



丛书主编 安波



高考真功夫

名校高分考典

新课程 新考纲

2005版

数学

原子能出版社



丛书主编 安波



高考真功夫

名校高分考典

新课程 新考纲

2005版

数学

本册主编：乜全力

副主编：李玉明 孙备起 高红梅

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考真功夫——名校高分考典 数学/乜全力编著. —北京:原子能出版社,2004.6

(魁花宝典系列丛书)

ISBN 7-5022-3177-3

I. 高... II. 乜... III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 051925 号

高考真功夫——名校高分考典 数学

出版发行 原子能出版社(地址:北京市海淀区阜成路 43 号 邮编:100037)

责任编辑 徐向超

责任校对 王晓琳

责任印制 陈贵杰

印 刷 北京雷杰印刷有限公司

经 销 全国新华书店

开 本 880 mm×1230 mm 1/16

字 数 461 千字

印 张 11.25

版 次 2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5022-3177-3/G·9

印 数 1~10 000

定 价 16.80 元

版权所有 侵权必究(如有缺页、倒装,请与出版社联系调换)

2005 版《高考真功夫》丛书

编写说明

选择魁花宝典 轻松走入大学

一、新课程、新考纲、新考卷全新展示

“魁花宝典”丛书通过对高考特点规律的探讨,在深入研究教育改革、升学考试改革的新形势、新进展;《考试大纲》的新精神、新要求;单独命题的新变化、新走势的基础上进行编写。让学生清楚高考到底考什么,怎么出题,如何应对,避免复习中的盲目性和随意性,从而收到事半功倍的效果。

二、栏目新颖、层次清晰,遵循“因材施教——由易到难,由简到繁,由低层次到高层次”的教育理论

“魁花宝典”丛书根据学生学习和复习的实际状况、存在问题,为学生提供最实用、最有效的复习对策和方法。由易到难,由浅入深,由基础到提高,由知识到能力,由单学科综合到跨学科综合,形成一套科学完整的体系。让成绩一般或中等生有突破性的提高,优等生更加拔尖,适合各种档次的学校、各个层次的学生使用。

“扎实功底”栏目,层层解读知识重点、难点,精准点击高考热点、考点。

“名师支招”栏目,选取经过试用和论证的好题,并进行有效的解题指导,探讨解题的新思路、新技巧,能力培养的新措施、新方法以及如何高效作答。

“目标冲刺”栏目,大视野、大手笔编制探究性测试,原创设计新情景、新热点考题,通过做题实践和演练提高分析问题、解决问题的能力,从而增强信心。

三、以能力培养和训练为重点,从素质备考的角度全程规划复习方案与内容

新课标旨在全面推进素质教育,培养学生的创新精神,实践能力,终生学习的能力和适应社会的能力,促进学生全面发展。新高考仍以能力为立意,重在考查学生的实践能力、创新能力及综合文化素质。

“魁花宝典”丛书吸收了众多名校名师在探索素质教育的教学实践中的宝贵经验,博采众长。按照学生的认知规律全程规划设计,以教师为主导,以学生为主体,充分培养学生的创新能力、实践能力、综合能力。

四、特教军团集体亮相,呕心沥血、倾心打造

北京海淀、江苏南通、湖北黄冈皆为令国人瞩目的高考状元之乡,是北大、清华、人大等全国名牌重点大学的重要生源基地。高考成绩在全国一直名列前茅,曾多次出过高考状元、单科满分生。考入北大、清华的学生占考生总数的百分之四十左右,考入重点大学的升学率为百分之九十以上。

《高考真功夫——名校高分考典》丛书由以上众多长期奋战在高考一线的特级教师,教学、教研专家精心编写。这些教师有着丰富的教学经验和骄人的业绩,把他们的经验发掘出来,把他们积累的宝贵资料收集起来,整理出一套有特色的高考复习指导用书,以便与更多的师生共享。



名校高考优秀生学习经验访谈录

在这一篇中,我们将向大家介绍名校优秀同学在学习方面的经验与体会。众所周知,学习是中中学生最为重要的任务,也是众多中中学生感到困难的问题。正因为如此,借鉴在学习方面取得成功的同学们的经验就显得尤为重要——这便是我们编写此篇的主要目的。

李威(曾两次获得全国高中数学竞赛一等奖,并多次在期中、期末考试中取得年级第一的优异成绩,现已保送至清华大学生物医药系统工程专业学习。)

我来谈谈数学方面,学习离不开兴趣,数学学习更是如此。小时候,我在数字迷等益智游戏的学习中喜欢上了数学;大了,也用许多趣题来锻炼大脑。以下给出一精彩题目,以飨读者。

5个海盗(A、B、C、D、E)分100枚金币。给出以下假设:

1. 海盗足够聪明,足够残忍。
2. 他们希望自己尽可能多的得到金币,但保命要紧。
3. 由A到E顺次提分配方案,方案通不过,提方案者被杀,下一个再提,直到通过。

4. 除去提方案者,余下的人投票。不同意的票数过半(不包括一半),提方案者被杀。

问:A至多得几个金币。

如果你能求出正确答案,你是天才。如果你能理解下面的分析,那也证明你有足够的数学头脑。

分析:(这里分析到的海盗都能想到)采用倒推法:

1. 只剩D、E。无论D如何,E都可能杀D,所以D不会让C被杀。
2. 只剩C、D、E。C可以将100枚全留给自己,D、E一无所得,但D也会保C。
3. 只剩B、C、D、E。C一定要杀,但只要B给D、E一人1枚,D、E享受的待遇优于C给他们的,D、E会同意B的方案(若不给,杀不杀对D、E没影响,D、E有可能不同意B的方

案),此时B能活。

4. A提方案。若A被杀,C一无所得,所以只要给C1枚,C会同意A的方案。只需再给D(或E)2枚(待遇优于B的方案),D(或E)也会赞成,此时A能活,且得97枚。

可见,数学的魅力正在于缜密的逻辑推理,做出题来的成就感非同一般。越钻研下去,越觉其乐无穷,有了兴趣,学习真的很轻松。

高中数学有其自己的特点:高一时,应打下坚实的基础,“双基”训练应当加强;高二时,应不再拘泥于学知识,学会运用是关键;高三时,应强化应试能力,为决战做好准备。为了提高考试成绩,我力争做到把平时的训练当作高考,把高考当作平时的训练,放平心态,应试时有动力而无压力,做题迅速但不慌,精力集中却不紧张。科学的训练和良好的应试心态,是高分的保障。

在学习的过程中,“知识网络”的重要性不言而喻,只要胸中有表,能理清各种知识点的纵横关系,就能拓展思维,掌握具体方法和技巧,明确所学内容。再有,为了更进一步,应多做题广做题,但不要局限于做题。在冲击更高峰时,高考真题是研究对象,要想百尺竿头更上一层楼,一定要熟悉真题,熟悉出题者的思路。如果能遇到名师,还可以做一做预测题,长长见识。我就是在完成了这几步后,在高考数学中,取得优异成绩的。

Contents

目 录

高考数学命题动向及复习备考策略	(1)
第一章 集合与简易逻辑	(5)
第二章 函数	(13)
第三章 数列	(26)
第四章 三角函数	(36)
第五章 平面向量	(47)
第六章 不等式	(56)
第七章 直线和圆的方程	(66)
第八章 圆锥曲线方程	(77)
第九章 直线、平面、简单几何体	(88)
第十章 排列、组合和概率	(100)
第十一章 概率与统计	(108)
第十二章 极限与导数	(117)
第十三章 数系的扩充——复数	(126)
答案与解析	(132)



高考数学命题动向及复习备考策略

纵观近年来的高考数学试卷,既有继承,又有更多的创新,命题动向的总趋势是:初步体现了新的课程理念,突出了创新精神和实践能力的考查;加强了方法、应用、探索等方面的内容;在突出数学基础的、核心的、有利于培养数学思维能力的基础上,更加强调数学与现实生活的联系,强调数学的实际应用,有利于考查学生的创造性思维能力。

2004 年高考数学科考试说明中明确提出:“数学科考试,要发挥数学作为基础学科的作用,既重视考查对中学数学知识掌握程度,又注重考查进入高校继续学习的潜能。”还指出:“数学科的考试,按照‘考查基础知识的同时,注重考查能力’的原则,确立以能力立意命题的指导思想,增加应用性和能力型的试题,加强素质的考查,融知识、能力与素质于一体,全面检测考生的数学素养。”

