恒谦教学与备考研究中心研究成果

结合最新教材内容 体现最新课改精神

学习应考实用手册

丛书主编 方可

高中数学

北京教育出版社

恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

学习应考

实用手册

高中数学

丛书主编　方　可
本册主编　安振平
撰 稿 人　苟春鹏　张巨轮
　　　　　梁丽平　安振平

北京教育出版社

学习应考

实用手册

学习应考实用手册
高中数学
GAOZHONGSHUXUE
丛书主编 方 可
*
北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码 100011
网 址：www bph com cn
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
陕西宏业印务有限责任公司印刷
*
787×960 16开本 30 5印张 605 000字
2004年5月第1版 2004年5月第1次印刷
印数 1-10 000
ISBN 7-5303-3320-8
G·3246 定价:35 00元

编写说明

许多师生可能都有过这样的期盼：有一本书，既有系统完备的知识梳理，又有科学实用的学法点拨；既适宜于平日的知识积累，又有助于综合能力的提升；既可用于同步学习，又可用于考前复习，那该多妙啊！现在，这样的书就展现在大家的面前，它就是《学习应考实用手册》丛书。

这套丛书历时两年编撰而成，凝聚着成百上千位优秀教师的智慧和心血，具有以下鲜明的特点：

一、学科知识系统完备

本丛书为师生提供的学习应考方面的知识内容，非常系统全面。既有知识的梳理，又有重点、难点解析，做到了学科的纵向、横向延伸，有助于思维拓展，其独到性和实用性并重。

二、学法和应试技巧科学实用

本着“授人以鱼，不如授之以渔”的指导思想，在每节的知识讲解之后，都就学习掌握本节知识的方法和应试技巧加以点拨。这些都是编者多年实践的结晶，精要易懂，科学实用。这对学习能力、解题能力和应考能力的提高，定会大有裨益。

三、题型全面、完整，紧贴中考、高考

本丛书在各节中既按所涉及的知识对近五年的中考、高考

试题进行分类汇编，又对中考、高考试题的命题特点、命题方向加以归纳评析，并参照最新考纲合理编排，是学习应考无声的参谋和导师。

四、结合最新教材内容，体现最新课改精神

本丛书涉及的例词、例句大都选自新教材，并按照新的课程改革要求，由编者自己动手整理配备了既全面又翔实的题型、材料和附录，内容新颖、别致，力求与学科内最新科技信息紧密结合。

五、设计独特，印刷精美，资料丰富，检索方便

本丛书采用轻型特质纸印制，环保卫生，美观大方。资料排序合理，纲举目张，检索方便。

总之，本丛书融知识、资料、学法、应试技巧及考试研究于一体，具有信息量大、适用面广和系统性强等特点，既是教师的教学参考资料，也是学生的学习应考工具。相信本丛书一定会成为您的良师益友。

