理科要覽

平面三角法

駱師曾　匡文濤編
顧正容修訂

商務印書館

理 科 要 覽

平 面 三 角 法

駱師曾 匡文濤編
顧 正 容 修 訂

（修 訂 本）

商 務 印 書 館

理科要覽

平面三角法

駱師曾 匡文濤編
駱正容修訂

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）
新華書店總經售
商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號
(51118)

1937年6月初版　1953年11月13版(修訂本)
1955年1月17版　印數60,501—90,500
定價￥6,900

目　　次

角的量法	角的單位	兩種單位間的關係	習題
1. 度量法或稱爲六十分法。	一個圓心角所對的弧，如爲圓周的 $\frac{1}{360}$，就稱爲一度。這是最常用的角度單位。1 度等於 60 分，1 分等於 60 秒。計算時寫成：$1^\circ=60'$，$1'=60''$。例如：3 度 48 分 52 秒，則寫成：$3^\circ\ 48'\ 52''$。	1. 因爲 360° 相當於 2π 弳，所以 1 弳 $=\frac{360^\circ}{2\pi}=57^\circ\ 17'\ 44.8''$；而 1 度則等於 $\frac{2\pi}{360}$ 弳，就是：$1^\circ=0.01745$ 弳。 2. 某角用弧量法，所得的結果爲 θ；用六十分法去量，所得的結果爲 D；則 θ 和 D 的關係是：$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}$， 也就是， $\theta=\frac{D}{180^\circ}\pi$ 或 $D=\frac{\theta}{\pi}\times180^\circ$。	(1) 直角的 $\frac{65}{100}$ 是幾度？ (2) $97^\circ\ 5'\ 15''$ 有幾直角？ (3) 正三邊形，正五邊形，正六邊形的一內角各有幾度？ (4) 令 π 爲 $\frac{22}{7}$，則某角所含弳數的二倍和它所含的度數相加爲 $23\frac{2}{7}$，求這角的度數。 (5) 各內角成等差級數，最小的是 120°，公差爲 5°，這是幾邊形？
2. 弧量法或稱爲本位弧法。	不論圓的大小，凡和半徑等長的弧所對的圓心角，就稱爲一弳，或一弧度。這是較高級的數學和物理學最通用的一種角度單位。設圓的半徑爲 R，則圓周爲 $2\pi R$，所以整個圓心角含有 $\frac{2\pi R}{R}$ 弳，也就是 2π 弳或弧度。		

(1) $90°\times 0.65=58.5°$,

$60'\times 0.5 =30'$。

答 $58°\ 30'$。

(2) $97°\ 5'\ 15''\div 90°$

$=349515''\div 324000''$

$=1.07875$。

答 1.07875 直角。

(3) $180°\div 3=60°$,這是正三角形的一角。

而正五角形的一角爲

$180°-360°\div 5=108°$。

正六角形的一角爲

$180°-360°\div 6=120°$。

(4) 令所求的度數爲 x 度。

用弳來表示,則爲 $\frac{x}{360}2\pi=\frac{x\pi}{180}$ 弳。由題意,得

$$x+\frac{2x\pi}{180}=23\frac{2}{7}。$$

令 $\pi=\frac{22}{7}$。

則 $x\left(1+\frac{1}{90}\times\frac{22}{7}\right)=23\frac{2}{7}$。

$\therefore\ x=22\frac{1°}{2}$。

答 $22°\ 30'$。

(5) 設所求的邊數爲 n,則因外角的總和爲 $360°$,而最大的外角必定是和最小的內角相鄰,所以是 $180°-120°=60°$。

由等差級數求和的公式,得

$$\frac{n}{2}\left\{60+[60-(n-1)5]\right\}=360°$$

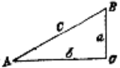
$\therefore\ \frac{n}{2}\left\{120-(n-1)5\right\}=360°$, 而 $n=16$ 或 9。

令 $n=16$,則最小外角爲 $60°-(16-1)5°=-15°$;這結果不合理,所以 16 不適用。 $\therefore\ n=9$。

答 所求的爲九邊形。

定義

下列六種比值,稱爲三角函數。



設 $C=90^\circ$, 則

$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$, 稱爲"$A$ 的正弦"

$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$, 稱爲"$A$ 的餘弦"

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$, 稱爲"$A$ 的正切"

$\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$, 稱爲"$A$ 的餘切"

$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$, 稱爲"$A$ 的正割"

$\csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$, 稱爲"$A$ 的餘割"

基本關係

倒數關係
$$\begin{cases}\sin A\csc A=1 & \cdots\cdots(1)\\ \cos A\sec A=1 & \cdots\cdots(2)\\ \tan A\cot A=1 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

