

理科要覽

# 平面三角法

駱師曾 匡文濤編  
顧正容 修訂

商務印書館

理 科 要 覽  
平 面 三 角 法

駱師曾 匡文濤編  
顧 正 容 修 訂

(修 訂 本)

商 務 印 書 館

理 科 要 覽  
平 面 三 角 法

葛師曾 匡文瀾編  
顯正容 修訂

---

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通弄路一九〇號

(51118)

---

1937年6月初版 1953年11月13版(翻印)

1955年1月17版 印數60,501—90,500

定價¥6,900

頁數	頁數	頁數
角.....2	半角的三角函數(一).....46	任意三角形的解法(三).....92
三角函數的定義和基本關係.....4	半角的三角函數(二).....48	任意三角形的解法(四).....94
三角恆等式的證法(一).....6	正弦(或餘弦)的積與差的關係...50	任意三角形的解法(五).....96
三角恆等式的證法(二).....8	恆等式的證法(一).....52	應用的範例(一).....98
三角恆等式的證法(三).....10	恆等式的證法(二).....54	應用的範例(二).....100
餘角和 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $30^\circ$ 的三角函數.....12	對數的意義和公式.....56	應用的範例(三).....102
簡單的測量(一).....14	常用對數的意義和指標與假數...58	應用的範例(四).....104
簡單的測量(二).....16	從真數求對數的方法.....60	航海應用的範例.....106
任意的角度.....18	從對數求真數的方法.....62	物理應用的範例.....108
三角函數的線值.....20	從角度求三角函數的對數.....64	反三角函數(一).....110
三角函數的變化.....22	用對數解直角三角形.....66	反三角函數(二).....112
兩角的函數關係(一).....24	三角形邊和角的關係(一).....68	反三角函數(三).....114
兩角的函數關係(二).....26	三角形邊和角的關係(二).....70	反三角函數(四).....116
二角和的正弦及餘弦.....28	三角形邊和角的關係(三).....72	三角方程式解法(一).....118
二角差的正弦及餘弦.....30	三角形邊和角的關係(四).....74	三角方程式解法(二).....120
二角和及差的正切及餘切.....32	三角形邊角關係的運用.....76	三角方程式解法(三).....122
二倍角的正弦和餘弦.....34	三角形邊和半角的關係.....78	三角方程式解法(四).....124
二倍角的正切和餘切.....36	三角形的面積.....80	三角方程式解法(五).....126
三倍角的三角函數.....38	三角形的外接圓.....82	三角方程式解法(六).....128
倍角的三角函數習題.....40	三角形內切圓和傍切圓的半徑...84	三角方程式解法(七).....130
變換正弦餘弦的乘積為和及差...42	三角形的中線和角的平分線...86	消去法的應用(一).....132
變換正弦餘弦的和及差為乘積...44	任意三角形的解法(一).....88	消去法的應用(二).....134
	任意三角形的解法(二).....90	消去法的應用(三).....136

角的量法	角的單位	兩種單位間的關係	習題
1. 度量法或稱為六十分法。	<p>一個圓心角所對的弧，如為圓周的 <math>\frac{1}{360}</math>，就稱為一度。這是最常用的角度單位。1 度等於 60 分，1 分等於 60 秒。計算時寫成：<math>1^\circ = 60'</math>，<math>1' = 60''</math>。例如：3 度 48 分 52 秒，則寫成：<math>3^\circ 48' 52''</math>。</p>	<p>1. 因為 <math>360^\circ</math> 相當於 <math>2\pi</math> 徑，所以 <math>1</math> 徑 = <math>\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44.8''</math>；而 1 度則等於 <math>\frac{2\pi}{360}</math> 徑，就是：<math>1^\circ = 0.01745</math> 徑。</p> <p>2. 某角用弧量法，所得的結果為 <math>\theta</math>；用六十分法去量，所得的結果為 <math>D</math>；則 <math>\theta</math> 和 <math>D</math> 的關係是：<math>\frac{\theta}{\pi} = \frac{D}{180^\circ}</math>，也就是，</p>	<p>(1) 直角的 <math>\frac{65}{100}</math> 是幾度？</p> <p>(2) <math>97^\circ 5' 15''</math> 有幾直角？</p> <p>(3) 正三邊形，正五邊形，正六邊形的一內角各有幾度？</p> <p>(4) 令 <math>\pi</math> 為 <math>\frac{22}{7}</math>，則某角所含徑數的二倍和它所含的度數相加為 <math>23\frac{2}{7}</math>，求這角的度數。</p>
2. 弧量法或稱為本位弧法。	<p>不論圓的大小，凡和半徑等長的弧所對的圓心角，就稱為一徑，或一弧度。這是較高級的數學和物理學最通用的一種角度單位。設圓的半徑為 <math>R</math>，則圓周為 <math>2\pi R</math>，所以整個圓心角含有 <math>\frac{2\pi R}{R}</math> 徑，也就是 <math>2\pi</math> 徑或弧度。</p>	<p>也就是，</p> $\theta = \frac{D}{180^\circ} \pi$ <p>或</p> $D = \frac{\theta}{\pi} \times 180^\circ$	<p>(5) 各內角成等差級數，最小的是 <math>120^\circ</math>，公差為 <math>5^\circ</math>，這是幾邊形？</p>