本丛书的出版得到了全国一些名校名师的大力支持，在此表示衷心感谢！

本丛书如有不足之处，恳请广大读者批评指正。

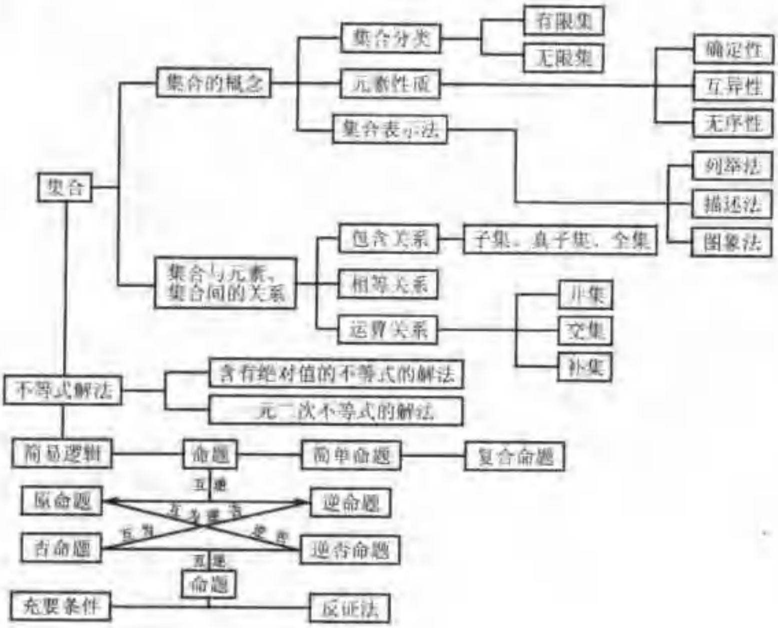
恒谦教学与备考研究中心
《学习应考实用手册》丛书编委会

目录

第1章

集合与简易逻辑

知识结构



第一节　集　合

考纲要求

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义，并能掌握有关的术语和符号，且会运用它们正确地表示简单的集合．

知识梳理

1．集合的基本概念

(1)集合是一个不加定义的概念．一般地，符合某种条件(或某种性质)的对象的全体就构成一个集合，通常用大写拉丁字母来表示．集合中的每一个对象叫做这个集合的元素，通常用小写拉丁字母表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$．

(2)集合的分类．

$$\text{集合}\begin{cases}\text{按元素的属性分}\begin{cases}\text{数集(元素是数)}\\ \text{点集(元素是点)}\\ \text{序数对(元素是有序数列)}\end{cases}\\ \text{按元素多少分}\begin{cases}\text{有限集}\\ \text{无限集}\\ \text{空集}\end{cases}\end{cases}$$

其中，不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$．

(3)集合中元素的三个特性．

①确定性：任何一个元素 a，对于 $a\in A$，或 $a\notin A$，二者必具其一，且仅具其一．

②互异性：集合中的元素各不相同，即同一个元素在一个集合里不能重复出现．

③无序性：在一个集合里，不必考虑元素之间的排列次序．

(4)集合的表示法．

①列举法：把集合中的元素一一列举出来写在大括号内．有限集常采用此法．

②描述法：将集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内．无限集常采用此法．

③图象法(文氏图)：将集合用图形表示出来，对于抽象集合用此法较直观．

一些特定的集合还可以用一个大写的字母表示．如：$\mathbf{N}^*$——自然数集($\mathbf{N}_+$)，$\mathbf{Z}$——整数集，$\mathbf{Q}$——有理数集，$\mathbf{R}$——实数集等．

2．元素与集合，集合与集合间的关系

(1)元素与集合的关系用“$\in$”或“$\notin$”表示．

(2)集合与集合间的关系．

①包含关系：

a．子集：对于两个集合 A 与 B．若任意 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$．b．真子集：若 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$，或 $B\supsetneqq A$．c．全集：如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用 U 表示．

②相等关系：

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$，即 A 与 B 相等．

③运算关系：

两个集合的运算关系是在全集上进行的．

a．交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集．记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A，且\ x\in B\}$．b．并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集．记为 $A\cup B$．即 $A\cup B=\{x|x\in A，或\ x\in B\}$．c．补集：如果 $A\subseteq S$，那么 A 在 S 中的补集为 $\complement_S A=\{x|x\in S，且\ x\notin A\}$．

3．集合之间的运算性质

(1)$A\cap B=B\cap A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\cap U=A$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$．

(2)$A\cup B=B\cup A$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\cup U$

$=U$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

(3)$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$.

(4)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

4. 集合间的传递性

若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

5. 有限集的子集个数与有限集合间元素的个数计算公式

(1)若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集个数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个，其中真子集的个数为 2^n-1 个，非空子集个数为 2^n-1 个，非空真子集个数为 2^n-2 个.

(2)若有限集 A 的元素个数为 $n(A)$，U 为全集，则有：

①$n(A)+n(\complement_U A)=n(U)$；

②$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\complement_U B)=n(B)-n(B\cap\complement_U A)$；

③$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

6. 学习本节应注意以下几点

(1)"$\in$"与"$\subseteq$"的区别："$\in$"表示元素与集合之间的关系，如 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；"$\subseteq$"表示集合与集合间的关系，如 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

(2)空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集.

(3)a 与 $\{a\}$ 的区别：a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合. 切记 $0\neq\{0\}$，$\varnothing$表示空集，而 $\{\varnothing\}$ 表示含有一个元素 $\varnothing$ 的集合，二者的关系是 $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$.