相除關係
$$\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A} & \cdots\cdots(4)\\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A} & \cdots\cdots(5)\end{cases}$$

平方關係
$$\begin{cases}\sin^2 A+\cos^2 A=1 & \cdots\cdots(6)\\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A & \cdots(7)\\ 1+\cot^2 A=\csc^2 A & \cdots(8)\end{cases}$$

(注意) 1. 上列八式,將函數的名稱換爲邊和邊相除,例如,將 $\sin A$ 換爲 $\frac{a}{c}$, 便立刻可以證明; 2. 只要 A 的大小一定, C 是直角, A 的函數與三角形的大小無關; 3. 六種三角函數,只要知道一種,就能推出其餘的五種。

習題

(1) 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 爲直角, BC, AC 各爲 3, 4, 求 A 的三角函數。

*(2) 已知 $\sin A=\frac{15}{17}$, 求 A 角的其餘各函數。

*(3) 用 $\tan A$ 表出其餘的諸函數。

(4) 設 $\cos A=\frac{12}{13}$, 試求 A 的其他三角函數。

(5) 設 $\tan A=2+\sqrt{3}$, 試推算 A 的其他三角函數。

(1) $BC=3,\ AC=4,\ AB=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=5$。

$$\therefore\quad \sin A=\frac{3}{5},\qquad \cos A=\frac{4}{5},$$
$$\tan A=\frac{3}{4},\qquad \cot A=\frac{4}{3},$$
$$\sec A=\frac{5}{4},\qquad \operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}。$$

*(2) $\sin A=\frac{15}{17}$. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$。

$$\therefore\quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}。$$
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{15}{17}\times\frac{17}{8}=\frac{15}{8}。$$
$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{8}{15}。$$
$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{17}{8}。$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{17}{15}。$$

*(3) $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$。

$$\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}。$$
$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}。$$
$$\sin A=\tan A\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}。$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}。$$

(4) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$。

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}。$$
$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{12}{5}。$$
$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{13}{12}。$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{13}{5}。$$

(5) 和 (3) 同樣,得

$$\cot A=2-\sqrt{3},\qquad \sec A=\sqrt{6}+\sqrt{2},$$
$$\cos A=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\qquad \sin A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\operatorname{cosec} A=\sqrt{6}-\sqrt{2}。$$

證法	習題

(1) 先變化複雜的一邊,使它和另一邊相等。

例 試證明下式。

$\tan^2A+\cot^2A-(\sin^2A\tan^2A+\cos^2A\cot^2A)=1$。

(證) 左邊$=\tan^2A-\sin^2A\tan^2A+\cot^2A-\cos^2A\cot^2A$

$$=\tan^2A(1-\sin^2A)+\cot^2A(1-\cos^2A)$$

$$=\tan^2A\cos^2A+\cot^2A\sin^2A$$

$$=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\cos^2A+\frac{\cos^2A}{\sin^2A}\sin^2A$$

$$=\sin^2A+\cos^2A$$

$$=1$$。

試證明下列各恒等式:

(1) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$。

*(2) $\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\sec x}{1+\operatorname{cosec} x}\right)=\tan x$。

*(3) $\cot^2A-\cos^2A=\cos^2A\cot^2A$。

(4) $(p\cos A+q\sin A)^2+(q\cos A-p\sin A)^2=p^2+q^2$。

(5) $2(\sin^6A+\cos^6A)-3(\sin^4A+\cos^4A)+1=0$。

(6) $\operatorname{cosec}\alpha\sec^2\alpha+\sin\alpha\tan^2\alpha-2\tan\alpha\sec\alpha=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha$。

(1) 左邊$=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$。

*(2) 左邊$=\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos x}}{1+\dfrac{1}{\sin x}}\right)$

$=\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}\right)\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\tan x$。

*(3) 左邊$=\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\cos^2 A=\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{\cos^2 A(1-\sin^2 A)}{\sin^2 A}=\dfrac{\cos^2 A\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\cos^2 A\cot^2 A$。

(4) 左邊$=p^2\cos^2 A+q^2\sin^2 A+q^2\cos^2 A+p^2\sin^2 A$

$=p^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+q^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=p^2+q^2$。

(5) 左邊$=2(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^4 A-\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1$

$=2\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A\}-3\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A\}+1$