(1)  $90^\circ \times 0.65 = 58.5^\circ$ ,  
 $60' \times 0.5 = 30'$ .

答  $58^\circ 30'$ 。

(2)  $97^\circ 5' 15'' \div 90^\circ$   
 $= 349515'' \div 324000''$   
 $= 1.07875$ .

答 1.07875 直角。

(3)  $180^\circ \div 3 = 60^\circ$ ，這是正三角形的一角。

而正五角形的一角為

$$180^\circ - 360^\circ \div 5 = 108^\circ.$$

正六角形的一角為

$$180^\circ - 360^\circ \div 6 = 120^\circ.$$

(4) 令所求的度數為  $x$  度。

用徑來表示，則為  $\frac{x}{360} 2\pi = \frac{x\pi}{180}$  徑。由題意，得

$$x + \frac{2x\pi}{180} = 23\frac{2}{7}^\circ.$$

$$\text{令 } \pi = \frac{22}{7}.$$

$$\text{則 } x \left( 1 + \frac{1}{90} \times \frac{22}{7} \right) = 23\frac{2}{7}.$$

$$\therefore x = 22\frac{1}{2}.$$

答  $22^\circ 30'$ 。

(5) 設所求的邊數為  $n$ ，則因外角的總和為  $360^\circ$ ，而最大的外角必定是和最小的內角相鄰，所以是  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 。

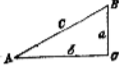
由等差級數求和的公式，得

$$\frac{n}{2} \{ 60 + [60 - (n-1)5] \} = 360^\circ$$

$$\therefore \frac{n}{2} \{ 120 - (n-1)5 \} = 360^\circ, \text{ 而 } n=16 \text{ 或 } 9.$$

令  $n=16$ ，則最小外角為  $60^\circ - (16-1)5^\circ = -15^\circ$ ；這結果不合理，所以 16 不適用。  $\therefore n=9$ 。

答 所求的為九邊形。

定 義	基本關係	習 題
<p>下列六種比值，稱為三角函數。</p>  <p>設 <math>C=90^\circ</math>，則</p> <p><math>\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}</math>，稱為“<math>A</math>的正弦”</p> <p><math>\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}</math>，稱為“<math>A</math>的餘弦”</p> <p><math>\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}</math>，稱為“<math>A</math>的正切”</p> <p><math>\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}</math>，稱為“<math>A</math>的餘切”</p> <p><math>\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}</math>，稱為“<math>A</math>的正割”</p> <p><math>\csc A = \frac{c}{a} = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}</math>，稱為“<math>A</math>的餘割”</p>	<p>倒數關係 <math>\begin{cases} \sin A \csc A = 1 \dots\dots\dots(1) \\ \cos A \sec A = 1 \dots\dots\dots(2) \\ \tan A \cot A = 1 \dots\dots\dots(3) \end{cases}</math></p> <p>相除關係 <math>\begin{cases} \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \dots\dots\dots(4) \\ \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \dots\dots\dots(5) \end{cases}</math></p> <p>平方關係 <math>\begin{cases} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots\dots(6) \\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \dots\dots\dots(7) \\ 1 + \cot^2 A = \csc^2 A \dots\dots\dots(8) \end{cases}</math></p> <p>(注意) 1. 上列八式，將函數的名稱換為邊和邊相除，例如，將 <math>\sin A</math> 換為 <math>\frac{a}{c}</math>，便立刻可以證明；2. 只要 <math>A</math> 的大小一定，<math>C</math> 是直角，<math>A</math> 的函數與三角形的大小無關；3. 六種三角函數，只要知道一種，就能推出其餘的五種。</p>	<p>(1) 在 <math>\triangle ABC</math> 中 <math>\angle C</math> 為直角，<math>BC</math>，<math>AC</math> 各為 3，4，求 <math>A</math> 的三角函數。</p> <p>* (2) 已知 <math>\sin A = \frac{15}{17}</math>，求 <math>A</math> 角的其餘各函數。</p> <p>* (3) 用 <math>\tan A</math> 表出其餘的諸函數。</p> <p>(4) 設 <math>\cos A = \frac{12}{13}</math>，試求 <math>A</math> 的其他三角函數。</p> <p>(5) 設 <math>\tan A = 2 + \sqrt{3}</math>，試推算 <math>A</math> 的其他三角函數。</p>