题型分类

1. 考查集合自身的概念

例 1 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2=y+1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$，则集合 A 用列举法可表示为________.

开窍 这里的元素是有序数对 (x,y)，可理解为直角坐标平面上点的坐标. 因此，如果 $a\neq b$，则 (a,b) 与 (b,a) 是不同的元素.

讲解 $\because |x|\leqslant 2$，$x\in\mathbf{Z}$，$\therefore x$ 可取 $-2,-1,0,1,2$，对应的 y 分别取 $3,0,-1,0,3$. 该集合中的元素实际上是抛物线 $x^2=y+1$ 上的五个点.

故集合 A 可表示为 $\{(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$.

辨误 解答本题应注意两点：一是准确识别集合中的元素是有序数对；二是首先由限制条件 $|x|\leqslant 2$，$x\in\mathbf{Z}$，确定所有的 x 取值. 抓住了这两点该题的求解就迎刃而解了.

反思 对于有限集合，既可采用描述法表示，也可采用列举法表示. 准确识别集合中的元素属性是解决这类问题的关键.

例 2 设含有三个实数的集合可表示为 $\{a,a+d,a+2d\}$，也可表示为 $\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a,d,q\in\mathbf{R}$，则常数 $q=$________.

开窍 从两集合相等入手进行分类求解.

讲解 依元素的互异性可知，$a\neq 0$，$d\neq 0$，$q\neq 0$，$q\neq\pm 1$.

由两集合相等有

(1)$\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2,\end{cases}$ 或(2)$\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq.\end{cases}$

由(1)解得 $a+2a(q-1)=aq^2$，

因为 $a\neq 0$，所以 $q^2-2q+1=0$，

所以 $q=1$(舍去).

由(2)解得 $a+2a(q^2-1)=aq$，

因为 $a\neq 0$，所以 $2q^2-q-1=0$，

所以 $q=1$，或 $-\dfrac{1}{2}$，因为 $q\neq 1$，所以 $q=-\dfrac{1}{2}$.

综上所述，$q=-\dfrac{1}{2}$.

辨误 挖掘出问题中的隐含条件：$a\neq 0$，$d\neq 0$，$q\neq 0$、± 1，是避免出现错误，简捷解决本题的关键所在.

反思 一般地，在处理元素用字母或含有字母

的式子表示的集合问题时，要注意利用集合的基本性质，尽可能挖掘出问题的隐含条件. 特别是利用元素的互异性排除不可能情况，一方面可简化运算，另一方面不易出错.

例 3　已知集合：

$M=\left\{x \middle| x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，

$N=\left\{x \middle| x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，

$P=\left\{x \middle| x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$. 则 M、N、P 满足关系(　　).

A. $M=N\subsetneqq P$　　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

开窍　从判断元素的共性和差异入手.

讲解　对于集合 $M\left\{x \middle| x=\frac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$；

对于集合 $N\left\{x \middle| x=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$；

对于集合 $P\left\{x \middle| x=\frac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$.

由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数，而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数，所以 $M\subsetneqq N=P$，故选 B.

辨误　解答本题，不少同学都是取整数 m、n、p 的一组值，用描述法写出集合 M、N、P，然后观察这三个集合之间的关系. 这种解法虽然直观，但由于不能写出集合 M、N、P 中的所有元素，可能会产生判断失误. 另外，这种特殊值法也只是停留在最初的归纳阶段，没有从理论上解决问题.

反思　判断集合之间的包含与被包含关系，就是要根据集合中元素所满足的限制条件，从判断各集合中元素所具有的共性和差异入手.

2. 以集合为工具考查集合语言、集合思想的运用

例 4　已知集合 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，如果 $A\cap B=\varnothing$，求 m 的取值范围.

开窍　注意到集合 A 与 B 都表示不等式或不等式组的解集，欲求 $A\cap B=\varnothing$ 时 m 的取值，实际上是求不等式 $10+3x-x^2\geqslant0$ 与 $m+1\leqslant x\leqslant 2m-1$ 无公共解时的 m 的取值. 由于集合 A 中的元素是确定的，所以只需 B 中不含 A 中的元素即可.

讲解　化简集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$.

由 $A\cap B=\varnothing$ 知，$B=\varnothing$，或 $B\neq\varnothing$.