2003 年数学高考依据数学科《考试说明》的各项要求,在遵循“有助于高校选拔人才、有助于中学实施素质教育、有助于高等学校扩大办学自主权”的原则基础上,进一步加大了改革的力度,融入了新课程新大纲的理念,试题立意更加新颖,选材不拘一格,从数学知识、思想方法、学科能力出发,多层次、多角度、多视点地考查了学生的数学素养和学习的潜能。呈现出新的特点和新的要求。为此,对近两年的数学高考试卷进行认真的分析和思考,进一步明确数学高考考什么、怎么考,是十分必要的。并以此确定复习和备考的方向和对策,提高复习和备考的针对性和实效性。

一、立足基础,突出能力

以数学知识为载体,立足基础,突出能力,已成为高考数学命题理念的核心,也是今后数学高考命题的基本原则。数学能力的产生和发展依托于数学知识的土壤,注重知识结构,在知识网络交汇点命题,一题串联多个知识点,这种“综合考查”数学知识的命题理念,使得对数学知识的要求,不能停滞在孤立的对各个知识的理解和记忆上,更要求牢固掌握“三基”,把握知识的纵横联系,包括初中的主干知识,并能灵活运用用于问题解决之中。

◆**考题 1** (2004 年高考理科数学 2 题) 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a) = b$, 则 $f(-a) =$ ()

A. b B. $-b$ C. $\frac{1}{b}$ D. $-\frac{1}{b}$

【解析】由题设 $f(a) = b$ 与所求 $f(-a)$, 考虑 $f(x)$ 的奇偶性. $\frac{1-x}{1+x} > 0$ 得, $-1 < x < 1$. 且 $f(-x) + f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1-x}{1+x} = \lg \frac{1-x^2}{1-x^2} = \lg 1 = 0$ $\therefore f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数, 那么易知 $f(-a) = -f(a) = -b$. 故选 B.

此题考查了对数函数的运算法则与函数的奇偶性的判定

等基础知识. 如若熟练掌握基本知识与技能, 即可快速作答。

◆**考题 2** 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()

A. 1 B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{8}$

【分析】不妨设 $x_1 = \frac{1}{4}$ 是方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的一个根, 由韦达定理知该方程的另一个根为 $x_2 = \frac{7}{4}$. 又设方程 $x^2 - 2x + n = 0$ 的两根为 y_1, y_2 . 由韦达定理知:

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = 2 \quad (1)$$

由等差数列 $\{a_n\}$ 的性质可知 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, 故“四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列”为:

$$\frac{1}{4}, y_1, y_2, \frac{7}{4} \quad (2)$$

接下来就很容易根据等差数列的性质求得 $|m - n| = \frac{1}{2}$, 故选 C.

此题考查数列知识和方法, 同时蕴含考查了初中的韦达定理等知识. 利用 (1) 式和等差数列的性质分析得出四个根的排列形式 (2), 是解题的关键所在. 没有对知识结构融会贯通的理解, 解此题是有一些困难的. 有不少同学先求出四个根 $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4m}$, $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4n}$, 接下来再分情形讨论. 这种缺乏层次的思维方式, 很容易导致简单问题复杂化, 不利于解题。

◆**考题 3** 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

A. 3π B. 4π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 6π

这是新课程卷与现行课程卷的文、理卷共有的一道试题, 如果采用直接法, 在所有棱长都为 $\sqrt{2}$ 的四面体, 即侧棱与底面边长都为 $\sqrt{2}$ 的正三棱锥中, 计算其外接球的半径, 再计算球的表面积, 则运算量大, 容易算错. 如果联想正方体及其外接球, 不难发现, 此四面体是由棱长为 1 的正方体的六个面上的对角线构成的, 与正方体共外接球, 因此其外接球的直径恰是正方体的对角线, 长为 $\sqrt{3}$, 再求其表面积就很容易了. 正方体应是考生最熟悉的空间图形, 有关几何量的计算都比较容易, 而揭示本题中四面体与正方体的关系, 就是考查空间想像能力. 此题的得分率仅为 0.2~0.4, 可见差距主要是不善于在基础知识的学习中提升能力的水平。

二、突出对数学思想方法的考查

数学的思想方法是数学知识的精髓, 是对数学的本质的认识, 是数学学习的指导思想和普遍适用的方法, 提炼数学思

想方法,是学会提出问题、分析问题和解决问题,把数学学习与培养能力、发展智力结合起来的关键。近几年的数学高考十分重视对数学思想方法的考查,并贯穿于整个试卷中。

◆**考题4** 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 R 上单调递减. Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 R . 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

此题是一个与新教材内容“简易逻辑”接轨的好题, 题目形式脱俗, 表述新颖. 主要考查函数的相关知识, 涉及指数函数、绝对值、不等式等知识. 事实上, “ P 和 Q 有且仅有一个正确”应分为 P 真 Q 假与 P 假 Q 真两种情况, 这是一个典型的逻辑划分, 是分类讨论的数学思想的具体体现. 如果把 P 和 Q 为真命题的充要条件确定为 c 的取值集合 A 和 B , 则符合题意的 C 的取值范围恰是数集 $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$, 这里涉及分类讨论和解决不等式中恒成立问题的思想和方法, 要求具有严密的逻辑思维能力及清楚准确的表述能力, 许多考生不能入题, 首要原因是知识上的缺漏, 即未掌握指数函数的定义和性质, 故不能得出 $y = c^x$ 在 R 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$ 的结论, 未掌握不等式中有关恒成立的知识与方法, 故不能得出: “ $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $R \Leftrightarrow$ 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 R 上恒大于 1”的结论等; 其次是不会运用分类讨论的方法灵活运用集合、函数、绝对值等知识分析、判断、解答问题的能力问题.

此外, 还有诸多题也着重考查了分类讨论思想. 能否对解决问题的情况进行正确的分类, 反映了思考问题是否全面, 是否缜密, 这是一种重要的数学品质.

历年高考都十分重视考查学生对数形结合思想的运用. 如

◆**考题5** (1) 不等式 $\sqrt{4x - x^2} < x$ 的解集是 _____; (2) 使 $\log_2(-x) < x + 1$ 成立的 x 的取值范围是 _____.

这两道题分别是现行课程卷文科与理科的填空题, 按照解不等式的思路求解, 就需实施一系列的不等式的变换, 转化为解不等式组. 采用图像法, 并进行定量的分析, 答案可直接显示在图像上, 其中函数 $y = \sqrt{4x - x^2}$ 的图像, 可由 $y = \sqrt{4x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 得知它是半圆, 其余的函数都是基本函数, 其图像都应是十分熟悉的. 图像法解不等式, 具有直观、简便的优点, 是普遍使用的一种有效方法, 这种方法就是数形结合的思想方法的具体体现, 采用图像法求解的试题在历年数学高考试卷中都占有较大的比例.

◆**考题6** (2004 春季高考题 7) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且对任意大于 1 的正整数 n , 点 $(\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n-1}})$ 在直线 $x - y - \sqrt{3} = 0$ 上, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^2} =$ _____.

此题将数列、极限和平面直角坐标系内的直线综合了起来, 不仅考查了这些知识的综合运用, 还考查了观察数式变形的能力, 透析出数学转化、变换的美感.

此外, 考查函数与方程、转化等高中数学重要思想始终贯穿全卷.

三、加强了对数学的核心能力——思维能力的考查

数学的思维能力是各种数学能力的核心. 在 2002 版的《数学教学大纲》中, 将数学思维能力作了重新界定, 指出: “努力培养

学生数学思维能力, 包括: 空间想像、直觉猜想、归纳抽象、符号表示、运算求解、演绎证明、体系构建等诸多方面, 能够对客观事物中的数量关系和数学模式作出思考和判断.” 2003 年的试题很好地实践了这一深化数学理性思维的考查指导思想, 着重考查数学的思维能力必将成为今后数学高考的主要特征之一.