$$(1) BC=3, AC=4, AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=5.$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{4}{5},$$

$$\tan A = \frac{3}{4}, \quad \cot A = \frac{4}{3},$$

$$\sec A = \frac{5}{4}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{5}{3}.$$

$$\bullet(2) \quad \sin A = \frac{15}{17}, \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}.$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{15}{17} \times \frac{17}{8} = \frac{15}{8}.$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{8}{15}.$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{17}{8}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{17}{15}.$$

$$\bullet(3) \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

$$\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}.$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$$

$$\sin A = \tan A \cos A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}.$$

$$(4) \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{12}{5}.$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{13}{12}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{13}{5}.$$

(5) 和 (3) 同樣, 得

$$\cot A = 2 - \sqrt{3}, \quad \sec A = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{cosec} A = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$



證 法	習 題
<p>(1) 先變化複雜的一邊,使它和另一邊相等。</p> <p>例 試證明下式。</p> $\tan^2 A + \cot^2 A - (\sin^2 A \tan^2 A + \cos^2 A \cot^2 A) = 1_0$ <p>(證) 左邊 = <math>\tan^2 A - \sin^2 A \tan^2 A + \cot^2 A - \cos^2 A \cot^2 A</math></p> $= \tan^2 A(1 - \sin^2 A) + \cot^2 A(1 - \cos^2 A)$ $= \tan^2 A \cos^2 A + \cot^2 A \sin^2 A$ $= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cos^2 A + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \sin^2 A$ $= \sin^2 A + \cos^2 A$ $= 1_0$	<p>試證明下列各恆等式:</p> <p>(1) <math>\frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta_0</math></p> <p>(2) <math>\left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\right) \left(\frac{1 + \sec x}{1 + \operatorname{cosec} x}\right) = \tan x_0</math></p> <p>(3) <math>\cot^2 A - \cos^2 A = \cos^2 A \cot^2 A_0</math></p> <p>(4) <math>(p \cos A + q \sin A)^2 + (q \cos A - p \sin A)^2 = p^2 + q^2_0</math></p> <p>(5) <math>2(\sin^6 A + \cos^6 A) - 3(\sin^4 A + \cos^4 A) + 1 = 0_0</math></p> <p>(6) <math>\operatorname{cosec} a \sec^2 a + \sin a \tan^2 a - 2 \tan a \sec a = \operatorname{cosec} a - \sin a_0</math></p>

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 左邊} &= \frac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta} \\
 &= \frac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} \\
 &= \frac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta} = \frac{2}{\sin\theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 左邊} &= \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) \left(\frac{1+\frac{1}{\cos x}}{1+\frac{1}{\sin x}}\right) \\
 &= \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) \left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\right) \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \tan x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 左邊} &= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} - \cos^2 A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A} \\
 &= \frac{\cos^2 A (1 - \sin^2 A)}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A} \\
 &= \cos^2 A \cot^2 A.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 左邊} &= p^2 \cos^2 A + q^2 \sin^2 A + q^2 \cos^2 A + p^2 \sin^2 A \\
 &= p^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) + q^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) \\
 &= p^2 + q^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ 左邊} &= 2(\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^4 A - \sin^2 A \cos^2 A \\
 &\quad + \cos^4 A) - 3(\sin^4 A + \cos^4 A) + 1 \\
 &= 2\{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 3\sin^2 A \cos^2 A\} \\
 &\quad - 3\{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 2\sin^2 A \cos^2 A\} + 1 \\
 &= 2(1 - 3\sin^2 A \cos^2 A) \\
 &\quad - 3(1 - 2\sin^2 A \cos^2 A) + 1 \\
 &= 2 - 6\sin^2 A \cos^2 A - 3 + 6\sin^2 A \cos^2 A + 1 \\
 &= 3 - 3 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ 左邊} &= \frac{1}{\sin a \cos^2 a} + \frac{\sin a \sin^2 a}{\cos^2 a} - \frac{2 \sin a}{\cos^2 a} \\
 &= \frac{1 - 2\sin^2 a + \sin^4 a}{\sin a \cos^2 a} = \frac{(1 - \sin^2 a)^2}{\sin a \cos^2 a} \\
 &= \frac{\cos^4 a}{\sin a \cos^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\sin a} = \frac{1 - \sin^2 a}{\sin a} \\
 &= \frac{1}{\sin a} - \sin a = \operatorname{cosec} a - \sin a.
 \end{aligned}$$