当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1\Rightarrow m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，由 $A\cap B=\varnothing$，得

(1) $\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\2m-1<-2,\end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1>5.\end{cases}$

解(1)无解，解(2)得 $m>4$.

综上知，$m>4$，或 $m<2$.

辨误　这里要特别注意，当 $B=\varnothing$ 时，$A\cap B=\varnothing$ 仍然成立. 若忽视了 B 是空集这一特殊情况，就会得出 $m>4$ 的不完整解答，出现对而不全的错误.

反思　解答本题的关键在于集合语言向不等式(组)解的转化，进一步体现了集合语言与集合思想的灵活运用. 空集是一个特殊的重要集合. 当题中隐含着空集参与集合关系及运算时，我们应象重视数"0"在解题中的作用那样，重视空集在解涉及集合问题中的作用.

例 5　已知 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant4\}$，$Q=\left\{(x,y)\middle|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\right\}$，且 $P\cap Q=Q$，求实数 m 的取值范围.

开窍　集合 P 表示平面上以 $O_1(-2,3)$ 为圆心，2 为半径的圆所围成的区域(包括圆周). 点集 Q 表示平面上以 $O_2(-1,m)$ 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部. 要使 $P\cap Q=Q$，即 $\odot O_2$ 内含于 $\odot O_1$.

讲解　由 $P\cap Q=Q$ 知，圆 $O_2:(x+1)^2+(y-m)^2=\frac{1}{4}$ 应内含于圆 $O_1:(x+2)^2+(y-3)^2=4$.

$|O_1O_2|^2\leqslant(R_1-R_2)^2$ (R_1、R_2 分别为两圆半径)，即 $(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$，

解得 $3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

辨误　$P\cap Q=Q$ 也包括 $\odot O_2$ 内切于 $\odot O_1$，因而注意别忘了 $|O_1O_2|^2\leqslant(R_1-R_2)^2$ 中的等号.

反思　熟悉用集合语言表述问题，利用数形结合方法来解题. 本题求解途径的关键是悟透了题中解析思想的味道.

▶例 6　设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合：

(1) $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$；

(2) 若 $x_1,x_2\in[-1,1]$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$.

试问：定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $g(x)=x^2+2x-1$ 是否属于集合 M? 请说明理由.

开窍　判断 $g(x)$ 是否属于 M，只需判断 $g(x)$ 是否满足条件(1)、(2).

讲解　显然 $g(x)$ 满足条件(1)，下面只要对 $g(x)$ 判定(2)中的绝对值不等式是否成立即可.

设 $x_1,x_2\in[-1,1]$，则 $|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$.

因为 $|g(x_1)-g(x_2)|$

$=|(x_1^2+2x_1-1)-(x_2^2+2x_2-1)|$

$=|(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)|$

$=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2+2|$

$\leqslant(|x_1|+|x_2|+2)\cdot|x_1-x_2|$

$\leqslant 4|x_1-x_2|$.

所以函数 $g(x)$ 满足条件(2)，故 $g(x)$ 属于集合 M.

辨误　要说明 $g(x)\in M$，必须证明 $g(x)$ 同时满足条件(1)、(2). 否则若漏掉一个条件的验证，就不能说明 $g(x)\in M$.

反思　不管集合中元素具有何种代表意义，要证明某一元素是否属于给定集合，就要证明该元素是否满足给定集合中元素应具备的一切条件.

▶例 7　某校有 17 名学生每人至少参加了全国数学、物理、化学三科竞赛之一，其中参加数学的 11 人，参加物理的 7 人，参加化学的 9 人；参加数学和物理的 4 人，参加物理和化学的 3 人，参加化学和数学的 5 人. 求三科竞赛都参加的人数.

开窍　若采用摩根定律求解较为麻烦，若能利用文氏图来解，则会迎刃而解.

讲解　设三科竞赛都参加的有 x 人，则由文氏图（如图 1-1-1）知，

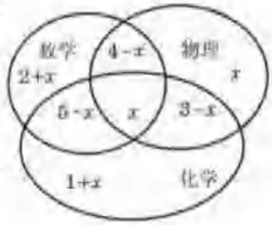


图 1-1-1

$2+x+4-x+x+5-x+x+3-x+1+x=17$，解得 $x=2$.