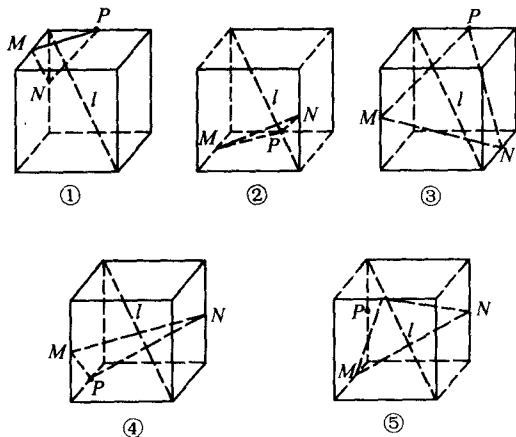
◆**考题7** 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$, $D(0, 1)$. 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反映到 CD , DA , AB 上的点 P_2, P_3, P_4 (入射角等于反射角). 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
A. $(\frac{1}{3}, 1)$ B. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ C. $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

这是现行课程卷和新课程卷的理科试卷的第 (10) 题, 如果逐个计算点 P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标和推导顺次连结这四个点的四条直线的方程, 最终用 $k = \tan \theta$ 表示 P_4 的横坐标 x_4 , 再解不等式 $1 < x_4 < 2$, 求 $k = \tan \theta$ 的取值范围, 则计算过程十分繁冗.

采用作图的方法, 考生只需画出 $\tan \theta$ 取 $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ 中一个数值时对应的图形, 并估计出 $\tan \theta$ 的变动与点 P_4 的变动的趋势, 就能很快地得出正确的答案, 但上述的作图必须是定量的、准确的, 否则难以奏效. 以图助算, 精算与估算相结合, 正是一种重要的数学能力. 更为简捷的方法是画出 $k = \tan \theta = \frac{1}{2}$ 的图形,

这时点 P_4 恰与 AB 的中点 P_0 重合, $x_4 = 1$, 不满足 $1 < x_4 < 2$; 再注意到 $\frac{1}{2}$ 分别属于 $(\frac{1}{3}, 1), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$, 从而判定 A、B、D 为不合题意的选项, 进而选定 C. 这一简捷方法正是建立在正确把握逻辑关系严谨性的基础之上的, 反映出逻辑思维能力的较高水平. 高考作为一种选拔性的考试, 试题的区分度是一项重要的指标, 而最需要区分的就是思维能力的不同水平.

◆**考题8** 下列五个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M, N, P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是 _____ (写出所有符合要求的图形序号).



此题实际上是以填空题形式出现的多选题, 要求考生缜密思考条件对结论成立的充分性, 所选的符合要求的图形序号不多不少, 以此体现数学思维的严谨性. 无论是以填空题形式出现的多选题, 还是以选择题形式出现的多选题, 无论是以代数知识为载体, 还是以几何知识为载体, 都围绕着条件对

结论成立的充分性或必要性的考查,都对数学思维的严谨性有较高的要求,也是考查思维能力的有效方式,值得引起重视。

◆**考题 9** (2004 年理科高考题 15) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}, (n \geq 2)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ _____。

此题考查前 n 项和与第 n 项的关系,以及由递推公式求通项的能力。由已知: $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$

$$\text{则 } a_{n-1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-2)a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = (n-1)a_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = n \quad (n \geq 3), \therefore \frac{a_3}{a_2} = 3, \frac{a_4}{a_3} = 4, \frac{a_5}{a_4} = 5, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = n$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n, \text{ 而 } a_2 = a_1 = 1. \therefore a_n = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n = \frac{n!}{2}$$

四、加大探索性、研究性问题以及对数学应用意识的考查

高考试题往往通过提供新材料、创设新情景和提出新问题进行命题创新,这就要求加强研究性学习、培养提高探究能力、创新意识和实践能力。解决这类问题时必须充分调动自己的数学素养,综合运用所学数学知识和数学思想方法解决新问题。

◆**考题 10** 若首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项的和, 则首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 _____。

【分析】 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在的充要条件是公比 q 满足 $|q| < 1$ 。

$$\text{若取 } q = \frac{1}{2}, \text{ 则 } S_n = \frac{a_1(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1(1 - \frac{1}{2^n}),$$

$$S = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1$$

由于 $0 < 1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 由 $S_n < S$ 可知 $a_1 > 0$ 。

因此首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 $(1, \frac{1}{2})$ 。

这是一道探究可以符合要求的结论的试题,由于试题要求写出首项 a_1 , 公比 q 的一组取值,解题过程中采用了合理猜想和严格推理相结合的方法:先取满足 $|q| < 1$ 的一个值 $q = \frac{1}{2}$, 然后推断首项 a_1 的取值范围,简化了探求的过程。如果

只是采用单一的演绎推理:解不等式组: $\begin{cases} |q| < 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} < \frac{a_1}{1-q} \end{cases}$,

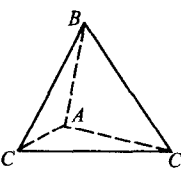
就会使求解过程复杂化。可见合理猜想应是一种重要的探究方法。事实上,本题可以理解为探求使首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和成立的一个充分条件,答案不惟一,猜想和推理相结合,或猜想与检验相结合的方法是简捷和有效的。

◆**考题 11** 平面几何里有勾股定理:“设 $\triangle ABC$ 中, AB 与 AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”, 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面积与底面面积间的关系, 可

以得出的正确结论是:“设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两垂直, 则 _____。”

【分析】 此题只要求得出正确结论,而不要求严格推证,因此借助于熟悉的、简单的几何图形,会给结论的得出提供有利条件。

如图,从棱长为 1 的正方体中,截出以 A 为顶点,以 AB, AC, AD 为侧棱的三棱锥 $A-BCD$, 其三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两垂直。由于它的每一个侧面都是直角边长为 1 的等腰直角三角形, 面积 C



都等于 $\frac{1}{2}$; 而底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形, 其面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

由此可知三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系是 $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$ 。

这是一个探究结论的试题,采用类比法,将平面几何中的勾股定理拓展到空间,探究一个以三棱锥的三个侧面两两垂直的位置关系为条件,导出三个侧面面积与底面面积之间的数量关系的结论。体现出类比的功能:通过对新旧知识的比较,将已有的知识拓展,得出新的知识。这一过程,从特殊情形入手,进而导出一般,是一种有效的思维途径。

◆**考题 12** 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t, s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$, 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大的原则写成如下的三角形数表:

		3		
	5		6	
9		10		12
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____

(1) 写出这个三角形数表的第四行, 第五行各数;

(2) 求 a_{100} 。

这是一个探究规律的试题,运用归纳法,从特殊到一般,探究数列 $\{a_n\}$ 各项的取值规律和三角形数表的排列规律。例 8 要求探究结论,例 9 要求探究规律,重在发现。“发现”是数学的理性思维的重要内容,发现能力是思维能力的重要内容,而类比法和归纳法是用于发现的两种基本的思维方法。熟悉并掌握这两种方法,注重发现能力的培养,在数学备考中十分重要,应予以充分的关注。

此外,还有探究符合条件的数学对象是否存在的试题,既要作出结论,又要说出理由。在存在性问题中,条件与结论的逻辑关系常常比较隐蔽,揭示这种逻辑关系的思维方向不固定,推理方法需寻找,也就提高了考查思维能力的有效性。成为数学高考的一种重要题型。

解决实际问题的能力是应用意识的一个方面,也是三种基本数学能力(逻辑思维能力、运算能力和空间想像能力)的综合体现。加大应用性试题的考查力度,也已成为数学高考试卷的重要特征之一。

【考题 13】 某海滨城市附近海面有一台风,据监测,当前台风中心位于城市(X如图)的东偏南 $\theta(\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10})$ 方向 300km 的海面 P 处,并以 20km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动.台风侵袭的范围为圆形区域,当前半径为 60km,并以 10km/h 的速度不断增大,问几小时后该城市开始受到台风的侵袭.

这是现行课程卷的文、理试卷共有的试题,此题突破了近几年数学高考的应用试题多以函数或数列作为知识工具的模式,设置常见的自然现象——台风的情景,以图形为背景,要求学生综合应用三角函数、不等式、解析几何等数学知识和方法,建立数学模型,很好地考查了综合能力.题目内容新颖,贴近生活,展现了一种动态的问题情境,随着时间的变化,台风中心 P 的位置随之变化,台风侵袭范围也在扩大,解题中必须想明白这个过程,并且建立坐标系或构造三角形转化为数学问题.本题告诉我们一个信息,对“信息处理能力”的考查愈加明朗化,要求考生具备理解新事物、把握新信息,进行数学抽象和数学建模的意识和能力.