證 法	習 題
<p>(2) 分別變化兩邊的形式而比較它們的結果。</p> <p>例 <math>\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A,</math></p> <p>(證) <math>\sin^4 A + \cos^4 A = \sin^4 A + (\cos^2 A)^2</math></p> $= \sin^4 A + (1 - \sin^2 A)^2$ $= \sin^4 A + 1 - 2 \sin^2 A + \sin^4 A$ $= 1 - 2 \sin^2 A + 2 \sin^4 A.$ $1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A = 1 - 2 \sin^2 A (1 - \sin^2 A)$ $= 1 - 2 \sin^2 A + 2 \sin^4 A.$ <p>即原式的兩邊相等。</p>	<p>試證明下列各恆等式：</p> <p>(1) <math>\sec A - \cos A = \sin A \tan A.</math></p> <p>(2) <math>(2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A)</math>  <math>= (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).</math></p> <p>(3) <math>(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A)</math>  <math>= \sec A + \operatorname{cosec} A.</math></p> <p>(4) <math>(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A).</math></p> <p>(5) <math>(2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A)</math>  <math>= (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).</math></p>

$$\begin{aligned} \text{(1) 左邊} &= \frac{1}{\cos A} - \cos A = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \\ &= \frac{\sin^2 A}{\cos A} \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \sin A \left( \frac{\sin A}{\cos A} \right) = \frac{\sin^2 A}{\cos A} \circ$$

所以原式的兩邊相等。

$$\begin{aligned} \text{(2) 左邊} &= (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) \\ &= (2 - \cos^2 A) \left( 1 + \frac{2 \cos^2 A}{\sin^2 A} \right) \\ &= (1 + \sin^2 A) \frac{\sin^2 A + 2 \cos^2 A}{\sin^2 A} \\ &= \frac{(1 + \sin^2 A)(1 + \cos^2 A)}{\sin^2 A} \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= \left( 2 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \right) (1 + \cos^2 A) \\ &= \frac{2 \sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A} (1 + \cos^2 A) \\ &= \frac{(1 + \sin^2 A)(1 + \cos^2 A)}{\sin^2 A} \circ \end{aligned}$$

所以原式的左右相等。

$$\begin{aligned} \text{(3) 左邊} &= (\sin A + \cos A) \left( \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \right) \\ &= (\sin A + \cos A) \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A} \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A} \circ$$

∴ 左邊 = 右邊。

$$\begin{aligned} \text{(4) 左邊} &= 1 + \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A + 2 \cos A + 2 \sin A \cos A \\ &= 1 + 1 + 2 \sin A + 2 \cos A + 2 \sin A \cos A \\ &= 2(1 + \sin A + \cos A + \sin A \cos A) \circ \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = 2(1 + \sin A + \cos A + \sin A \cos A) \circ$$

∴ 左邊 = 右邊。

$$\begin{aligned} \text{(5) 左邊} &= (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) \\ &= (1 + \sin^2 A)(2 \operatorname{cosec}^2 A - 1) = (1 + \sin^2 A) \left( \frac{2}{\sin^2 A} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\sin^2 A} + 2 - 1 - \sin^2 A = \frac{2}{\sin^2 A} + \cos^2 A \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A) = (1 + \operatorname{cosec}^2 A)(1 + \cos^2 A) \\ &= 1 + \frac{1}{\sin^2 A} + \cos^2 A + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{2}{\sin^2 A} + \cos^2 A \circ \end{aligned}$$