辨误　因为参加数学和物理的 4 人中包括三科都参加的 x 人，所以参加数学和物理而不参加化学的人数为 $(4-x)$ 人. 只参加数学和化学而不参加物理的人数为 $(5-x)$ 人. 只参加物理和化学而不参加数学的人数为 $(3-x)$ 人. 这时单独参加数学、物理、化学的人数分别为 $(2+x)$ 人，x 人，$(1+x)$ 人. 这里的计算应准确，否则会出错.

反思　集合中图形语言具有直观形象的特点，将集合问题图形化，有助于显示集合间的关系，所以，文氏图是进行集合运算的有力工具.

解题规律

1. 元素与集合，集合与集合之间关系的判断

解决这类问题的常用方法有：观察法、图示法、分析法. 无论哪一种方法，都是由从属关系、包含关系、相等关系的概念出发，判定元素与集合间的隶属关系.

▶例 1　集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）.

A. $M\subsetneqq N$　　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M=N$　　　D. $M\cap N=\varnothing$

简解 1　代值验证，然后观察结果，分别令 $k=\cdots,-1,0,1,2,\cdots$，得

$M=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}$

$N=\left\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\right\}$

那么 $M\subsetneqq N$，故选 A.

简解2 对 M：$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{2k\pi+\pi}{4}$

$=\frac{(2k-1)}{4}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

对 N：$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{k\pi-2\pi}{4}$

$=\frac{(k+2)\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z})$.

$\because k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore(2k+1)\pi$ 为 π 的奇数倍，$(k+2)\pi$ 为 π 的整数倍.

$\therefore M\subsetneqq N$，选 A.

例2 设集合 $A=\{x|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，对 $m\in A,n\in A$，有如下结论：

(1)$m+n\in A$；(2)$m-n\in A$； (3)$mn\in A$；

(4)$\frac{m}{n}\in A\ (n\neq0)$.

其中错误的序号是__________.

简解 填(4). 易验证(1)、(2)、(3)正确，对于(4)，取 $m=1+\sqrt{2}\in A,n=3\in A$，

而 $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\notin A$.

例3 已知三个集合 $E=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$F=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$G=\{x|x^2-bx+2=0\}$. 试问：同时满足 $F\subsetneqq E,G\subseteq E$ 的实数 a 和 b 是否存在？若存在，找出 (a,b) 所有值的集合；若不存在，请说明理由.

简解 化简集合 E、F，易得 $E=\{1,2\}$，

$F=\{1,a-1\}$.

由 $F\subsetneqq E$，得 $a-1\neq2$，及 $a-1\neq1$.

即有 $a\neq2$，或 $a\neq3$.

由 $G\subseteq E$，得 $b^2-8<0$，或 $\begin{cases}b^2-8\geqslant0,\\1\in G,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b^2-8\geqslant0,\\2\in G.\end{cases}$

解之得，$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$，或 $b=3$.

综上得 $\{(a,b)|a\neq2,3$，且 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$，或 $b=3\}$.

例4 同时满足(1)$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；(2)若 $a\in M$，则 $(6-a)\in M$ 的非空集合 M 有(　　).

A. 32 个　　B. 15 个

C. 7 个　　D. 6 个

简解 由已知条件知，集合 M 中的元素必须具备两个条件，不妨设 $1\in M$，那么 $6-1=5$，也同时为 M 中的元素，由此可知 $M=\{1,5\}$，同理可推 $\{2,4\},\{3\},\{1,5,2,4\},\{1,5,3\},\{2,4,3\},\{1,2,3,4,5\}$ 都满足题设. 故选 C.

2. 集合的有关运算

关于集合的运算，一方面考虑运用集合中的运算律进行推理运算；另一方面利用文氏图进行某些集合运算，思路会更清晰，解法会更简明.

例5 已知非空集合 M 和 N，规定 $M-N=\{x|x\in M$，且 $x\notin N\}$，那么 $M-(M-N)$ 等于(　　).