总之,“考能力永远是高考命题的主题.”深化能力立意,突出考查能力与素质是当前命题的导向.2005 年高考数学试题仍将以数学思想方法和数学能力为重点,数学命题将在基础性、综合性、现实性的层面上,调整综合程度,通过多角度、多层次的考查功能,使之发挥区分、选拔功能.数学命题的创新将汲取新教材中的新思想和新理念,不会通过数学题的高、深、难去体现出“素质”与“创新”,2004 年的数学高考题体现了这一点.试题难度过大或过小,将会导致区分度减小,不利于优秀人才的选拔.因此 2005 年高考必定是:整体稳定、能力立意、立足基础、调整难度、努力创新,以体现高校招生改革和高考命题改革的思路.

高考数学命题既然有以上趋势和特点,这就为今后数学教学指明了方向,启示我们在 2005 年的数学复习备考中应该注意:

1. 抓好基础知识和基本技能的教学,帮助学生建构、完善他们的知识网络系统

“出活题、查基础、考能力”是高考数学命题的基本思想,夯实基础是提高能力的先决条件.因此,在教学和复习中必须将基础知识、基本技能和基本数学思想方法的学习和训练落实到位.不仅要落实到每一个知识点,更重要的是要将各个知识点融会贯通,构建知识网络,完善认知结构;不仅要训练落实高中所学的数学基础知识,而且要刻意训练落实与高中数学紧密联系的初中数学基础和高等数学内容,如数、式及其运算、函数、方程、平面几何、导数、向量、概率等.特别是平面几何,学生到高中后较少接触,只是在立体几何学习中,用到一点时才简单予以回顾,故遗忘较多.对此,可在立体几何的教学与复习中精心设计对平面几何中一些重要知识和方法的复习落实;不仅要使学生掌握知识脉络,系统基础知识,形成网络结构,而且要让学学生掌握各个“知识点”和“知识块”的“搜索引擎”与“浏览器”——记忆、思考、联想、应用的策略和方法,使之达到运用自如的程度.

要以《考试大纲》为依据,重新全面梳理重点知识与基本方法.要重视数学基础知识、基本技能与基本思想方法的训



练,通过查缺补漏,扎实打好基础,提高理性思维,增强实践意识,重视探究和应用.要在题型归类与方法优选上下功夫,特别是基础题,要求达到熟练的程度.例如最值问题无孔不入,轨迹问题方法灵活,“二次”问题综合性强,都要进行归纳梳理,做到“心中有数”,争取稳稳当当不失分,稳稳当当拿高分,要注重解题过程的不断优化,注重探究能力的继续提高.

2. 强化思维过程,努力提高思维能力

思维能力是数学能力的核心,思维品质是思维能力的本质内涵和表征.学生解决问题能力的强弱往往取决于其思维品质的优劣.2003 年高考数学题之所以难倒众多考生,就是因为依靠机械记忆、直接套用公式、凭直觉作答的题目很少,成题更少,更多的题目具有新的情境,需要根据其题设条件信息和已有的知识网络系统自觉主动地进行深入分析、判断、提取、整理、加工,来决策解题方向和解题方法,这就需要敏锐的观察、判断能力.较强的灵活的逻辑思维能力及应用逻辑方法的自觉性和优良的思维品质.因此,在教学和复习备考中,应重在向学生进行“过程”的展示,注重学生的个性发展,多让学生的思维点进行碰撞和交织,而不是简单地讲述,要注重揭示知识间的逻辑联系,在做好基本题的基础上加强变式训练,一题多解、一题多变,举一反三,从而增强学生思维的广阔性、深刻性、灵活性、批判性和敏捷性,切实提高思维能力.

3. 重视开展开放性、探索性的数学学习活动,重视实验、探索、猜想、应用,培养理性的精神

研究性学习是高中课程改革的亮点,也是高考命题改革的求新点,二者都旨在引导高中数学教学走向以培养学生独立获取知识的能力、创新精神和实践能力为重点的素质教育轨道上来.研究性、探索性试题是学生学习实力的“分水岭”或“试金石”,因此,加强研究性学习,势在必行.我们在教学和复习中除要按课程计划开好研究性学习课程外;同时应努力挖掘教材的潜力,另选取一些适宜学生研究性学习的素材,组织学生采用研究性学习的方式进行学习.在总复习和高考备考阶段,在第一轮的复习中应组织学生采用研究性方式系统归纳整理基础知识;在第二轮复习中应组织学生用研究性方式进行专题复习;在模拟训练阶段也可组织学生用研究性方式探寻、归纳、提炼解题的规律等,进而提高学生面对陌生问题情境勇于探索的创新精神和实践能力.

4. 把数学思想方法作为正式的学习内容,提高学生的数学表达能力

数学思想方法是解决数学问题的钥匙.而要求主动运用数学思想方法去解题,正是 2003 年高考数学题的主要特点.如在客观题中,有不少题需要主动运用数形结合思想画出相应图像、图形或曲线去求解;而分类讨论思想、函数方程思想、等价转化思想则贯穿于各类题型之中.因此,在教学和复习中应进一步加强数学思想方法教学和训练,引导学生在学习中积累自觉运用数学思想方法解题的经验,培养提出问题、分析问题、探究问题和解决问题的能力,发展创新意识和实践能力.

总之,高考数学复习的基本策略是立足基础,突出能力,务求实活.主要任务是增强数学素质,优化思维结构,突出数学思想方法,提高综合解题能力.

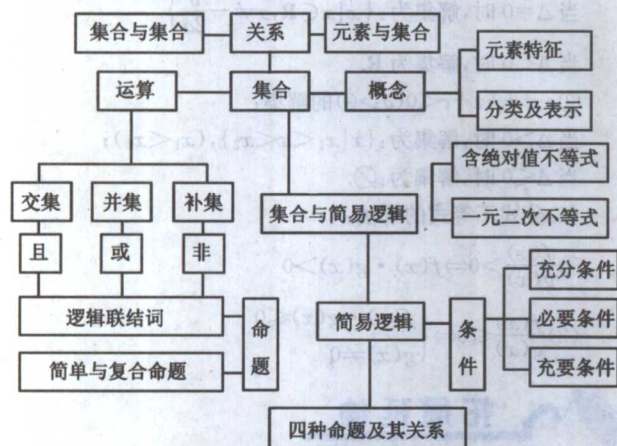


第一章 集合与简易逻辑

扎实功底

备考知识解读

知识结构



主干知识

1 集合的基本概念

(1) 集合的概念

①某些指定的对象集在一起就成为一个集合, 每个对象叫做集合的元素.

②集合中的元素有三个特性

确定性: 明确的条件可判定任一个元素是不是给定集合的元素.

互异性: 任一个集合中, 不得有重复元素.

无序性: 在一个集合里, 元素的排列与顺序无关.

(2) 集合的表示法

集合有三种表示法: 列举法、描述法、图示法.

列举法: 在大括号内把集合中的每一个元素列举出来. 如: 不大于 8 的正奇数集合, 可表示为 $\{1, 3, 5, 7\}$. 列举集合中的元素时, 与元素排列的顺序无关, 即同样的元素, 不同的顺序只视为同一个集合.

描述法: 用集合中元素的共同特征性质 $P(x)$ 描述, 并记为 $P = \{x | P(x)\}$

图示法: 用文氏图表示不同的集合.

(3) 集合与元素的关系

集合常用大写字母表示, 如 A, B 等.

集合的元素常用小写字母表示, 如 a, b 等.

元素 a 属于集合 A 可记作 $a \in A$. 元素 a 不属于集合 A 可

记作 $a \notin A$.

(4) 集合与集合的关系

①子集: 如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).

②等集: 对于集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 那么集合 A, B 叫做等集, 记作 $A = B$.

③真子集: 若 $A \subseteq B$ 且存在 $x_0 \in B$, 但 $x_0 \notin A$, 则 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$; 或者, 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则 A 是 B 的真子集.

④空集: 不含任何元素的集合叫做空集, 用 $\emptyset$ 表示, 且 $\emptyset \subseteq A$, 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subsetneq A$.

(5) 常用数集及其关系

N_+ (或 N^*) $\subsetneq N \subsetneq Z \subsetneq Q \subsetneq R \subsetneq C$
非零自然数集 自然数集 整数集 有理数集 实数集 复数集

2 集合的运算

(1) 集合的运算

①交集: 所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集. 记作 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

②并集: 所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

③补集: 设 U 是一全集, $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 的补集, 记作 $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$.

(2) 常用的运算性质及一些重要结论

① $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = B \cap A$.

