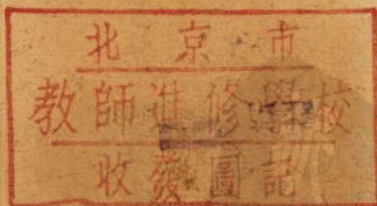


中華文庫

初中第一集

平面三角問題解法研究

徐天游編



中華書局印行



民國三十七年二月發行  
民國三十八年四月再版

中華文庫  
初中第一集  
平面三角問題解法研究(全一冊)

◎ 定價

(郵運匯費另加)

編者 徐天游

發行人 李虞杰  
中華書局股份有限公司代表

印刷者 中華書局永寧印刷廠  
上海澳門路八九號

發行處 各埠中華書局

(13700)

# 平面三角問題解法研究

## 目次

<b>第一章 三角法的準備研究</b> .....	1
一、 比和比例.....	1
二、 直角三角形.....	4
<b>第二章 三角函數的基本研究</b> .....	8
一、 正弦和餘弦.....	8
二、 正切和餘切.....	10
三、 正割和餘割.....	12
四、 兩角互為餘角的函數.....	14
<b>第三章 特別角的三角函數</b> .....	17
一、 $45^\circ$ 角的三角函數.....	17
二、 $30^\circ$ 角的三角函數.....	18
三、 $60^\circ$ 角的三角函數.....	20
四、 $0^\circ$ 角和 $90^\circ$ 角的三角函數.....	22
五、 角度和函數值的相關變化.....	24

<b>第四章 一般銳角的三角函數</b> .....	26
一. 由角求函數(1)——檢表法一.....	26
二. 由角求函數(2)——檢表法二.....	28
三. 由函數求角——檢表法三.....	30
<b>第五章 直角三角形的解法</b> .....	33
一. 已知兩腰, 求斜邊和兩銳角.....	33
二. 已知斜邊和一銳角, 求兩腰和他一銳角.....	34
三. 已知一腰和一銳角, 求他兩邊和他一銳角.....	35
(甲) 已知腰為已知銳角的鄰邊.....	35
(乙) 已知腰為已知銳角的對邊.....	36
四. 已知斜邊和一腰, 求他一腰和兩銳角.....	37
<b>第六章 直角三角形解法的應用</b> .....	39
<b>第七章 斜角三角形的解法和應用</b> .....	49
一. 已知三邊, 求三角.....	49
二. 已知一邊和兩角, 求他一角和他兩邊.....	50
(甲) 已知邊為兩已知角的夾邊.....	50
(乙) 已知邊為兩已知角中一角的對邊.....	52
三. 已知兩邊和一角, 求他一邊和他兩角.....	52

---

(甲) 已知角爲兩已知邊的夾角	52
(乙) 已知角爲兩已知邊中一邊的對角	54
<b>第八章 同銳角諸三角函數的相互關係</b>	<b>58</b>
一. 逆數關係(二重關係)	58
二. 乘除關係(三重關係)	60
三. 平方關係	62
四. 同銳角三角函數的互化	65
(甲) 已知一銳角的某函數值, 求其他諸函數值	65
(乙) 以一銳角的某函數表其他諸函數	66
五. 三角函數式的化簡	67
(甲) 先化爲正弦和餘弦的函數式	67
(乙) 先用直角三角形的邊表函數	68
<b>第九章 簡易三角恆等式</b>	<b>70</b>
一. 自一邊化到另一邊	70
二. 化兩邊爲同一結果	74
三. 化兩邊爲已知等式	75
四. 以直角三角形的三邊代換三角函數	75
<b>第十章 簡易三角方程式</b>	<b>79</b>
【附】 三角函數表	89

# 平面三角問題解法研究

## 第一章 三角法的準備研究

### 一. 比和比例

**提要一** 二量相比,如果前項爲  $a$ ,後項爲  $b$ ,比值爲  $m$ ,那麼他們的關係如下:

$$a : b = m,$$

即

$$\frac{a}{b} = m,$$

因得

$$a = bm,$$

$$b = \frac{a}{m}.$$

**例題 1** 已知一比的前項是32,後項是4,問比值是多少?

解 因

$$a=32, \quad b=4,$$

故

$$m = \frac{a}{b} = \frac{32}{4} = 8.$$

**例題 2** 已知一比的前項是6,比值是 $\frac{2}{3}$ ,問後項是多少?

解 因

$$a=6, \quad m=\frac{2}{3},$$

故

$$b = \frac{a}{m} = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 6 \times \frac{3}{2} = 9.$$

**例題 3** 已知一比的後項是5,比值是 $\frac{7}{15}$ ,問前項是多少?

解 因

$$b=5, \quad m=\frac{7}{15},$$

故  $a=bm=5 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ .

提要二 四量  $a, b, c, d$  成比例, 那麼他們的關係如下:

$$a : b = c : d,$$

即  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

因得  $ad = bc.$

故  $a = \frac{bc}{d},$

$$d = \frac{bc}{a},$$

$$b = \frac{ad}{c},$$

$$c = \frac{ad}{b}.$$

例題 1 試解比例式  $32 : 6 = 48 : x.$

解 因  $a=32, b=6, c=48, d=x.$

故  $x=d = \frac{bc}{a} = \frac{6 \times 48}{32} = 9.$

例題 2 試解比例式  $28 : x = 42 : 36.$

解 因  $a=28, c=42, d=36, b=x.$

故  $x=b = \frac{ad}{c} = \frac{28 \times 36}{42} = 24.$

例題 3 試解比例式  $2\frac{5}{8} : 1\frac{1}{6} = x : 1\frac{1}{2}.$

解  $x = \frac{2\frac{5}{8} \times 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{6}} = \frac{\frac{21}{8} \times \frac{3}{2}}{\frac{7}{6}} = \frac{21 \times 3 \times 6}{8 \times 2 \times 7} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}.$

例題 4 試解比例式  $x : 5\frac{2}{3} = \frac{3}{4} : 7$ .

$$\text{解 } x = \frac{5\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}}{7} = \frac{\frac{17}{3} \times \frac{3}{4}}{7} = \frac{17 \times 3}{3 \times 4 \times 7} = \frac{17}{28}.$$

### 習 題 一

1. 求下列各式內的比值：

(a)  $16 : 4$ .

(b)  $42 : 28$ .

(c)  $6 : 4\frac{2}{3}$ .

(d)  $7\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ .

(e)  $2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{3}$ .

(f)  $2.5 : 3.5$ .

(g)  $4 : 3.6$ .

(h)  $1\frac{1}{2} : 7.5$ .

2. 求下列各式內的缺項：

(a)  $6 : ( ) = 2$ .

(b)  $9 : ( ) = 15$ .

(c)  $\frac{2}{3} : ( ) = \frac{8}{9}$ .

(d)  $( ) : 5 = 15$ .

(e)  $( ) : 3\frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ .

(f)  $( ) : 0.5 = 7$ .

3. 試解下列各比例式：

(a)  $6 : 8 = 14 : x$ .

(b)  $15 : 2 = 36 : x$ .

(c)  $5.4 : 18 = x : 12$ .

(d)  $1\frac{1}{2} : 6 = x : 4$ .

(e)  $30 : x = 4 : 6$ .

(f)  $14 : x = 24 : 16$ .

(g)  $x : \frac{5}{6} = 3 : 8$ .

(h)  $x : 2\frac{3}{8} = 1\frac{3}{5} : 2\frac{1}{9}$ .

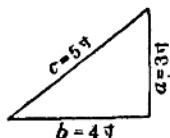
4. 有一直角三角形，他的斜邊  $c$  長 5 寸，夾直角的兩邊  $a$  長 3 寸， $b$  長 4 寸。試求每二邊的比值。



$$a : c = ? \quad b : c = ?$$

$$a : b = ? \quad b : a = ?$$

$$c : b = ? \quad c : a = ?$$



5. 兩個直角三角形如果相似，那麼，他們對應角的關係怎樣？又對應邊的關係怎樣？

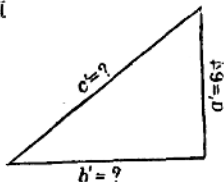
6. 有一直角三角形，和第4題的直角三角形相似，祇知和  $a$  邊相當的  $a'$  邊長6寸，問其他兩個對應邊  $b'$  和  $c'$  各長多少？

