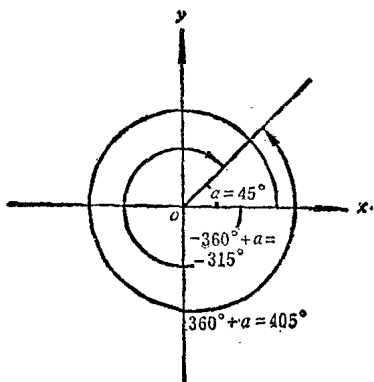


图 1-3

设一条射线从始边形成的角是 α ，如图 1-3， $\alpha = 45^\circ$ 。如果 α 的终边按反时针方向再转一圈，得 $360^\circ + \alpha$ 的角；再转两圈，得 $2 \times 360^\circ + \alpha$ 的角；……。一般， α 的终边按反时针方向再转 n 圈，得 $n \cdot 360^\circ + \alpha$ 的角。与此相类似， α 的终边按顺时针方向再转 n 圈，得 $-n \cdot 360^\circ + \alpha$ 的角。所有这些角都有相同的始边和终边。通常，所有和 α 角终边相同的角（始边总是取 x 轴的正半轴），连同 α 角在内，可以用公式

$$n \cdot 360^\circ + \alpha \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

来表示。 n 取正值时，表示 α 角的终边再作反时针方向旋转； n 取负值时，表示 α 角的终边再作顺时针方向旋转。

注意 1° 上式中角 α 是任意角；

2° 终边相同的角不一定相等，但相等的角，终边一定

相同。

角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角。如 45° 、 405° 、 -315° 都是第一象限的角； 120° 是第二象限的角； -120° 是第三象限的角。若角的终边与 x 轴或 y 轴重合，这样的角不属于任何象限，如 0° 、 90° 、 180° 、 270° 、 360° 、 -90° 、 -540° 的角等。

例 1 判断 120° 、 -45° 、 30° 各是第几象限的角，写出和它们有相同终边的一切角，并把其中在 -360° 到 720° 间的角写出来。

解：（1） 120° 是第二象限的角，与它有相同终边的一切角是

$$n \cdot 360^\circ + 120^\circ$$

其中在 -360° 到 720° 间的角是：

$$-1 \times 360^\circ + 120^\circ = -240^\circ$$

$$0 \times 360^\circ + 120^\circ = 120^\circ$$

$$1 \times 360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$$

（2） -45° 是第四象限的角，与它有相同终边的一切角是

$$n \cdot 360^\circ - 45^\circ$$

其中在 -360° 到 720° 间的角是：

$$0 \times 360^\circ - 45^\circ = -45^\circ$$

$$1 \times 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$$

$$2 \times 360^\circ - 45^\circ = 675^\circ$$

（3） 30° 是第一象限的角，与它有相同终边的一切角是

$$n \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

其中在 -360° 到 720° 间的角是：

$$-1 \times 360^\circ + 30^\circ = -330^\circ$$

$$0 \times 360^\circ + 30^\circ = 30^\circ$$

$$1 \times 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$$

弧度制

在平面几何中讲过弧度制，下面复习有关概念。

1 弧度的角

当弧长等于半径时，这条弧叫做含有 1 弧度的弧，它所对的圆心角叫做 1 弧度的角。

如图 1-4。

用弧度作单位来度量角（或弧）的制度叫做弧度制。

如果半径为 R ，弧长为 l ，那么这条弧所对的圆心角的弧度数 α 是

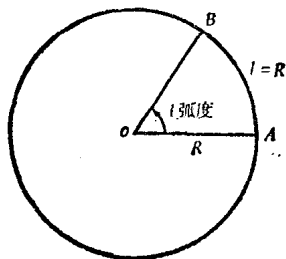


图 1-4

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

整个圆周所对的圆心角的弧度数是 $\frac{2\pi R}{R}$ ，即 2π 弧度，而这个角在角度制中是 360° ，因此 $360^\circ = 2\pi$ 弧度。由此得下表（特殊的角度与弧度的换算表）。

角 度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
弧 度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

由于 $180^\circ = \pi$ 弧度，所以

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{弧度} \approx 0.017453 \text{弧度}$$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ}17'44.8''$$

利用上述关系，可以进行角度与弧度的换算。

例 1 把 $67^{\circ}30'$ 化成弧度。

$$\text{解：} \because 67^{\circ}30' = 67\frac{1}{2}^{\circ}$$

$$\therefore 67^{\circ}30' = \frac{\pi}{180} \text{弧度} \times 67\frac{1}{2} = \frac{3\pi}{8} \text{弧度} \approx 1.18 \text{弧度}。$$

例 2 把 1.5 弧度化成度。

$$\text{解：} 1.5 \text{弧度} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \times \frac{3}{2} = \frac{270^{\circ}}{\pi} \approx 85^{\circ}57'$$

在用弧度度量角时，“弧度”二字通常略去不写。例如

$\angle AOB = 1 \text{ 弧度}$ ，可以写成 $\angle AOB = 1$ ； $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 弧度}$ ，可以

写成 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 。

角的概念推广后，弧度制也要相应地推广。那么和角 α 有同一条终边的任意角，可以写作

$$2n\pi + \alpha (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

计算弧长公式是

$$l = dR$$

即弧长等于圆心角的弧度数乘以这个圆的半径。

注意 引入弧度制后，使得计算弧长的公式变得十分简单。

锐角三角函数概念的复习

在直角三角形 ABC 中(图1-5), $\angle C$ 是直角, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边长分别是 a 、 b 、 c , 当锐角 A 确定之后, 三条边 a 、 b 、 c 所组成的六个比也就完全确定了, 我们把这六个比分别叫做角 A 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割, 记为

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} \quad \csc A = \frac{c}{a}$$

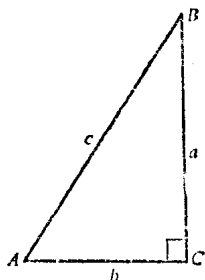


图 1-5

它们统称为锐角的三角函数。

常用的 30° 、 45° 、 60° 的角的函数值如下表:

A	$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

作 业

复习课本1~6页。预习课本9~15页。

做课本第6页习题 4, 5, 8双号题, 9, 11, 12。

4. 指出下列各角所在象限:

(1) $4 \times 360^\circ + 30^\circ$

(2) $-3 \times 360^\circ + 150^\circ$