② $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup B = B \cup A$.

③ $A \cap \complement_U A = \emptyset$; $A \cup \complement_U A = U$.

④ $\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$, $\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$.

⑤ 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$. 若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$.

⑥ 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

3 逻辑联结词

(1) 命题: 可以判断真假的语句叫做命题.

(2) 逻辑联结词: “或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

或: 两个简单命题至少一个成立.

且:两个简单命题都成立.

非:对一个命题的否定.

(3)简单命题与复合命题:不含逻辑联结词的命题叫简单命题;由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

(4)真值表:表示命题真假的表叫真值表.

复合命题的真假可通过下面的真值表来加以判定:

P	Q	非P	P或Q	P且Q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

4. 四种命题

(1)四种命题形式

一般地,用P和Q分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg P$ 和 $\neg Q$ 分别表示P和Q的否定.于是四种命题的形式为:

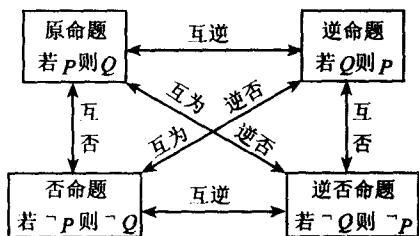
原命题:若P则Q;

逆命题:若Q则P;

否命题:若 $\neg P$ 则 $\neg Q$;

逆否命题:若 $\neg Q$ 则 $\neg P$.

(2)四种命题之间的关系



(3)等效性

原命题与它的逆否命题一定同真或同假;同样,它的逆命题与否命题也一定同真或同假.就是说:互为逆否的两个命题是等效的(等价的).

5. 充分条件、必要条件、充要条件

若 $P \Rightarrow Q$,则P是Q的充分条件,Q是P的必要条件.

若 $P \Leftrightarrow Q$,则P是Q的充要条件.

6. 含绝对值的不等式与一元二次不等式解法

(1)绝对值不等式的解法

$$\textcircled{1} |x| > a (a > 0) \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a;$$

$$\textcircled{2} |x| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a.$$

(2)一元一次不等式的解法

$$ax > b, \begin{cases} a > 0 \text{ 时, 解集为: } \{x | x > \frac{b}{a}\} \\ a < 0 \text{ 时, 解集为: } \{x | x < \frac{b}{a}\} \end{cases}$$

(3)一元二次不等式的解法.

$$\textcircled{1} ax^2 + bx + c > 0 (a > 0) \text{ 的解集:}$$

$$\text{当 } \Delta > 0 \text{ 时, 解集为: } \{x | x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}, (x_1 < x_2);$$

$$\text{当 } \Delta = 0 \text{ 时, 解集为: } \{x | x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{b}{2a}\}$$

$$\text{当 } \Delta < 0 \text{ 时, 解集为 } \mathbf{R}.$$

$$\textcircled{2} ax^2 + bx + c < 0 (a > 0) \text{ 的解集:}$$

$$\text{当 } \Delta > 0 \text{ 时, 解集为: } \{x | x_1 < x < x_2\}, (x_1 < x_2);$$

$$\text{当 } \Delta \leq 0 \text{ 时, 解集为 } \emptyset.$$

(4)分式不等式的解法:

$$\textcircled{1} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\textcircled{2} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$



拓展延伸

★重点:集合的概念及其运算、条件的充要性的判断、命题真假的判断.

★★难点:文字语言与符号语言、图形语言之间的转化和集合思想的运用,充要条件的论证、复合命题真假的判断.

★★★考点:一是考查集合的知识,即集合有关概念、关系、运算;二是考查集合语言与集合思想的运用(如函数的定义域、值域、方程不等式解集等),即考查集合作为工具在数学中的应用.简易逻辑的考查重点是命题,四种命题的关系及其真假判定,充要条件.

名师支招

经典名题剖析

基本技能题

◆**考题1** 若集合 $S = \{y | y = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$,则 $S \cap T$ 是 ()

A. S B. T C. $\emptyset$ D. 有限集

【解析】由 $S = \{y | y = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$ 得 $S = \{y | y > 0\}$,

由 $T = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$ 得 $T = \{y | y \geq -1\}$.

$\therefore S \cap T = S$.

【答案】A

◆**考题2** 设集合 $A = \{2, x, y\}$, $B = \{2x, y^2, 2\}$,且 $A = B$,

求x,y的值.

【解析】 $\because A = B, \therefore \begin{cases} x = 2x \\ y = y^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = y^2 \\ y = 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

将上述三组解代入A、B中检验, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 时违反了集合的元素的互异性,故舍去.

【答案】 所求 x, y 的值为 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

◆ 考题 3 数集 $A=\{(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $B=\{(4m \pm 1)\pi, m \in \mathbb{Z}\}$ 之间的关系是 ()

A. $A \subseteq B$ B. $A \supseteq B$ C. $A=B$ D. $A \neq B$

【解析】 法 1: 因为 $2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 表示奇数, 而 $4m \pm 1 (m \in \mathbb{Z})$ 也表示奇数, 若令 $m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 由不完全归纳法可知: $4m \pm 1 (m \in \mathbb{Z})$ 也表示全体奇数, 故选 C.

法 2: 由题意知 B、C 中必有且仅有一个正确, 由答案惟一可知 A、B 不正确, 否则 D 也正确, 与答案惟一矛盾, 同时取特殊值, 令 $m=0, 1$, 得 $4m \pm 1$ 为 $-1, 1, 3, 5$ 等, 知 C 正确.

法 3: 定义法 任取 $(2n+1)\pi \in A$, 当 $n=2m$ 时, $2n+1=4m+1 \in B$, 令 $n=2m-1$, 则有 $2n+1=2(2m-1)+1=4m-1 \in B$, $\therefore A \subseteq B$; 任取 $(4m \pm 1)\pi \in B$, 当 $n=2m$ 时, 有 $2n+1 \in A$, 又当 $n=2m-1$ 时, 有 $4m-1=2n+1 \in A$, $\therefore B \subseteq A$.

综上 $A=B$.

【答案】 C

◆ 考题 4 全集 $I=\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, 集合 $M=\{(x, y) | \frac{y-3}{x-2}=1\}$, $N=\{(x, y) | y \neq x+1\}$, 那么 $[I \setminus (M \cup N)]$ 等于 ()

A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$
C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y) | y=x+1\}$

【解析】 集合 M 是由直线 $y=x+1$ 除去点 $(2, 3)$ 后的点组成的, 集合 N 是由坐标平面上不在直线 $y=x+1$ 上的点组成的, 因此 $M \cup N$ 是由坐标平面上除去点 $(2, 3)$ 的点组成的, 它关于坐标平面上的点组成的集合 I 的补集 $[I \setminus (M \cup N)]=\{(2, 3)\}$.

【答案】 B

◆ 考题 5 解关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-a^2} < 0 (a \in \mathbb{R})$.

【解析】 分式不等式应化为整式不等式来求解.

$$\frac{x-a}{x-a^2} < 0 \Leftrightarrow (x-a) \cdot (x-a^2) < 0$$

讨论: ①若 $a=0$, 则 $a=a^2=0$, 故不等式为: $x^2 < 0$, 无解, 解集为 $\emptyset$;

②若 $a=1$, 则 $a=a^2=1$, 故不等式为 $(x-1)^2 < 0$. 无解, 解集为 $\emptyset$;

③若 $0 < a < 1$, 则 $a^2 < a$, 所以 $a^2 < x < a$, 故解集为 $\{x | a^2 < x < a\}$;

④若 $a < 0$ 或 $a > 1$, 则 $a^2 > a$, 所以 $a < x < a^2$, 故解集为 $\{x | a < x < a^2\}$.

◆ 考题 6 (1) 写出命题: 若 $x^2 > 4$, 则 $x < -2$ 的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断其真假.

(2) 在空间中, ①若四点不共面, 则这四点中任何三点都不共线; ②若两条直线没有公共点, 则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中, 逆命题为真命题的是_____.

【解析】 (1) 原命题: 若 $x^2 > 4$, 则 $x < -2$. 假

逆命题: 若 $x < -2$, 则 $x^2 > 4$. 真

否命题: 若 $x^2 \leq 4$, 则 $x \geq -2$. 真

逆否命题: 若 $x \geq -2$, 则 $x^2 \leq 4$. 假

(2) 命题①的逆命题是“若四点中任何三点都不共线, 则这四

点不共面”, 是假命题.

