萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(五)

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

（五）

牛頓 著

鄭太朴 譯

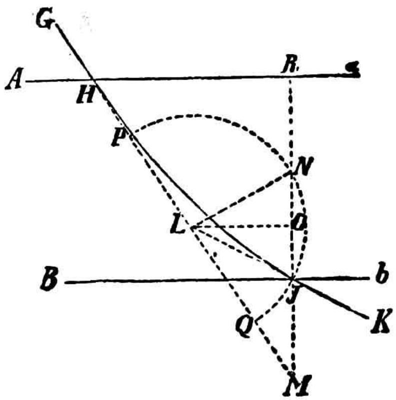
漢譯世界名著

第十四章　論傾向大物體的向心力所推動的小物體之運動

§ 141. 定理.　兩個相似的中介物爲一空間所隔開，此空間之兩旁均有平面爲其界．當一物體經過此空間時，垂直的向其一中介物被吸引或被撞擊，於此，該物體不爲其他的力所推動或阻礙．倘在距離兩平面之相等處，其吸引恆相等，則投入其一平面時投入角之正弦，與出離其他平面時出離角之正弦相比，其數爲常．

第一事．　今設 Aa, Bb 爲二平行的平面．物體由 GH 線投入第一平面，當其通過中間的空間時，該物體被吸引或被推動，所以其軌道成爲曲線 HJ 而出離時則沿着 JK 線．今於出離的平面 Bb 上作垂線 JM，與 GH 之引長相交於 M，與投入面 Aa 相交於 R；JK 之引長並與 HM 相交於 L.

今以 L 爲中心點，LJ 爲半徑作一圓，與 HM 相交於 P,Q，與 MJ 之引長相交於 N.



第一二五圖

今先假定吸引爲均勻的，則如葛里雷所證明者，HJ 曲線即爲一拋物線，此拋物線有此屬性，即，HM^2 等於一通徑乘 JM 之積，而且 HM 線於 L 被平分.

今於 MN 上作垂線 LO，則即有

$$MO=OR,$$

而因 $$NO=OJ,$$

即有 $$MN=RJ.$$

但 RJ 爲已知常數，故 MN 亦必如此，

而 $$MN\cdot MJ:P\cdot MJ=MN\cdot MJ:HM^2 \quad (1)$$

亦然.

然 $$MN\cdot MJ=PM\cdot MQ$$

$$=(LM+PL)(LM-PL)$$

$$=LM^2-PL^2,$$

或 $$MN\cdot MJ=LM^2-JL^2 \quad (2),$$

故 $$LM^2-LJ^2:HM^2$$ 爲常數。

因 $HM^2=4\cdot LM^2$, 故 $HM^2:LM^2$ 亦是如此，而經組合後

$$LM^2-LJ^2:LM^2$$

或 $$JL^2:LM^2$$

亦即 $$JL:LM$$ 亦爲常數。(3)

在 LMJ 三角形內有

$$\sin LMR:\sin LJR=LJ:LM \quad (4),$$

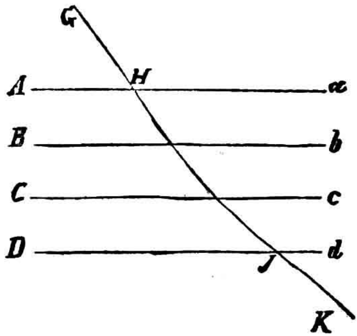
故此式前端之比爲常數；然 LMR 即爲投入角而 LRJ 則爲出離角，故如定理所明。

第二事. 物體繼續通過若干爲平行面所界的空間

$$AabB,\ BbcC,$$ 等等，

並被一力所推動，此力在各個空間之內部爲一致

的，但在不同的空間內則互異．按上所證明者，可知投入第一平面 Aa 時投入角之正弦與出離第二平面 Bb 時出離角之正弦相比，其數爲常．這裏的第二個正弦，同時亦即爲投入第二平面時投入角之正弦，故其與出離第三平面 Cc 時出離角之正弦相比，亦爲常數；如此可類推至於無限．經組合後可知投入第一平面時投入角之正弦與出離最後平面時出離角之正弦相比，亦爲常數．