∴ 左邊 = 右邊。

證	法	習題
<p>(3) 把公式變化成爲另一形式,再把這形式變成和已知的恆等式一樣,這是一種試探的方法。</p> <p>例 1. 試證明: <math>1 + \sec^4 A - \tan^4 A = 2 \sec^2 A</math>,</p> <p>(證) 公式 <math>1 + \tan^2 A = \sec^2 A</math>。</p> <p><math>\therefore 1 - \sec^2 A = -\tan^2 A</math>。</p> <p><math>\therefore 1 - 2 \sec^2 A + \sec^4 A = \tan^4 A</math>。</p> <p><math>\therefore 1 + \sec^4 A - \tan^4 A = 2 \sec^2 A</math>。</p> <p>例 2. 試證明: <math>\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A}</math>。</p> <p>(證) 要證明這恆等式,可先證明:</p> $(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A) = 1,$ $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1,$ $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A.$ <p>上列結果爲一公式,所以原式的兩邊恆等。</p>		<p>試證明下列恆等式:</p> <p>(1) <math>\operatorname{cosec}^4 A + \cot^4 A</math>  <math>= 1 + 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A</math>。</p> <p>(2) <math>\tan^2 x \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x</math>。</p> <p>(3) <math>\frac{\tan^2 A - \cot^2 A}{\sec A + \operatorname{cosec} A} = \sec A - \operatorname{cosec} A</math>。</p> <p>(4) <math>\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2</math>。</p>

$$(1) \operatorname{cosec}^4 A + \cot^4 A = 1 + 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A.$$

可將上式移項改為下式，再加以證明。

$$\operatorname{cosec}^4 A + \cot^4 A - 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A = 1.$$

$$(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)^2 = 1.$$

$$(1 + \cot^2 A - \cot^2 A)^2 = 1.$$

$$1 = 1.$$

這就可以斷定原式的左右相等。

$$(2) \tan^2 x \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x.$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}.$$

∴ 原式為恆等式。

(3) 將原式變形為

$$\tan^2 A - \cot^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

$$(1 + \tan^2 A) - (1 + \cot^2 A) = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

$$\sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

此是證明原式之左右相等。

$$(4) \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

變其形為

$$\frac{(1 + \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

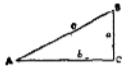

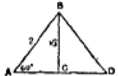
$$\frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

$$\frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

$$\left( \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = (\sec \theta + \tan \theta)^2.$$

$$(\sec \theta + \tan \theta)^2 = (\sec \theta + \tan \theta)^2.$$

∴ 原式為恆等式。

餘角的公式	$45^\circ$ 的三角函數	$60^\circ$ 、 $30^\circ$ 的三角函數	習題
 <p>令 <math>C=90^\circ</math>, 則  <math>B=90^\circ-A</math>,  <math>\sin B = \frac{b}{c}</math>.</p> <p><math>\therefore \sin(90^\circ-A) = \frac{b}{c}</math>.</p> <p>但 <math>\cos A = \frac{b}{c}</math>.</p> <p><math>\therefore \sin(90^\circ-A) = \cos A</math>.</p> <p>同理:  <math>\cos(90^\circ-A) = \sin A</math>,  <math>\tan(90^\circ-A) = \cot A</math>,  <math>\cot(90^\circ-A) = \tan A</math>,  <math>\sec(90^\circ-A) = \operatorname{cosec} A</math>,  <math>\operatorname{cosec}(90^\circ-A) = \sec A</math>.</p>	 <p>因爲: <math>C=90^\circ</math>  <math>A=45^\circ</math></p> <p>設 <math>AC=BC=1</math>, 則  <math>\angle B = \sqrt{2}</math></p> <p><math>\therefore \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math></p> <p><math>\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math></p> <p><math>\tan 45^\circ = 1</math>,  <math>\cot 45^\circ = 1</math>,  <math>\sec 45^\circ = \sqrt{2}</math>,  <math>\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}</math>.</p> <p>(注意) <math>30^\circ, 45^\circ, 60^\circ</math> 各角的正弦是 <math>\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}</math>, 這      很便於記憶, 而且必須記熟。</p>	 <p><math>\triangle ABD</math> 爲正三角形,      令 <math>AC=CD=1</math>, 則  <math>AB=2, BC=\sqrt{3}</math>,  <math>\angle BAC=60^\circ, \angle ABC=30^\circ</math>.</p> <p><math>\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ</math></p> <p><math>\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ</math>,  <math>\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ</math>,  <math>\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ</math>,  <math>\sec 60^\circ = 2 = \operatorname{cosec} 30^\circ</math>,  <math>\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ</math>.</p>	<p>(1) 試求下式的數值:  <math>(\sin 30^\circ + \sin 45^\circ)</math>  <math>\times (\tan 60^\circ + \cot 30^\circ)</math>  <math>- 4 \sec 45^\circ (\operatorname{cosec} 60^\circ</math>  <math>- \sec 30^\circ)</math>.</p> <p>(2) 試求下式的數值:  <math>\sin^2(A+45^\circ) \sin^2</math>  <math>(45^\circ-A)</math>.</p> <p>(3) 試證明下式:  <math>\cot 60^\circ(1 + \cos 30^\circ</math>  <math>+ \sin 30^\circ) = \cos 60^\circ</math>  <math>+ \sin 60^\circ</math>.</p> <p>(4) 試化簡下式:  <math>\sin(90^\circ-A) \cot</math>  <math>(90^\circ-A)</math>.</p> <p>(5) 試求下式中 <math>x</math> 的値:  <math>\sin 30^\circ = x \cot 60^\circ</math>.</p>