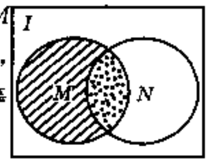


图 1-1-2

A. $M\cup N$

B. $M\cap N$

C. M

D. N

简解 如图 1-1-2 所示. 其中斜线阴影部分为 $M-N$，于是点阴影部分就是 $M-(M-N)$，显然等于 $M\cap N$. 故选 B.

例6 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么 $M\cup N$ 的补集等于(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

简解 由 $\frac{y-3}{x-2}=1$，得 $y=x+1\ (x\neq2)$，集合 M 表示直线 $y=x+1$，去掉(2,3)的所有点. 集合 N 表示整个直角坐标平面去掉直线 $y=x+1$ 后的所有点. 集合 $M\cup N$ 表示直角坐标平面上所有点，但要去掉点(2,3)，显然 $M\cup N$ 的补集所对应的是点(2,3)的单元素集合，故选 B.

例7 如图 1-1-3 所示，I 是全集，M、P、S

是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是（　　）.

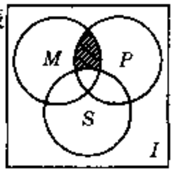


图 1-1-3

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap \complement_I S$

D. $(M\cap P)\cup \complement_I S$

简解　由图 1-1-3 得数，阴影部分包含于$\complement_I S$，从而排除 A、B，再运用集合运算定义，计算选肢 C、D 的结果，易选 C.

例 8　设 $A=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2a+\frac{1}{2}\right.\right\}$，$B=\{x\mid -2a<x<2a\}$，$a>0$，求 $A\cap B$.

简解　$\because a<2a<2a+\frac{1}{2}$，

∴两集合在左端点分下列三种情况.

(1)当 $-2a=-\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{4}$时，

$A\cap B=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$；

(2)当 $-2a>-\frac{1}{2}$，即 $0<a<\frac{1}{4}$时，

$A\cap B=\{x\mid -2a<x<2a\}$；

(3)当 $-2a<\frac{1}{2}$，即 $a>\frac{1}{4}$时，

$A\cap B=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2a\right.\right\}$.

注意　对于含有参数的两个集合，求其交集应就 a 的情况进行分类讨论.

3. 子集、真子集的个数以及有限集合中元素个数的求法

例 9　满足关系 $\{a\}\subseteq X\subsetneqq\{a,b,c,d\}$ 的集合 X 共有________.

简解　问题可转化为求集合$\{c,b,d\}$的真子集的个数，共有 $2^3-1=7$. 亦可列出所有满足题意的集合 X，即有：$\{a\}$、$\{a,b\}$、$\{a,c\}$、$\{a,d\}$、$\{a,b,c\}$、$\{a,b,d\}$、$\{a,c,d\}$，共 7 个.

例 10　设 $A=\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=a(x+2)\}$，当 a 分别取何实数值时，$A\cap B$中的元素(1)只有一个；(2)有两个.

简解　A 表示点集，是以原点为圆心，1 为半径的上半圆；B 表示的点集是过定点$(-2,0)$的直线系，且斜率是 a. 从而 $A\cap B$ 中元素的个数就是直线与上半圆交点的个数.

(1)由直线与上半圆相切，得

$\frac{|a(0+2)|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ (a>0)$，解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)由(1)及 a 的几何意义知，$0\leqslant a<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 11　某工厂有 A、B 两项改革方案，向 50 名工人征求赞成与否的意见. 赞成 A 的人数是全体征求意见人数的$\frac{3}{5}$，其余不赞成. 赞成 B 的人比赞成 A 的人多 3 个，其余不赞成. 另外，对 A、B 都不赞成的人数比对 A、B 都赞成的人数的$\frac{1}{3}$多 1 人. 问对 A、B 都赞成和都不赞成的工人各有多少人？

简解　求 A、B 两种方案，赞成与否的人数关系比较复杂，如果能采用集合表示这种关系，且借助于文氏图来分析，即化难为易.

赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$，赞成 B 的人数为 $30+3=33$.

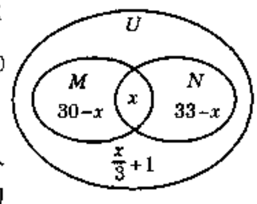


图 1-1-4

记被调查的 50 名工人为全集 U，赞成 A 的工人的全体记为集合 M，赞成 B 的工人的全体记为集合 N.

