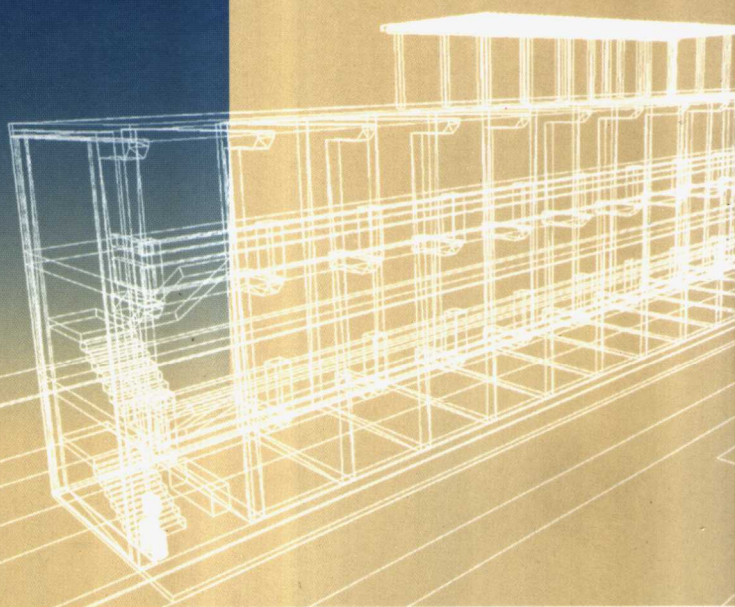


安徽省高等学校省级规划教材
——土木工程专业系列教材

计算结构力学

JISUAN JIEGOU LIXUE

◎ 千 洪 主编



合肥工业大学出版社

0342

G073

0342

G073

安徽省高等学校省级规划教材

——土木工程专业系列教材

计算结构力学

干洪 主编



合肥工业大学出版社

958838-42

内 容 提 要

《计算结构力学》是安徽省高等学校省级规划教材——土木工程专业系列教材中的一册。其主要内容有:绪论(有限单元法的基本概念,单元定位向量及程序设计);功能原理简介;坐标变换简介;一般杆件单元刚度矩阵的建立及程序设计;结构刚度矩阵的形成及程序设计;荷载向量的形成及程序设计;解线形代数方程组的消元分解法及程序设计;结构内力和反力的计算及程序设计;实用结构分析(主要技巧、实现手段与程序设计);结构分析的特征值问题简介;结构动力分析及程序设计;结构稳定性分析及程序设计;弹性力学平面问题简介及程序设计。程序设计方面采用“滚雪球”方式由浅入深,内容循序渐进;FORTRAN程序模块化优越性得到充分发挥,便于学习掌握。书中提供了大量的程序算例,对程序设计和上机练习具有较高的参考价值。

本书是土木工程专业的教学用书(结构分析特征值以后的内容可酌情选用),可作为力学、结构及其它相近专业的教学参考用书,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算结构力学/干洪主编. —合肥市:合肥工业大学出版社,2004.8

(土木工程专业系列教材)安徽省高等学校省级规划教材

ISBN 7-81093-132-6

I. 计… II. 干… III. 计算力学—结构力学—高等学校—教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 077753 号

计算结构力学

主编:干洪 责任编辑:陈淮民 特约编辑:陈玲

出 版 合肥工业大学出版社

地 址 合肥市屯溪路 193 号

邮 编 230009

电 话 总编室:0551-2903038

发行部:0551-2903198

网 址 www.hfutpress.com.cn

E-mail press@hfutpress.com.cn

版 次 2004 年 10 月第 1 版

2004 年 10 月第 1 次印刷

开 本 787×1092 1/16

印 张 13.5

字 数 329 千字

发 行 全国新华书店

印 刷 合肥现代印务有限公司

ISBN 7-81093-132-6/O·15

定价:20.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

序 言

随着电子技术的飞速发展,电子计算机已在各个领域得到了广泛的应用。同时,工程结构设计和理论研究也步入了一个崭新的时代,这就要求工程技术人员和研究人员必须熟练掌握计算机,具备计算结构分析的能力。“计算结构力学”正是适应这种需要而不断发展,现已成为高等院校工程结构类和力学类各专业重要的必修课程。