$=2(1-3\sin^2 A\cos^2 A)-3(1-2\sin^2 A\cos^2 A)+1$

$=2-6\sin^2 A\cos^2 A-3+6\sin^2 A\cos^2 A+1$

$=3-3=0$。

(6) 左邊$=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha$。

證法	習題

(2) 分別變化兩邊的形式而比較它們的結果。

例 $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$,

（證）$\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+(\cos^2 A)^2$

$$=\sin^4 A+(1-\sin^2 A)^2$$

$$=\sin^4 A+1-2\sin^2 A+\sin^4 A$$

$$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A。$$

$$1-2\sin^2 A\cos^2 A=1-2\sin^2 A(1-\sin^2 A)$$

$$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A。$$

即原式的兩邊相等。

試證明下列各恆等式：

*(1) $\sec A-\cos A=\sin A\tan A$。

(2) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$$=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)。$$

(3) $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)$

$$=\sec A+\operatorname{cosec} A。$$

(4) $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$。

(5) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$$=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)。$$

*(1) 左邊 $= \dfrac{1}{\cos A} - \cos A = \dfrac{1-\cos^2 A}{\cos A}$

$= \dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$。

右邊 $= \sin A\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}\right) = \dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$。

所以原式的兩邊相等。

(2) 左邊 $= (2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$= (2-\cos^2 A)\left(1+\dfrac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$

$= (1+\sin^2 A)\dfrac{\sin^2 A+2\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \dfrac{(1+\sin^2 A)(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A}$。

右邊 $= \left(2+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)(1+\cos^2 A)$

$= \dfrac{2\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A}(1+\cos^2 A)$

$= \dfrac{(1+\sin^2 A)(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A}$。

所以原式的左右相等。

(3) 左邊 $= (\sin A+\cos A)\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$

$= (\sin A+\cos A)\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A} = \dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$

右邊 $= \dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$。

∴ 左邊 = 右邊。

(4) 左邊 $= 1+\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$= 1+1+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$= 2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$。

右邊 $= 2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$。

∴ 左邊 = 右邊。

(5) 左邊 $= (2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$= (1+\sin^2 A)(2\operatorname{cosec}^2 A-1) = (1+\sin^2 A)\left(\dfrac{2}{\sin^2 A}-1\right)$

$= \dfrac{2}{\sin^2 A}+2-1-\sin^2 A = \dfrac{2}{\sin^2 A}+\cos^2 A$。

右邊 $= (2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A) = (1+\operatorname{cosec}^2 A)(1+\cos^2 A)$

$= 1+\dfrac{1}{\sin^2 A}+\cos^2 A+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \dfrac{2}{\sin^2 A}+\cos^2 A$。

∴ 左邊 = 右邊。

證法	習題

(3) 把公式變化成爲另一形式，再把這形式變成和已知的恆等式一樣，這是一種試探的方法。

例 1. 試證明：$1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$,

(證) 公式 $1+\tan^2 A=\sec^2 A$。

$\therefore\ 1-\sec^2 A=-\tan^2 A$。

$\therefore\ 1-2\sec^2 A+\sec^4 A=\tan^4 A$。

$\therefore\ 1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$。

例 2. 試證明：$\operatorname{cosec} A-\cot A=\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$。

(證) 要證明這恆等式，可先證明：

$(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\operatorname{cosec} A+\cot A)=1$。

$\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1$。

$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$。

上列結果爲一公式，所以原式的兩邊恆等。

習題

試證明下列恆等式：

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A$
$=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$。

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$。

(3) $\dfrac{\tan^2 A-\cot^2 A}{\sec A+\operatorname{cosec} A}=\sec A-\operatorname{cosec} A$。

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$。

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$。

可將上式移項改爲下式，再加以證明。

$\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A=1$。

$$(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)^2=1。$$

$$(1+\cot^2 A-\cot^2 A)^2=1。$$

$$1=1。$$

這就可以斷定原式的左右相等。

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$。

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x。$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}。$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}。$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}。$$

∴ 原式爲恆等式。

(3) 將原式變形爲

$\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$。

$(1+\tan^2 A)-(1+\cot^2 A)=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$。

$\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$。

此是證明原式之左右相等。

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$。

變其形爲

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=(\tan\theta+\sec\theta)^2。$$

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2。$$

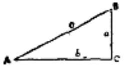
$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2。$$

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2。$$

$$(\sec\theta+\tan\theta)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2。$$

∴ 原式爲恆等式。

餘角的公式



令 $C=90°$, 則
$B=90°-A$,
$\sin B=\frac{b}{c}$。

$\therefore\ \sin(90°-A)=\frac{b}{c}$。

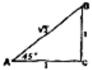
但 $\cos A=\frac{b}{c}$。

$\therefore\ \sin(90°-A)=\cos A$。

同理:

$\cos(90°-A)=\sin A$。
$\tan(90°-A)=\cot A$。
$\cot(90°-A)=\tan A$。
$\sec(90°-A)=\operatorname{cosec} A$。
$\operatorname{cosec}(90°-A)=\sec A$。