7. 上題的直角三角形，每二邊的比值怎樣？

$$a' : c' = ? \quad b' : c' = ?$$

$$a' : b' = ? \quad b' : a' = ?$$

$$c' : b' = ? \quad c' : a' = ?$$



8. 研究第4題和第7題中的各比，有甚麼發見？

## 二. 直角三角形

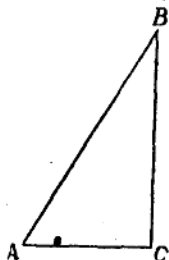
**提要一** 直角三角形的兩個銳角為  $A, B$ ，直角為  $C$ ，那麼他們的關係如次：

因  $A + B + C = 180^\circ$ ,

而  $A + B = 90^\circ$ ,

故  $B = 90^\circ - A$ ,

$$A = 90^\circ - B.$$



**例題 1** 直角三角形的一個銳角如為  $30^\circ$ ，那麼另一個銳角有多少度？

解 另一銳角 $=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ .

**例題 2** 等腰直角三角形的兩個銳角各有多少度？

解 等腰直角三角形的兩個銳角相等，

而兩銳角的和為 $90^\circ$ ，

故每一銳角為  $90^\circ \div 2 = 45^\circ$ .

**例題 3** 有一直角三角形，他的一銳角  $A = 36^\circ 45'$ ，那麼還有一銳角  $B$  的大小怎樣？

解  $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 36^\circ 45' = 53^\circ 15'$ .

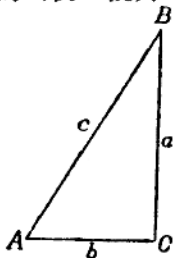
**提要二** 直角三角形一銳角  $A$  的對邊為  $a$ ，另一銳角  $B$  的對邊為  $b$ ，斜邊為  $c$ ，那麼他們的關係如次：

因  $a^2 + b^2 = c^2$ ，

故  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ，

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ .



注意 一般直角三角形邊角的記法，都如上圖。

**例題 1** 一個直角三角形的  $a = 9$ ， $b = 12$ ，那麼  $c = ?$

解  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144}$   
 $= \sqrt{225} = 15$

**例題 2** 一個直角三角形的  $a = 21$ ， $c = 35$ ，那麼  $b = ?$

解  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{35^2 - 21^2} = \sqrt{(35+21) \times (35-21)}$   
 $= \sqrt{56 \times 14} = \sqrt{2^2 \times 14^2} = 28$ .

**例題 3** 一個直角三角形的  $c = 8$  公分， $b = 3.2$  公分 那麼

$a$  有多少公分?

$$\begin{aligned} \text{解 } a &= \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{8^2 - 3.2^2} = \sqrt{(8+3.2) \times (8-3.2)} \\ &= \sqrt{11.2 \times 4.8} = \sqrt{53.76} = 7.332 \text{ 強.} \end{aligned}$$

## 習 題 二

1. 三角形的六要素是甚麼?  
2. 已知直角三角形一銳角的大小如下, 試求他一銳角的大小.

$$15^\circ; \quad 28^\circ; \quad 68^\circ; \quad 72^\circ; \quad 89^\circ;$$

$$2^\circ 7'; \quad 36^\circ 54'; \quad 45^\circ 6'; \quad 81^\circ 18'; \quad 89^\circ 50'.$$

3. 已知直角三角形兩邊的大小如下; 試求另一邊. 題中  $a, b$  表直角邊,  $c$  表斜邊. 小數求至二位.