第一二六圖

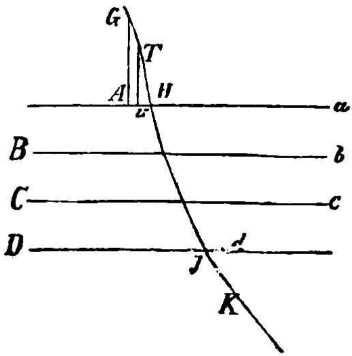
今將平面間之相互距離減小，將其數增加至於無限，使吸引的作用可按一某定律成爲連續．如是，投入第一平面時投入角之正弦與出離最後平面時出離角之正弦相比，亦仍爲常數．此即所欲證者．

§ 142. 定理. 在同樣的假定下,物體投入前之速度與出離後之速度相比，如出離角之正弦與投入角之正弦相比.

今設

$AH=Jd,$

並作 AG, dK 二垂線，與投入線及出離線 GH, JK 相交於 G 及 K. 在 GH 上取



第一二七圖

$TH=JK,$

再作 Tv 線垂於 Aa 平面上.按定律系 2, 可將物體之運動析成爲二,其一與 Aa, Bb 等相垂直,其他則與之相平行.吸引力之作用在垂直的方向內,故與平行的方向內之運動無關,而在此運動方面,物體於等時間內沿此項平行線所經過之空間相等;而此項空間則在 AG 線, H 點以及 dK 線, J 點之中間.所以在等時間內,其所作的線爲

GH 及 JK.

在投入以前之速度與出離以後者相比,

如 $$GH : JK$$

$$= GH : TH$$

$$= AH : vH$$

$$= Jd : vH,$$

而因 $JK = TH$, 如

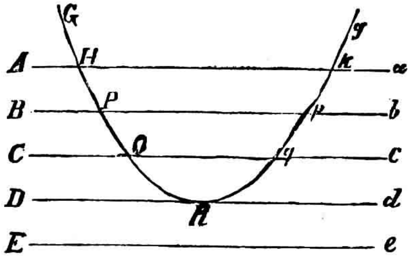
$$\frac{Jd}{JK} : \frac{vH}{TH},$$

此即是,如出離角之正弦與投入角之正弦相比.此即所欲證者.

§ 143. 定理. 在同樣的假定下,倘投入前之運動較之以後爲速,則物體最後必被反射出來,而反射角等於投入角.

試設想物體仍如前在平行面 Aa, Bb, Cc 等之間作成抛物線的弧,今設 $HP, PQ, QR,$ 等爲此項弧.又設投入線 GH 對於 Aa 平面之傾斜如是,能使投入角之正弦與圓之半徑（與之相當的）相比,如投入正弦與出離 Dd 平面時之出離正弦相

比.既如此,則出離正弦與半徑相等,而角本身即爲一直角,故出離線與 Dd 平面相合.物體在此平面內達到 R 點,而因出離線與此



第一二八圖

相合,故物體不能再向 Ee 平面進行.在出離線 Rd 上前進亦爲不可能者,因爲此物體恆向投入的中介物被吸引.所以此物體即在 Cc, Dd 平面之間轉灣,作成拋物線的弧 QRq, 其主要頂點在 R. 此弧與 Cc 平面之二交角,即 Q 處的與 q 處的,相等,而當物體經過 qp, ph, 等諸弧(此項弧與 QP, Ph 等諸弧相合)時,其與其他平面在 p,h 等處相交之角亦等於以前 P,H, 等處之角,及至 h 處即以相等的傾斜出離.