45°的三角函數



因爲: $\left.\begin{array}{l}C=90°\\ A=45°\end{array}\right\}$

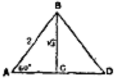
設 $AC=BC=1$, 則
$AB=\sqrt{2}$

$\therefore\ \sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\tan 45°=1$。
$\cot 45°=1$。
$\sec 45°=\sqrt{2}$。
$\operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}$。

60°、30°的三角函數



$\triangle ABD$ 爲正三角形,
令 $AC=CD=1$, 則
$AB=2$, $BC=\sqrt{3}$。
$\angle BAC=60°$, $\angle ABC=30°$。

$\therefore\ \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$。

$\cos 60°=\frac{1}{2}=\sin 30°$。
$\tan 60°=\sqrt{3}=\cot 30°$。

$\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°$。

$\sec 60°=2=\operatorname{cosec} 30°$。

$\operatorname{cosec} 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30°$。

(注意) 30°, 45°, 60° 各角的正弦是 $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 這很便於記憶, 而且必須記熟。

習題

(1) 試求下式的數值:
$(\sin 30°+\sin 45°)\times(\tan 60°+\cot 30°)-4\sec 45°(\operatorname{cosec} 60°-\sec 30°)$。

(2) 試求下式的數值:
$\sin^2(A+45°)\sin^2(45°-A)$。

(3) 試證明下式:
$\cot 60°(1+\cos 30°+\sin 30°)=\cos 60°+\sin 60°$。

(4) 試化簡下式:
$\sin(90°-A)\cot(90°-A)$。

(5) 試求下式中 x 的值:
$\sin 30°=x\cot 60°$。

(1) $(\sin 30°+\sin 45°)(\tan 60°+\cot 30°)$

$-4\sec 45°(\operatorname{cosec} 60°-\sec 30°)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{3})-4\times\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2\sqrt{3}-0$

$=\frac{(1+\sqrt{2})\times 2\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{6}$。

(2) $\sin^2(A+45°)+\sin^2(45°-A)$

$=\sin^2(A+45°)+\cos^2\{90°-(45°-A)\}$

$=\sin^2(A+45°)+\cos^2(45°+A)$

$=\sin^2(A+45°)+\cos^2(A+45°)$

$=1$。

(3) $\cot 60°(1+\cos 30°+\sin 30°)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 60°+\sin 60°$

(4) $\sin(90°-A)\cot(90°-A)$

$=\cos A\tan A$

$=\cos A\frac{\sin A}{\cos A}$

$=\sin A$。

(5) $\sin 30°=x\cot 60°$

$\frac{1}{2}=x\times\frac{1}{\sqrt{3}}$。

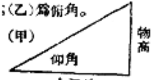
$\therefore\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

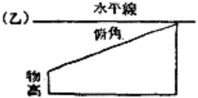
例題	解法	習題

例題

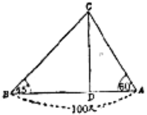
(1) 在一水塔正東的 A 點對塔頂的仰角為 $60°$，而在正西的 B 點則仰角為 $45°$，假如 AB 的距離是 100 尺，求水塔的高度。

(附註) 在水平面內的直線稱為水平線；如下圖（甲）為仰角；（乙）為俯角。





解法



設塔高為 CD，

因 $\angle B=45°$，

$\therefore$ $\angle BCD=45°$

而 $BD=CD$。

$$\tan A=\tan 60°=\sqrt{3}=\frac{CD}{AD},$$

$$\therefore\ AD=\frac{CD}{\sqrt{3}}=\frac{CD\sqrt{3}}{3}。$$

$$\therefore\ BD+AD=CD+\frac{CD\sqrt{3}}{3}=100。$$

$$\therefore\ CD=\frac{300}{3+\sqrt{3}}=63.4\ 尺。$$

答水塔高度為 63.4 尺。

(注意) $\sqrt{2}=1.414$；$\sqrt{3}=1.732$；在學習中應該記熟。

習題

*(1) 在一坡地的最上邊向平地拉一直線，長為 40 丈，仰角為 $30°$，求坡地的最高度。

*(2) 離自來水塔 60 尺而測量塔頂和它上面的旗竿頂。仰角為 $30°$ 和 $45°$，求塔的高和旗竿的長。

*(3) 在 100 尺高的樓上，觀測正北地平面上兩目標，俯角為 $60°$ 和 $45°$，求兩目標的距離。

*(4) 在高 a 尺的山頂，分向正南正北觀測地平面的兩目標。俯角為 α 和 β，求兩目標的距離。