$$(a) \quad a=12, \quad b=16, \quad c=?$$

$$(b) \quad a=5, \quad b=4.2, \quad c=?$$

$$(c) \quad a=3.3, \quad b=4.8, \quad c=?$$

$$(d) \quad a=15, \quad c=25, \quad b=?$$

$$(e) \quad a=7, \quad c=12, \quad b=?$$

$$(f) \quad a=1.8, \quad c=2.2, \quad b=?$$

$$(g) \quad b=\frac{1}{2}, \quad c=\frac{3}{4}, \quad a=?$$

$$(h) \quad b=1.2, \quad c=2\frac{1}{3}, \quad a=?$$

$$(i) \quad b=1\frac{3}{4}, \quad c=2\frac{1}{2}, \quad a=?$$

$$(j) \quad a=3l, \quad b=4l, \quad c=?$$

$$(k) \quad a=l-m, \quad c=l+m, \quad b=?$$

$$(l) \quad b=8lm, \quad c=10lm, \quad a=?$$

4. 直角三角形的斜邊  $c$  為 2.5 寸，一直角邊  $a$  為 1.5 寸，試求另一直角邊  $b$  的長，並求他每兩邊的六個比值：

$$b = ?$$

$$a : c = ?$$

$$b : c = ?$$

$$a : b = ?$$

$$b : a = ?$$

$$c : b = ?$$

$$c : a = ?$$

5. 試畫一等腰直角三角形，並量出各邊的長，求他每兩邊的六個比值。

6. 試畫一直角三角形，他的一銳角為  $60^\circ$ ，量出各邊的長，求他每兩邊的六個比值。

## 第二章 三角函數的基本研究

### 一. 正弦和餘弦

**提要** 設直角三角形  $ABC$ ,  $C$  為直角, 一銳角  $A$  的對邊為  $a$ , 另一銳角的對邊為  $b$ , 斜邊為  $c$ , 那麼

$$A \text{ 角的正弦: } \sin A = \frac{a}{c},$$

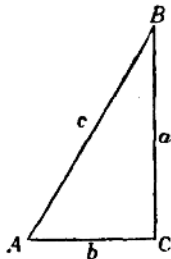
$$\therefore a = c \sin A,$$

$$c = \frac{a}{\sin A}.$$

$$A \text{ 角的餘弦: } \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\therefore b = c \cos A,$$

$$c = \frac{b}{\cos A}.$$



**注意** 本章目的, 在使學生熟習關於三角函數的最基本的計算法. 至於實際應用, 有些不必這樣. 到以後自能明瞭.

**例題 1** 有直角三角形如上圖. 若  $a=4$ ,  $b=3$ ,  $c=5$ , 那麼  $A$  角的正弦和餘弦各是多少?

$$\text{解} \quad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{5} = 0.8,$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

**例題 2** 承上題. 若  $a=2$ ,  $b=3$ ; 試求  $\sin A$  和  $\cos A$  的值.

$$\text{解} \quad \text{先求 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

$$\text{故 } \sin A = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{2 \times 3.606}{13} = 0.5546.$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{3 \times 3.606}{13} = 0.8319.$$

**例題 3** 在直角三角形  $ABC$  內, 已知  $\sin A = 0.5878$ ,  $a = 17.634$  求  $c$  的值.

解 
$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{17.634}{0.5878} = 30.$$

**例題 4** 承上題, 已知  $c = 30$  公分,  $\cos A = 0.809$ , 求  $b$  的值.

解 
$$b = c \cos A = 30 \times 0.809 = 24.27(\text{公分}).$$

### 習 題 三

1. 如前圖, 若  $a=8$ ,  $b=6$ , 那麼  $A$  角的正弦是多少?  $A$  角的餘弦是多少?
2. 若  $a=5$ ,  $b=8$ , 那麼  $\sin A=?$   $\cos A=?$
3. 若  $a=4$ ,  $c=10$ , 那麼  $\sin A=?$   $\cos A=?$
4. 若  $b=5$ ,  $c=9$ , 那麼  $\sin A=?$   $\cos A=?$
5. 若  $c=12$ ,  $\sin A=0.309$ , 試求  $a$  的值.
6. 若  $a=9$ ,  $\sin A=0.225$ , 試求  $c$  的值.
7. 若  $c=5$ ,  $\cos A=0.788$ , 試求  $b$  的值.
8. 若  $b=4.33$ ,  $\cos A=0.866$ , 試求  $c$  的值.
9. 試畫一直角三角形, 量出三邊的長, 並計算  $\sin A$ 、 $\cos A$  的值.
10. 試畫一直角三角形, 和上題的直角形相似, 量出三邊的長, 計算  $\sin A$  和  $\cos A$  的值, 並和上題的結果比較.