“计算结构力学”是土木工程专业应用性较强的技术基础课程,是“结构力学”在计算机应用方面的发展,亦是现代结构分析的基础。“计算结构力学”的教学体系建立在结构力学、计算数学、计算机应用这三个二级学科的基础上,属于交叉学科的课程。安徽建筑工业学院是国内较早开设这门课程的院校之一。但当时课程体系很大程度上局限于“有限单元法”的基础理论介绍,即便是在“结构力学”的计算机应用方面,由于条件限制也很难在教学过程中完全得以实现。在教学改革方面,经过作者和课程组同事十多年的艰苦努力,“计算结构力学”的课程教学于1998年获得安徽省优秀教学成果二等奖;同年由作者自编(合编)的《计算结构力学(讲义)》、《结构动力特征分析与程序设计(讲义)》相继在我院投入使用。这不仅推广了教学成果,弥补了没有统编教材的不足,自此也初步形成了我院“计算结构力学”课程的教学体系与特色。

教育要面向现代化,面向世界,面向未来,高等工科院校承担着培养新一代工程技术人员的艰巨任务。作为土木工程及其他工程结构类专业最具现代化教学内容之一的“计算结构力学”课程,确实应进一步改革传统的课程内容与教学体系。教育应以人为本,在教育思想上引入与此相适应的新思维,在教学过程中注重学生的个性发展,在课程内容上引入促进学生创新思维和实践能力的新技术,这样才能真正把课程教学体系从知识本体、智力本体、技能本体转到注重促进人的全面发展方面,这应是新世纪在教育思想、教育观念转变方面最重要的内容之一。近年来我们课程建设的重点是:进一步确立适应21世纪人才培养的课程内容与教学体系;明确“计算结构力学”课程的开设目的及其对于现代结构分析与工程应用方面的重要意义;运用结构矩阵分析原理迅速掌握工程结构分析方法,在程序设计与计算机应用方面适应工程科技的迅速发展;注重学生实践能力和创新能力的培养等。上述课程建设的具体内涵近年来在教学效果上得到了较为完美的体现。比如学生利用大作业解决各类工程实际问题,真正提高了实践能力;在教学过程中利用程序设计充分激发了学生的个性发展和创新能力;学生可以自己编制程序解决毕业设计中结构分析问题;在毕业论文中采用计算结构分析创造性地完成课题任务,其中不乏公开发表的学术论文等。当然,进一步完成上述课程建设的内涵要求也正是编写本书的目的。

笔者从事本课程教学已届十载,加上前述两本讲义的使用更是为本书的编写奠定了基础,积累了经验。本书的重要特色是对于结构分析每个环节的内容介绍均设置程序设计大作业,内容介绍完毕则完整的结构分析程序便可经各环节的程序设计“滚雪球”而成,模块概念清晰,程序设计过程简单易学且可根据个人情况留有发挥空间。最后,再根据笔者多年的课题研究介绍一些实用结构分析程序设计方法和实现技巧方面的内容,所形成的一套静、动力综合分析程序(PST-DY),可对六种类型的杆件结构进行静动力综合分析(含稳定性分析)。此外,书中还介绍了弹性力学平面问题及程序设计,可供有关专业选用。程序设计部分采用FORTRAN77和FOR-

TRAN90 两种版本编写而成,全部内容讲授约需 50 学时,另外还需 30 学时的上机。

本书主要内容有:计算结构力学与有限单元法的基本概念、单元定位向量及程序设计;功能原理及其应用简介;坐标变换,其中着重介绍旋转变换的概念;一般杆件单元刚度矩阵的建立及程序设计;直接刚度法形成结构刚度矩阵及程序设计,荷载向量的形成及程序设计;解线形代数方程组的消元分解法及程序设计;结构内力和反力的计算及程序设计;实用结构分析程序设计的主要技巧、实现手段及完整的结构静力分析软件,此软件可对六种类型的结构进行计算;结构分析中特征值问题的介绍,结构动力分析及程序设计,结构稳定性分析及程序设计;弹性力学平面问题简介及程序设计。全书内容循序渐进,程序设计模块化,简单易学便于掌握。