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\sin 30^\circ + \sin 45^\circ)(\tan 60^\circ + \cot 30^\circ) \\
 & \quad - 4 \sec 45^\circ(\operatorname{cosec} 60^\circ - \sec 30^\circ) \\
 & = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) - 4 \times \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\
 & = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\sqrt{3} - 0 \\
 & = \frac{(1 + \sqrt{2}) \times 2\sqrt{3}}{2} \\
 & = \sqrt{3} + \sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

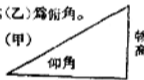
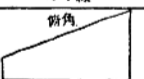
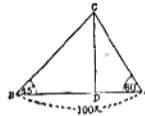
$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sin^2(A + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - A) \\
 & = \sin^2(A + 45^\circ) + \cos^2[90^\circ - (45^\circ - A)] \\
 & = \sin^2(A + 45^\circ) + \cos^2(45^\circ + A) \\
 & = \sin^2(A + 45^\circ) + \cos^2(A + 45^\circ) \\
 & = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \cot 60^\circ(1 + \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right) \\
 & = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60^\circ + \sin 60^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \sin(90^\circ - A)\cot(90^\circ - A) \\
 & = \cos A \tan A \\
 & = \cos A \frac{\sin A}{\cos A} \\
 & = \sin A.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \sin 30^\circ = x \cot 60^\circ \\
 & \frac{1}{2} = x \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \therefore \quad & x = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$



例題	解法	習題
<p>(1) 在一水塔正東的 <math>A</math> 點對塔頂的仰角為 <math>60^\circ</math>，而在正西的 <math>B</math> 點則仰角為 <math>45^\circ</math>，假如 <math>AB</math> 的距離是 100 尺，求水塔的高度。</p> <p>(附註) 在水平面內的直線稱為水平線；如下圖 (甲) 為仰角；(乙) 為俯角。</p>  	<p>設塔高為 <math>CD</math>， 因 <math>\angle B = 45^\circ</math>， <math>\therefore \angle BCD = 45^\circ</math> 而 <math>BD = CD</math>。 <math>\tan A = \tan 60^\circ</math></p>  $= \sqrt{3} = \frac{CD}{AD},$ $\therefore AD = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{CD\sqrt{3}}{3}.$ $\therefore BD + AD = CD + \frac{CD\sqrt{3}}{3} = 100.$ $\therefore CD = \frac{300}{3 + \sqrt{3}} = 63.4 \text{ 尺}.$ <p>答水塔高度為 63.4 尺。</p> <p>(注意) <math>\sqrt{2} = 1.414</math>; <math>\sqrt{3} = 1.732</math>; 在學習中應該記熟。</p>	<p>* (1) 在一坡地的最上邊向平地拉一直線，長為 40 丈，仰角為 <math>30^\circ</math>，求坡地的最高度。</p> <p>* (2) 離自來水塔 60 尺而測量塔頂和它上面的旗竿頂。仰角為 <math>30^\circ</math> 和 <math>45^\circ</math>，求塔的高和旗竿的長。</p> <p>* (3) 在 100 尺高的樓上，觀測正北地平面上兩目標，俯角為 <math>60^\circ</math> 和 <math>45^\circ</math>，求兩目標的距離。</p> <p>* (4) 在高 <math>a</math> 尺的山頂，分向正南正北觀測地平面的兩目標。俯角為 <math>\alpha</math> 和 <math>\beta</math>，求兩目標的距離。</p>