## 二. 正切和餘切

**提要** 在直角三角形  $ABC$  內;  $C$  爲直角, 一銳角  $A$  的對邊爲  $a$ , 另一銳角的對邊爲  $b$ , 斜邊爲  $c$ , 那麼

$$A \text{ 角的正切: } \tan A = \frac{a}{b},$$

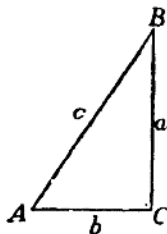
$$\therefore a = b \tan A,$$

$$b = \frac{a}{\tan A}.$$

$$A \text{ 角的餘切: } \cot A = \frac{b}{a},$$

$$\therefore b = a \cot A,$$

$$a = \frac{b}{\cot A}.$$



**例題 1** 有直角三角形如上圖. 若  $a=8$ ,  $b=5$ , 那麼  $A$  角的正切和餘切各是多少?

解  $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{8}{5} = 1.6.$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

**例題 2** 若  $a=4$ ,  $c=8$ , 那麼  $\tan A = ?$   $\cot A = ?$

解 先求  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$

故  $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0.577.$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} = 1.732.$$

**例題 3** 已知  $\tan A = 2$ ,  $b = 8$ , 那麼  $a = ?$   $c = ?$  又  $\sin A = ?$

$$\text{解 } a = b \tan A = 8 \times 2 = 16.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5} = 8 \times 2.236 \\ = 17.888.$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2 \times 2.236}{5} = \frac{4.472}{5} \\ = 0.894.$$

**例題 4** 已知  $b=5$ ,  $\cot A=1.25$ , 那麼  $a=?$   $c=?$

又  $\cos A=?$

$$\text{解 } a = \frac{b}{\cot A} = \frac{5}{1.25} = 4.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6.408.$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41} = \frac{5 \times 6.408}{41} = 0.7805.$$

## 習 題 四

1. 有直角三角形如上圖. 若  $a=14$ ,  $b=4$ , 那麼  $A$  角的正切是多少?  $A$  角的餘切是多少?
2. 若  $a=2.65$ ,  $b=1.5$ , 那麼  $\tan A=?$   $\cot A=?$
3. 若  $a=5$ ,  $c=8$ , 那麼  $\tan A=?$   $\cot A=?$
4. 若  $b=7$ ,  $c=9$ , 那麼  $\tan A=?$   $\cot A=?$
5. 若  $b=3.2$ ,  $\tan A=2.5$ , 試求  $a$  的值.
6. 若  $a=5.25$ ,  $\tan A=0.21$ , 試求  $b$  的值.
7. 若  $a=2.85$ ,  $\cot A=2.4$ , 試求  $b$  的值.
8. 若  $b=4.28$ ,  $\cot A=1.07$ , 試求  $a$  的值.
9. 由上題, 試求  $\sin A$  和  $\cos A$  的值.



10. 作兩個相似直角三角形，分別量出夾直角兩邊的長，再各各計算一雙對應銳角的正切和餘切，並比較算出的結果。

### 三. 正割和餘割

**提要** 在直角三角形  $ABC$  內， $C$  為直角，一銳角  $A$  的對邊為  $a$ ，另一銳角的對邊為  $b$ ，斜邊為  $c$ ，那麼

$$A \text{ 角的正割: } \sec A = \frac{c}{b}.$$

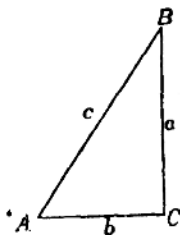
$$\therefore c = b \sec A,$$

$$b = \frac{c}{\sec A}.$$

$$A \text{ 角的餘割: } \csc A = \frac{c}{a}.$$

$$\therefore c = a \csc A,$$

$$a = \frac{c}{\csc A}.$$



**例題 1** 有直角三角形如上圖。若  $a=5$ ,  $c=8$ , 那麼  $\sec A = ?$   
 $\csc A = ?$

解 先求  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} = 6.245.$

$$\therefore \sec A = \frac{c}{b} = \frac{8}{\sqrt{39}} = \frac{8\sqrt{39}}{39} = \frac{8 \times 6.245}{39} = 1.280.$$

$$\text{又 } \csc A = \frac{c}{a} = \frac{8}{5} = 1.6.$$

**例題 2** 若  $a=6$ ,  $b=4$ , 那麼  $\sec A = ?$   $\csc A = ?$

解 先求  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7.211.$

$$\therefore \sec A = \frac{c}{b} = \frac{7.211}{4} = 1.803.$$