命题②的逆命题是“若两条直线是异面直线, 则这两条直线没有公共点”, 是真命题. 故填②

◆ 考题 7 设命题 P : 关于 x 的不等式 $a_1 x^2 + b_1 x + c_1 > 0$

与 $a_2 x^2 + b_2 x + c_2 > 0$ 的解集相同; 命题 $Q: \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, 则命

题 Q 是命题 P 的 ()

A. 充分必要条件 B. 充分但不必要条件
C. 必要但不充分条件 D. 既非充分也非必要条件

【解析】 例如 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 与 $-x^2 + 3x - 2 > 0$ 的解集不同, 从而排除 A、B. 又如 $x^2 + x + 1 > 0$ 与不等式 $x^2 + x + 3 > 0$ 解集相同, 从而排除 C.

【答案】 D

◆ 考题 8 已知 P : 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负实根; Q : 方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根. 若 P 或 Q 为真, P 且 Q 为假, 求 m 的取值范围.

【解析】 首先确定命题 P 和 Q 中的 m 取值范围, 然后根据命题的真假, 求解关于 m 的不等式组.

$$P: \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ m > 0 \end{cases}, \text{解得 } m > 2.$$

$$Q: \Delta = 16(m-2)^2 - 16 = 16(m^2 - 4m + 3) < 0$$

$$\text{解得 } 1 < m < 3.$$

$\therefore P$ 或 Q 为真, P 且 Q 为假

$\therefore P$ 为真, Q 为假, 或 P 为假, Q 为真.

$$\text{即 } \begin{cases} m > 2 \\ m \leq 1 \text{ 或 } m \geq 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m \leq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}.$$

$$\text{解得 } m \geq 3, \text{ 或 } 1 < m \leq 2.$$

【答案】 m 的取值范围是 $m \geq 3$ 或 $1 < m \leq 2$

◆ 考题 9 设实系数一元二次方程 $ax^2 + 2bx + 1 = 0$, $mx^2 + 2nx + 1 = 0$. 已知由其系数 a, bn, m 三数构成等差数列, 求证: 上述两方程中至少有一个方程有实根.

【解析】 假设两个方程均无实根.

$$\text{则 } \Delta_1 = 4b^2 - 4a < 0 \text{ 且 } \Delta_2 = 4n^2 - 4m < 0.$$

$$\therefore a > b^2 \text{ 且 } m > n^2$$

$$\therefore a + m > b^2 + n^2 \geq 2bn.$$

与题设 a, bn, m 三数成等差数列即 $a + m = 2bn$ 相矛盾, 因此假设不成立, 故原命题正确.

◆ 考题 10 已知抛物线 $C: y = -x^2 + mx - 1$, 点 $A(3, 0), B(0, 3)$, 求抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件.

【解析】 将线段 AB 的方程 $x + y = 3 (0 \leq x \leq 3)$ 代入 $y = -x^2 + mx - 1$, 得: $x^2 - (m+1)x + 4 = 0$.

抛物线 C 与线段 AB 有两个不同的交点, 等价于 $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$ 在 $[0, 3]$ 内有两个不同的实根, 其充要条件是

$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 16 > 0 \\ 0 < \frac{1}{2}(m+1) < 3 \\ f(0) \geq 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases}$$

解之得: $3 < m \leq \frac{10}{3}$, 故所求的充要条件为 $3 < m \leq \frac{10}{3}$.

【答案】 抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件是 $3 < m \leq \frac{10}{3}$.



综合提升题

◆考题 1 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{N}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

A. $M=N$ B. $M \subseteq N$ C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

【考查要点】 本题考查实数、集合的基本知识.

【解题思路】 可采取列举集合的元素或分析集合元素的属性来解决.

【解析过程】

解法 1: 列举两个集合元素:

$$M = \{\dots, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

$$N = \{\dots, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\}$$

可见, $M \subseteq N$, 选 B.

解法 2: 在 M 中, $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}$.

在 N 中, $x = \frac{k+2}{4}$.

显然, 由于 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $2k+1$ 表示奇数, 而 $k+2$ 表示整数, $2k+1$ 所取实数个数少于 $k+2$ 所取实数的个数.

$\therefore M \subseteq N$ 故应选 B

【答案】 B

【点评】 本题解答关键是弄清集合 $\{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 的构成. 此题小巧玲珑, 富于思考, 活而不难.

◆考题 2 含有三个实数的集合可表示为集合 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 求 $a^{2003} + b^{2004}$.

【考查要点】 本小题考查集合相等定义和集合元素的特征.

【解题思路】 从集合相等及集合元素的特征入手.

【解析过程】 由集合元素的确定性及集合相等, 得

$$\{a, \frac{b}{a}, 1\} = \{a^2, a+b, 0\} \quad ①$$

从而有 $0 \in \{a, \frac{b}{a}, 1\}$

$\because a \neq 0, \therefore \frac{b}{a} = 0, b = 0$ 代入①得

$$\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\} \quad ②$$

由②易知 $a^2 = 1$, 即 $a = \pm 1$.

当 $a = 1$ 时, 与集合的互异性不符, 从而 $a = -1, b = 0$, 故 $a^{2003} + b^{2004} = -1$.

【答案】 $a^{2003} + b^{2004} = -1$

【点评】 此题如果不注意特殊元素 0, 需转化为方程组求解, 比较繁杂, 因此要抓住集合元素的特征, 以简化解题过程.

◆考题 3 已知 $A = \{x | \frac{x+1}{x-3} < 0\}$, $B = \{x | ax^2 - x + b \geq 0\}$,

且 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$, 求实数 a 与 b 的值.

【考查要点】 考查集合的运算与解不等式的基本知识的综合运用.

【解题思路】 对于以不等式的解出现的两个无限数集, 借助于数轴可形象直观地反映它们间的关系, 从而理解 A 与 B 是两个互补的集合.

【解析过程】 由 $\frac{x+1}{x-3} < 0$ 得 $-1 < x < 3$.

$$\therefore A = \{x | -1 < x < 3\}$$

又因为 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$, 所以集合 A 与 B 是两个互补的集合, 故 $B = \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\}$

由已知有 $ax^2 - x + b = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$ 比较系数得

$$\begin{cases} -1 = -2a \\ b = -3a \end{cases}$$

【答案】 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

【点评】 深刻挖掘全集、补集的概念, 明确集合 A 与 B 之间的关系是解题的关键.

◆考题 4 关于实数 x 的不等式 $|x - \frac{1}{2}(a+1)| \leq \frac{1}{2}(a-1)^2$ 与 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$ (其中 $a \in \mathbb{R}$) 的解集依次为 A 与 B , 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围.

【考查要点】 考查集合的关系及一元二次不等式、含绝对值不等式的解法.

【解题思路】 先求出 A, B , 再考虑 $A \subseteq B$, 求 a 的取值范围.

【解析过程】 由 $|x - \frac{1}{2}(a+1)| \leq \frac{1}{2}(a-1)^2$ 得

$$-\frac{1}{2}(a-1)^2 \leq x - \frac{1}{2}(a+1) \leq \frac{1}{2}(a-1)^2,$$

$$\therefore A = \{x | 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$$

由 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$ 可得 $(x-2)[x-(3a+1)] \leq 0$

当 $3a+1 \geq 2$, 即 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, 得 $B = \{x | 2 \leq x \leq 3a+1\}$.

当 $3a+1 < 2$, 即 $a < \frac{1}{3}$ 时, 得 $B = \{x | 3a+1 \leq x \leq 2\}$.

综上, 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, 若 $A \subseteq B$, 应满足 $\begin{cases} 2 \leq 2a \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1 \end{cases}$ 解得 $1 \leq a \leq 3$.

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, 若 $A \subseteq B$, 应满足

$$3a+1 \leq 2a \leq a^2+1 \leq 2, \text{ 得 } a = -1.$$

【答案】 a 的取值范围是 $\{a | 1 \leq a \leq 3 \text{ 或 } a = -1\}$.

【点评】 此例由 $A \subseteq B$ 知 A 是 B 的子集, 由数轴画图易知分类讨论标准.

◆考题 5 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + mx - y + 2 = 0\}$ 和 $B = \{(x, y) | x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$, 如果 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

【考查要求】 本题考查集合, 一元二次方程根的分布, 以及数形结合思想的应用能力.