设 A、B 都赞成人数为 x，则由题设知赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$，对 A、B 都不赞成的人数为$\frac{x}{3}+1$，画出如图 1-1-4 所示. 依题意，得

$$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50.$$

解得 $x=21$，$\frac{x}{3}+1=8$.

∴对 A、B 都赞成的人数为 21，对 A、B 都不赞成的人数为 8.

第二节　含有绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

考纲要求

掌握 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c$ 型的不等式的解法；一元二次不等式的解法；了解简单分式不等式的解法.

知识梳理

1. 解不等式，首先应掌握以下三条基本性质

(1) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

(2) $a>b, c>0 \Leftrightarrow ac>bc$；

(3) $a>b, c<0 \Leftrightarrow ac<bc$（$c$ 可以为常数，也可为式子）.

2. 含有绝对值的不等式的解法

(1) 几类简单的绝对值不等式的解法规则.

①若 $a>0$，$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)>a$，或 $f(x)<-a$.

②若 $a=0$，$|f(x)|<a$ 无解；

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

③若 $a<0$，$|f(x)|<a$ 无解；

$|f(x)|>a \Rightarrow f(x)$ 只需有意义即可.

(2) 注意掌握以下四类绝对值不等式的解法.

① $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$ $(g(x)>0)$；

② $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$ $(g(x)>0)$；

③ $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)]\cdot[f(x)-g(x)]>0$；

④ $|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)]\cdot[f(x)-g(x)]<0$.

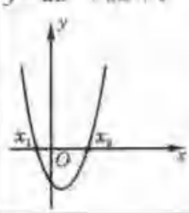
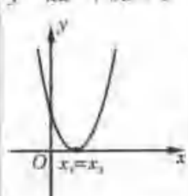
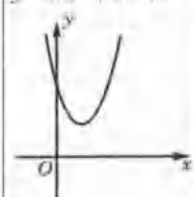
(3) 对于形如 $|x-a|+|x-b|>m$，或 $|x-a|+|x-b|<m$（m 为正实数）的不等式求解，常利用实数绝对值的几何意义求解较为方便，也可采用零点分段法.

注意　所谓零点分段法，即依据不等式中所含各绝对值的零点，将数轴划分为若干区间，通过对各区间取值情况的讨论，去掉绝对值的符号，从而求解.

2. 一元二次不等式的解法

形如 $ax^2+bx+c>0$，或 $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq 0)$ 的不等式，叫做关于 x 的一元二次不等式.

(1) 一元二次不等式的解集、一元二次方程的根，二次函数图象三者之间的关系如下表.

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	两相异实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$,或 $x>x_2\}$	$\left\{x\middle\|x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geqslant0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x\leqslant x_1$,或 $x\geqslant x_2\}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c\leqslant0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$	$\left\{x\middle\|x=-\frac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

注意 ①若一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 与 $mx^2+nx+s>0$ 同解,则 $a=mk,b=nk,c=sk\ (k\neq0)$;②一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的"解在两边"可判断出 $a<0$,不等式 $cx^2+bx+a>0$ 与变号后的不等式 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$ 同解,但应注意选择"在两边"还是"在中间",应以后者"小于"为准.解得的根含参数时应注意讨论两个根的大小.

(2)注意体会"数形结合"、"等价转换"及"化归"等数学思想方法的综合灵活运用.

(3)对于含有参数不等式求解时,一方面要注意分类讨论,另一方面要选准分类标准,做到不重不漏.

3.简单分式不等式和高次不等式的解法

(1)形如$\frac{f(x)}{g(x)}>0$型.

$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)<0.\end{cases}$

(2)形如$\frac{f(x)}{g(x)}<0$型.

$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)<0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)>0.\end{cases}$

题型分类

1.考查绝对值不等式的解法

例 1 解下列不等式:

(1)$|2x-3|>5$;

(2)$|x^2-2x+3|<|3x-1|$.

开窍 对于(1)应用$|x|>a\ (a>0)\Leftrightarrow x<-a$,或 $x>a$ 求解,或利用绝对值的定义分类求解;对于(2)采用平方法脱去绝对值符号.