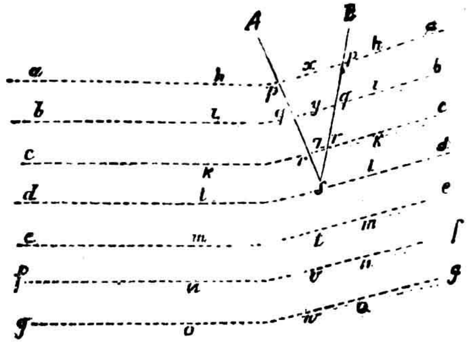
今設想 Aa, Bb, Cc, Dd, Ee 等中間之空間減至無限小,其數增至無限多,則吸引力之作用即按

照一某種定律而成爲連續的，出離角與投入角亦仍保持其相等。

此即所欲證者。

§ 144. 附註. 光之反射及屈折與此處所論者頗有相似處；如司奈爾 (*Snellius*) 所發見，前者方面之正割，其比恆爲一定，因而其正弦之比亦爲常數，此則爲笛卡爾 (*Cartesius*) 所證明者. 至於光之傳達亦爲有時間的，由太陽達到地球須經 7^m 或 8^m 時間，此則近來由木星方面的現象所可證知者，天文學者曾作觀察證明之. 在空氣中的光線，當其接近黑暗或透明物體之邊而經過時，能沿此物體灣曲，好像後者能吸引之一樣(此種現象，格利馬地 *Grimaldi* 曾於由小孔中透入光線至暗室內時發見，我自己亦曾經驗過). 在這些光線中，祇有其最接近物體者，其被灣曲特甚，好像其被吸引亦特甚一樣；此亦我自己所屢屢觀察過者. 距離較遠的光線，其灣曲即小，其更遠者則向其他面而於此構成三顏色圖.

圖中 s 爲刀之口或一楔子 AsB 之口，$gowog$, $fnvnf$, $dlsld$, 爲光線，在刀處灣曲成爲弧，并隨其距離之大小而較多或較少灣曲．因此項灣曲係在



第一二九圖

刀外空氣中發生，故透入刀的光線本身，當其未與刀接觸時，亦必已在空氣中灣曲了．倘投入玻璃時，亦必如此．從可知光之屈折，不在投入點發生，而爲一種連續的漸屈，一部分在空氣中未與玻璃接觸時已屈，一部分（倘我沒有錯誤）在玻璃內屈折；在圖中

$$ckzkc,\ biyib,\ ahxha$$

諸線方面，其投入點爲 r, q, p, 此項線在 k 與 z, i

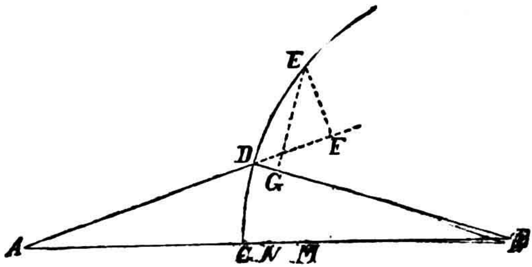
與 y, h 與 x 之間已灣曲.

因爲光之傳達與小物體之前進中間有類似處，故爲光學上的應用起見，可增加入以下諸定理，於此，我對於該項放射線之性質（爲物體或非物體）幷無所主張，祇假定物體之軌道與光線甚相似而已.

§ 145. 問題. 假定投入任何面時投入角之正弦與其出離角之正弦相比，其數爲常，而且物體軌道在該面之附近發生灣曲時係在一極短的空間內，此空間可視爲一點. 今欲求一面，其影響能使一切由一已知處所陸續出發的物體，向一其他已知的處所收聚.

今設 A 爲一處所，諸小物體由此出發分散，B 則爲應向之收斂的處所，CDE 爲一曲線，將此按 AB 軸旋轉時即可得所求之面. 又設 D,E 爲該曲線上之任意點，EF, EG 則爲物體之軌道 AD, DB 上之垂線. 今設 D 點與 E 點相接近，則 DF 與 DG 之最後比，將與投入正弦與出離正弦之比

相等.因此, AD 之增加與 BD 之減小,其比爲常數;故如於 AB 軸上任取一點 C, 使曲線經過此點,並使 CM 與 CN 相比與前相等,則可以 A, B



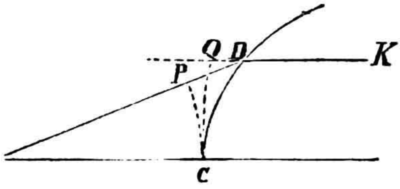
第一三〇圖

爲中心點, AM, BN 爲半徑作二圓,相交於 D. 如是, D 點即在所求之曲線 CDE 內而可由此以決定曲線.