【解题思路】 若目光总是停留在集合这一狭窄的知识范围内, 此题的思维方向是很难找到的. 事实上, 它的实际背景是: “抛物线 $x^2 + mx - y + 2 = 0$ 与线段 $x - y + 1 = 0 (0 \leq x \leq 2)$ 有

公共点,求实数 m 的取值范围。”

【解析过程】 由 $\begin{cases} x^2+mx-y+2=0 \\ x-y+1=0(0 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 得 $x^2+(m-1)x+1=0$ ①

因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 所以方程①在区间 $[0, 2]$ 上至少有一个实数解。

首先,由 $\Delta=(m-1)^2-4 \geq 0$, 得 $m \geq 3$ 或 $m \leq -1$ 。

当 $m \geq 3$ 时,由 $x_1+x_2=-(m-1) < 0$ 及 $x_1 \cdot x_2=1$ 知,方程①只有负根,不符合要求;

当 $m \leq -1$ 时,由 $x_1+x_2=-(m-1) > 0$ 及 $x_1 \cdot x_2=1 > 0$ 知,方程①有两个互为倒数的正根,故必有一根在区间 $[0, 1]$ 内,从而方程①至少有一个根在区间 $[0, 2]$ 内。

【答案】 m 的取值范围是 $(-\infty, -1]$ 。

【点评】 上述解法应用了数形结合的思想。若注意到抛物线 $x^2+mx-y+2=0$ 与线段 $x-y+1=0(0 \leq x \leq 2)$ 的公共点在线段上,此题也可以利用公共点内分线段的比 λ 的取值范围建立关于 m 的不等式来解。

◆考题 6 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, $a, b \in \mathbb{R}$, 对命题“若 $a+b \geq 0$, 则 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$ ”。

(1) 写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2) 写出其逆否命题,判断其真假,并证明你的结论。

【考查要点】 考查命题的形式关系。

【解题思路】 (1) 可采用反证法来证(2)考虑命题的等效性。

【解析过程】 (1) 逆命题是:若 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$, 则 $a+b \geq 0$ 。

它是真命题,可用反证法证明它:

假设 $a+b < 0$, 则 $a < -b, b < -a$

因为 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 则 $f(a) < f(-b), f(b) < f(-a)$ 。

所以 $f(a)+f(b) < f(-a)+f(-b)$, 与已知条件矛盾, 所以逆命题为真。

(2) 逆否命题是:若 $f(a)+f(b) < f(-a)+f(-b)$, 则 $a+b < 0$ 。

它是真命题,可证明原命题真来证明它。

因为 $a+b \geq 0$, 所以 $a \geq -b, b \geq -a$ 。

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore f(a) \geq f(-b), f(b) \geq f(-a)$

$\therefore f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$, 所以逆否命题为真。

【点评】 原命题与其逆否命题为等价命题, 往往可以判断其中一个的真假, 即可判断出另一命题的真假。

◆考题 7 已知 $P: |1-\frac{x-1}{3}| \leq 2, Q: x^2-2x+1-m^2 \leq 0$

($m > 0$), 若 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充分而不必要条件, 求实数 m 的取值范围。

【考查要点】 综合考查复合命题及充分条件、必要条件的知识及运用。

【解题思路】 根据已知条件先写出 $\neg P$ 和 $\neg Q$, 然后由 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ 但 $\neg Q \not\Rightarrow \neg P$, 求得 m 的取值范围。

【解析过程】 由 $|1-\frac{x-1}{3}| \leq 2$ 得 $-2 \leq x \leq 10$, 所以 $\neg P: A = \{x | x > 10 \text{ 或 } x < -2\}$

由 $x^2-2x+1-m^2 \leq 0$ 得 $1-m \leq x \leq 1+m$ ($m > 0$)

所以 $\neg Q: B = \{x | x > 1+m \text{ 或 } x < 1-m, m > 0\}$

因为 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充分而不必要条件, 所以 $A \subseteq B$

结合数轴有:

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1+m \leq 10 \text{ 解得 } 0 < m \leq 3. \\ 1-m \geq -2 \end{cases}$$

【点评】 本题是由 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充分而不必要条件, 求实数 m , 也可用它的等价命题, Q 是 P 的充分而不必要条件求实数 m 。

◆考题 8 已知 $c > 0$, 设

P : 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减。

Q : 不等式 $x+|x-2c| > 1$ 的解集为 $\mathbb{R}$ 。

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围。

【考查要点】 本小题主要考查集合、函数、不等式、绝对值等基础知识, 考查分析和判断能力。

【解题思路】 对绝对值问题从定义出发, 分类讨论, 寻求 c 的范围。

【解析过程】

解法 1: 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$

不等式 $x+|x-2c| > 1$ 的解集为 $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒大于 1。

$$\because x+|x-2c| = \begin{cases} 2x-2c, & x \geq 2c \\ 2c, & x < 2c \end{cases}$$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值为 $2c$ 。

$\therefore$ 不等式 $x+|x-2c| > 1$ 的解集为 $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2c > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}$ 。

如果 P 正确, 且 Q 不正确, 则 $0 < c \leq \frac{1}{2}$

如果 P 正确, 且 Q 正确, 则 $c \geq \frac{1}{2}$

所以 c 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ 。

解法 2: 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$, 不等式 $x+|x-2c| > 1 \Leftrightarrow |x-2c| > 1-x$ 。

记 $y_1=|x-2c|, y_2=1-x$ 。

作出 y_1, y_2 的图像。知 $2c > 1 \Rightarrow c > \frac{1}{2}$ 。

(以下同解法 1)。

解法 3: 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$ 。

不等式 $x+|x-2c| > 1 \Leftrightarrow |x-2c| > 1-x \Leftrightarrow 1-x < x-2c < x-1$ 或

$x-2c > 1-x \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}$ 或 $x > c + \frac{1}{2}$

由 $x+|x-2c| > 1$ 的解集为 $\mathbb{R}$ 得 $c > \frac{1}{2}$ 。

(以下同解法 1)

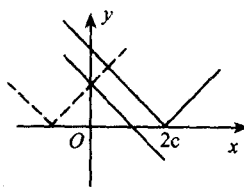
解法 4: 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$ 。

不等式 $x+|x-2c| > 1$ 的解集为 $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒大于 1 $\Leftrightarrow y_{\min} > 1$ 。

$\because x+|x-2c| \geq |x-(x-2c)| = 2c$ 。

即 $y_{\min} = 2c > 1$ 。

$\therefore c > \frac{1}{2}$



(以下同解法1)

【点评】 此题表述新颖,难度不大,但作全较难.解法1紧扣基本知识,解答过程中蕴涵着分类讨论思想和转化思路.解法2找到了几何解释,形象、直观.解法3从解不等式出发,避开了分段函数最值,转入不等式的解集去解释,表达了从另一个视角观察问题.解法4从重要的绝对值不等式性质应用去解决,干净、简捷.

◆考题9 已知两个函数 $f(x)=x^2+2ax-(1-\sqrt{3})a+\sqrt{3}$, $g(x)=x^2+2x+3a^2$, 求证无论 a 取怎样的实数,这两个函数的图像至少有一个位于 x 轴的上方.

【考查要点】 考查用反证法证题的能力.

【解题思路】 此题的正面有三种情况: $f(x)$ 的图像都在 x 轴上方, $g(x)$ 图像的顶点位于 x 轴上或 x 轴的下方; $g(x)$ 的图像都在 x 轴的上方, $f(x)$ 图像的顶点在 x 轴上或 x 轴的下方; $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像都在 x 轴上方, 而其反面只有一种情况, 故可使用反证法证明.

证明: 假设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像的顶点都在 x 轴上或 x 轴的下方, 则必有

$$\begin{cases} \Delta_1 = (2a)^2 - 4[-(1-\sqrt{3})a + \sqrt{3}] \geq 0 \\ \Delta_2 = 4 - 12a^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -1 \text{ 或 } a \geq \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a \in \emptyset$$

即不存在实数 a 使 $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0$ 同时成立, 也就是 $f(x), g(x)$ 的图像的顶点同时都在 x 轴上或 x 轴下方不可能. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像至少有一个在 x 轴的上方.

【点评】 当命题的结论是证明“至少……”“至多……”“惟一……”“存在(或不存在)……”往往利用反证法. 反证法的实质是: 假设命题的否定成立, 然后从这个结论出发, 经过推理论证与题设、公理、反设、自身之一发生矛盾即可, 从而得出命题的否定为假, 根据 P 与 $\neg P$ 真假相反, 得出原命题为真.