讲解 (1)解法1 由绝对值定义,原不等式可化为:

$\begin{cases}2x-3\geqslant0,\\2x-3>5.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-3<0,\\-(2x-3)>5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2},\\x>4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<\frac{3}{2},\\x<-1.\end{cases}$

故原不等式的解集为$\{x|x>4$，或$x<-1\}$.

解法2　原不等式可化为：

$2x-3>5$，或$2x-3<-5$，解得$x>4$，或$x<-1$.

故原不等式解集为$\{x|x>4$，或$x<-1\}$.

(2)原不等式等价于：

$(x^2-2x+3)^2<(3x-1)^2$，即$[(x^2-2x+3)+(3x-1)][(x^2-2x+3)-(3x-1)]<0$，整理，得$(x^2+x+2)(x^2-5x+4)<0$.

$\because x^2+x+2>0$，$x^2-5x+4<0$，

$\therefore$原不等式的解集为$\{x|1<x<4\}$.

辨误　在通过平方脱去绝对值符号后，若次数较高，对于$f^2(x)>g^2(x)$可作如下变形：$[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]>0$，然后分类讨论. 本题中由于注意到$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$显然大于零，从而$x^2-5x+4<0$必成立，从而避免了不必要的分类讨论.

例2　解下列不等式：

(1)$|3x+1|>3x+1$；　(2)$1<|2x+1|\leqslant3$.

开窍　对于(1)，要使$|a|>a$，只需$a<0$即可. 对于(2)，可由$|x-a|$的几何意义求解.

讲解　(1)原不等式即$3x+1<0$，解得$x<-\frac{1}{3}$. 故解集为$\left\{x\middle|x<-\frac{1}{3}\right\}$.

(2)不等式$1<|2x+1|\leqslant3\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\left|x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{3}{2}$，

则在数轴上，数x与$-\frac{1}{2}$的点的距离介于$\frac{1}{2}$和$\frac{3}{2}$之间$\left(包括\frac{3}{2}\right)$，如图1-1-5所示.

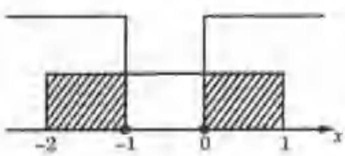


图1-1-5

满足$\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>0$，或$x<-1$.

满足$\left|x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow-2\leqslant x\leqslant1$.

所以原不等式的解集为$\{x|0<x\leqslant1$，或$-2\leqslant x<-1\}$.

辨误　特别注意$|f(x)|>a\Leftrightarrow f(x)>a$，或$f(x)<-a$的前提条件是$a>0$. 该题(1)中，$3x+1$的正、负不确定，所以应由$|a|>a\Leftrightarrow a<0$解之，不可盲目套用$|f(x)|>a$的求解法则.

反思　含绝对值符号的不等式用几何意义求解简捷明快. 不等式(2)也可转化为不等式组求解.

例3　解不等式$|1-x|+|x-2|>x+3$.

开窍　此不等式左边含有两个绝对值符号，如何脱去绝对值符号呢？这里我们可考虑采用"零点分段"法.

图1-1-6

讲解　易知数字1，2将数轴分成$(-\infty,1]\cup(1,2]\cup(2,+\infty)$三部分，如图1-1-6所示.

(1)当$x\leqslant1$时，原不等式等价于：

$1-x-(x-2)>x+3\Rightarrow\begin{cases}x<0,\\x\leqslant1,\end{cases}$得$x<0$；

(2)当$1<x\leqslant2$时，原不等式可化为：

$-(1-x)-(x-2)>x+3\Rightarrow\begin{cases}x<-2,\\1<x\leqslant2,\end{cases}$得不等式的解集为$\varnothing$；

(3)当$x>2$时，原不等式可化为：

$-(1-x)+(x-2)>x+3\Rightarrow\begin{cases}x>6,\\x>2,\end{cases}$得$x>6$.

综合上述(1)、(2)、(3)，得原不等式的解集为$\{x|x<0$，或$x>6\}$.

辨误　"零点分段"法解含有多个绝对值符号的不等式，关键是要找准零点，然后逐段脱去绝对值符号. 注意别写错或漏掉符号，特别是"－"号.

反思　"零点分段"法主要体现了化归、分类讨