系 1. 倘使 A 或 B 一回遠至無限,一回達到 C 之不同部分,則即可得一切圖形,如笛卡爾於其光學及幾何學內研究折光時所已敘過者. 因爲他極注重其求法而且將其祕而不宣,故特於此補明之.

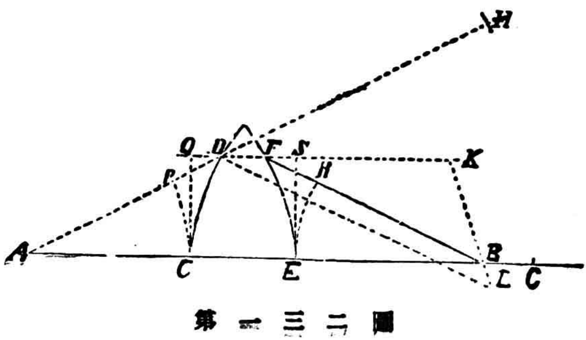
系 2. 倘一物體沿 AD 線投於 CD 面上,再沿

一其他線 DK 出離,並設想由 C 出發作曲線 CP, CQ, 各與 AD, DK 相垂直,則 PD, QD 之增加,因而 PD, QD 本身,其比均如投入正弦與出離正弦之比;反之亦然。



第一三一圖

§146. 問題。 在同樣的假定下,試設想於 AB 軸作一有規則或不規則的面 CD, 能吸引物體,而且由 A 出發的物體須經過之。今欲求一其他能吸引的面 EF, 其影響能使該項物體均向一固定的處所 B 收聚。



第一三二圖

AB 線與第一面相交於 C, 與第二面交於 E, D 則為任意所取的點. 今假定投入正弦與第一面之出離正弦相比, 以及出離正弦與第二面之投入正弦相比,如

$$M:N \quad (1).$$

試將 AB 引長至 G, 使

$$BG:CE=M-N:N \quad (2),$$

又將 AD 引長至 H, 使

$$AH=AG \quad (3),$$

並將 DF 引長至 K, 使

$$DK:DH=N:M \quad (4).$$

再作 BK 線, 以 D 為中心, DH 為半徑作一圓, 與 KB 之引長相交於 L, 引

$$BF \text{ 與 } DL \text{ 相平行} \quad (5)$$

如是則 F 即為 EF 曲線上之點, 而將此曲線按 AB 軸旋轉時, 即可得所求之面.

試設想 CP 與 AD, CQ 及 ES 與 FD, ER 與 BF 相垂直, 則

$$QS=CE \quad (6),$$

而 $$PD:QD=M:N,$$

故按(4)

$$PD:QD=DL:DK,$$

$$PD:QD=FB:FK \quad (7).$$

由此可知

$$PD:QD=DL-FB:DK-FK$$

$$=PH-PD-FB:DF$$

$$=PH-PD-FB:FQ-QD,$$

$$PD:QD=PH-FB:FQ \quad (8).$$

而因 $$PH=CG,\ QS=CE,$$

$$PD:QD=CE+BE+BG-BF:CE-FS$$

$$=CE+BG-FR:CE-FS.$$

但 $$CE+BG:CE=M:N,$$

故 $$CE+BG-RF:CE-FS=CE+BG:CE$$

$$=M:N,$$

$$FR:FS=M:N \quad (9).$$

按 § 145 系 2, 可知 EF 面能使沿 DF 向其

投入的物體，於 FR 上向 B 進行．此即所欲證者．

§ 147. 附註． 用同法可進而求三個或多個面．但在光學方面的應用上，恆以球形的圖爲適用．倘用二片球形的玻璃，其間含有水者，以構造望遠鏡之對物鏡，則由水之屈折，可將玻璃外面的屈折差失儘量的改正．這樣的對物鏡較之橢圓的及雙曲線的爲好，不僅因其易於製造，亦且因其能將玻璃軸之外的光線束較正確的屈折．

但因不同的光線之屈折性亦不同，故光學儀器終不能用球形或其他圖形來改至於完美．倘無法將由此所得的差失改正，則一切改正其餘差失的努力均將落空．