◆考题10 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实根 α, β , 求证: $2|a| < 4+b$ 且 $|b| < 4$ 成立的充要条件是 $|a| < 2, |\beta| < 2$.

【考查要点】 本题主要考查了充要条件的概念, 二次函数与二次方程根的分布, 不等式的性质.

【解题思路】 由求根公式求根, 再讨论根与系数的关系; 也可将二次方程根的分布与二次函数图像、性质相结合统一证明.

【解析过程】

证法一: $\because$ 二次方程有两个实根 α, β

$$\therefore \Delta = a^2 - 4b \geq 0, \alpha + \beta = -a.$$

$$\text{设 } \alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

(1) 充分性: $\because |a| < 2, |\beta| < 2 \therefore |b| = |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| < 4$

$$\text{且 } -2 < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 2, -2 < \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 2$$

$$\therefore 0 \leq \sqrt{a^2 - 4b} < 4 - a, 0 \leq \sqrt{a^2 - 4b} < 4 + a.$$

$$\text{两边平方得 } a^2 - 4b < 16 - 8a + a^2,$$

$$a^2 - 4b < 16 + 8a + a^2$$

$$\therefore -4(4+b) < 8a < 4(4+b)$$

$$\text{即 } 2|a| < 4+b$$

(2) 必要性: $\because 2|a| < 4+b$ 且 $|b| < 4$.

$$\therefore |a| < \frac{1}{2}(4+|b|) < 4, 4 \pm a > 0$$

$$\therefore \Delta = a^2 - 4b < a^2 - 4(2|a| - 4) = a^2 \pm 8a + 16 = (4 \pm a)^2,$$

$$\therefore \Delta \geq 0, \therefore \sqrt{a^2 - 4b} < 4 \pm a,$$

$$\therefore -4 < -a - \sqrt{a^2 - 4b} \leq -a + \sqrt{a^2 - 4b} < 4.$$

$$-2 < a \leq \beta < 2$$

$$\text{即 } |a| < 2, |\beta| < 2.$$

证法二: 设二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 它的两根均在区间 $(-2, 2)$ 内的充要条件是:

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ \Delta = a^2 - 4b \geq 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4+b > 2a & ① \\ 4+b > -2a & ② \\ a^2 \geq 4b & ③ \\ -2 < -\frac{a}{2} < 2 & ④ \end{cases}$$

由①②可得 $2|a| < 4+b$.

$$\therefore 4+b > 2|a| \geq 0, \therefore b > -4.$$

$$\text{由③, ④得 } b \leq \frac{a^2}{4} < 4 \therefore |b| < 4$$

$$\therefore 2|a| < 4+b \text{ 且 } |b| < 4 \text{ 成立的充要条件是 } |a| < 2, |\beta| < 2.$$

【点评】 关于充要条件的命题, 首先分清谁是条件, 谁是结论, 然后再进行证明.

失误防范

1. 在复习中首先把握基础性知识, 深刻理解基本知识点、基本数学思想和基本数学方法. 重点掌握集合、充分条件与必要条件的概念和运算方法. 要真正掌握数形结合思想——用文氏图解题.

2. 因为涉及本章知识点的高考题, 既有小型综合题, 也有大型综合题, 所以在复习中, 第一要掌握小型综合题型, 如集合与映射, 集合与不等式, 集合与方程等知识的综合; 充分条件与必要条件与三角、立几、解几中的知识点的结合等. 第二对有一定难度的大型综合题型进行有针对性的训练和强化. 这样才能对这部分内容深刻理解, 灵活运用.

目标冲刺

创新预测演练



本科线冲刺

一、选择题

1. 设集合 $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } |x| \leq 5\}$, 则 $A \cup B$ 中的元素个数是 ()
A. 11 B. 10 C. 16 D. 15
2. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N , 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 已知集合 $M = \{x | x = 2^y, y \in \mathbb{R}\}$, $N = \{x | x = y^2, y \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
A. $\{4, 2\}$ B. $\{(4, 2)\}$ C. N D. M
4. 已知集合 $A = \{x | x^2 = a^2, a \in \mathbb{R}^+\}$, 集合 $B = \{x | nx = a\}$, $B \subseteq A$, 则 n 的取值集合是 ()
A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
5. 若不等式 $|ax + 2| < 6$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于 ()
A. 8 B. 2 C. -4 D. -8
6. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + q < 0\}$ 满足 $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 则 p, q 满足 ()
A. $2p + q + 4 = 0$ B. $p + q + 5 = 0$
C. $p + q = 0$ D. $p - q = 0$
7. 下列四个命题: (1)“若 $x + y = 0$, 则 x, y 互为相反数”的否命题; (2)“若 a 和 b 都是偶数, 则 $a + b$ 是偶数”的否命题; (3)“若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ ”的逆否命题; (4)已知 a, b, c, d 是实数, “若 $a = b, c = d$, 则 $a + c = b + d$ ”的逆命题. 其中真命题的个数是 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
8. 已知复合命题: “ P 或 Q ”为真, “ $\neg P$ ”为假, 则必有 ()
A. P 真, Q 假 B. P 假, Q 真
C. P 真, Q 可能真也可能假 D. P 真, Q 真
9. “ $a = 1$ ”是“函数 $y = \cos^2 ax - \sin^2 ax$ 的最小正周期为 π ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件
10. $x + y \neq -2$ 是 x, y 不都是 -1 的 ()
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

二、填空题

11. 若全集 $U = \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P = \{x | f(x) < 0\}$, $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P, Q 表示为 _____.
12. 若关于 x 的不等式 $a^2 - 4 + 4x - x^2 > 0$ 成立时, 不等式 $|x^2 - 4| < 1$ 成立, 则正数 a 的取值范围是 _____.

13. 若 $a > 0$, 使不等式 $|x - 4| + |x - 3| < a$ 在 $\mathbb{R}$ 上的解集不是空解, 则 a 的取值范围是 _____.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A > \angle B$ 是 $\sin A > \sin B$ 的 _____ 条件.
15. 有下列四个命题:
①“ $x \notin A$ 且 $x \notin B$ ”是“ $x \notin (A \cap B)$ ”的充分而不必要条件;
②若 $\neg P \Rightarrow \neg Q$, 则 P 是 Q 的必要条件;
③ $x \neq \pm 1$ 是 $|x| \neq 1 (x \in \mathbb{R})$ 的必要而不充分条件;
④ $(x - 1)(y - 2) = 0$ 是 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0 (x, y \in \mathbb{R})$ 的既不充分也不必要条件.
正确命题的序号是 _____.

三、解答题

16. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - bx + 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$. 求实数 a, b 的值.
17. (1)若 $\frac{c}{a} < 0$, 求证: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个异号实根;
(2)命题(1)的逆命题是什么? 它是真命题吗? 请予以证明.
18. 设 a, b 为正数. 求证: $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$ 的充要条件是: 对任意的 $x > 1$, 有 $ax + \frac{x}{x-1} > b$.



名牌线冲刺

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | y\sqrt{x} = 0\}$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $C = A \cap B$, 则 C 中元素的个数是 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
2. 定义 $M - N = \{x | x \in M \text{ 但 } x \notin N\}$. 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, 则 $B - A$ 等于 ()
A. A B. B C. $\{6\}$ D. $\{1, 4, 5\}$
3. 设 $A = \{(x, y) | |x + 1| + (y - 2)^2 = 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 A, B 两集合的关系是 ()
A. $A \supseteq B$ B. $A \subsetneq B$ C. $A \in B$ D. 以上都不对
4. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y + a \geq 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 A 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, 0)$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$
C. $[1 - \sqrt{2}, +\infty)$ D. $[\sqrt{2} - 1, +\infty)$
5. 设全集为 $\mathbb{R}$, $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $B = \{x | |x - 5| < a\}$, (a 是常数), 且 $11 \in B$, 则 ()
A. $\complement_{\mathbb{R}} A \cup B = \mathbb{R}$ B. $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \mathbb{R}$
C. $\complement_{\mathbb{R}} A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \mathbb{R}$ D. $A \cup B = \mathbb{R}$
6. 已知 $a < b < c$, $x \in \mathbb{R}$, 则 $|x - a| + |x - b| + |x - c|$ 的最小值为 ()
A. $c - a$ B. $2c - 2a$
C. $2c - a - b$ D. $b + c - 2a$