笔者在此要感谢参加本书编写工作的我院土木工程系苏少卿副教授、张运涛讲师和陶明霞助教三位同志。苏少卿同志负责完成本书弹性力学平面问题程序设计的调试工作,以及本书程序 FORTRAN90 版本的移植和部分程序的注释工作,张运涛同志负责完成本书初稿的编目、一校和部分特征值问题的算例工作,陶明霞同志负责本书的绘图及部分算例工作,他们卓有成效的努力为本书的最终脱稿做出了贡献。另外,我院学报编辑部的陈玲同志参与了本书的编校工作,在此一并致谢。

由于笔者水平有限,加上完稿仓促,书中可能存在不少缺点甚至错误,请大家不吝批评指正,本人表示衷心感谢。

编 者

2004 年 8 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 有限单元法简介	2
1.3 结点位移和结点力	4
1.4 基本未知量	5
1.5 轴力杆单元刚度方程(桁式单元)	7
1.6 刚度法的基本概念	10
1.7 坐标系与单元定位向量	12
1.8 形成结构单元定位向量的程序设计	13
第 2 章 功能原理	20
2.1 概述	20
2.2 虚位移原理	20
2.3 虚应变能与外力虚功	22
2.4 虚位移原理的应用	23
2.5 虚力原理简介	25
2.6 能量原理	26
2.7 互等定理	27
第 3 章 坐标变换	30
3.1 概述	30
3.2 坐标变换的几何概念	30
3.3 逆步变换	33
3.4 向量的旋转变换	35
3.5 矩阵的旋转变换	37
第 4 章 单元刚度矩阵	39
4.1 概述	39
4.2 平面刚架的单元刚度矩阵(静力法推导)	40
4.3 应用能量原理推导轴力杆单元的刚度矩阵(积分法)	41
4.4 应用能量原理推导梁单元的刚度矩阵(积分法)	44

第 5 章 结构刚度矩阵与荷载向量	50
5.1 概述	50
5.2 应用能量原理形成结构刚度矩阵	50
5.3 按单元定位向量装配结构刚度矩阵	52
5.4 形成结构刚度矩阵的直接刚度法	53
5.5 $[K]$ 的特性	61
5.6 等效结点力	61
5.7 形成荷载向量的程序设计	64
第 6 章 线性代数方程组的求解	72
6.1 Gauss 消元法	72
6.2 消元分解法的矩阵表示	75
6.3 线性代数方程组求解的程序设计	76
6.4 带状矩阵的存贮与求解	79
6.5 解的误差分析	81
第 7 章 结构内力和反力的计算	84
7.1 杆端位移所引起的杆端力和支座反力	84
7.2 单元荷载所引起的杆端力和支座反力	84
7.3 局部坐标系下杆端力的计算	87
7.4 单元任意截面的内力计算及内力图绘制	88
7.5 求解结构内力和反力的程序设计	94
第 8 章 实用结构静力分析程序设计	97
8.1 程序设计的基本概念与要点	97
8.2 结构分析程序设计的框图设计	97
8.3 单元定位向量的主线作用	99
8.4 变量与数组设计	101
8.5 数据传递与动态数组设计	102
8.6 程序设计	105
第 9 章 结构分析中的特征值问题	131
9.1 概述	131
9.2 杆单元弯曲振动的刚度方程	131
9.3 杆单元纵向振动的刚度方程	134
9.4 质量矩阵 $[M]$	134
9.5 动力荷载列阵 $\{R\}$	137

9.6 刚架振动的整体分析及其特征值问题	137
9.7 压杆的刚度方程	139
9.8 刚架稳定性的整体分析及其特征值问题	140
第 10 章 结构振动、稳定性分析及程序设计	143
10.1 矩阵特征值问题的一些基本性质及其求解	143
10.2 矩阵迭代法	145
10.3 矩阵变换法	151
10.4 子空间迭代法	158
10.5 结构振动分析程序设计	163
10.6 结构稳定性分析程序设计	167
第 11 章 弹性力学平面问题	186
11.1 平面应力状态基本关系式	186
11.2 三角形单元	188
11.3 矩形单元	191
11.4 程序设计及变量与数组说明	192
11.5 算例	196
11.6 源程序(平面三角形单元 FORTRAN77 格式)	197
参考文献	207

第1章 绪 论

1.1 概 述

计算结构力学是利用电子计算机通过离散模型的数值分析完成结构分析的一门交叉学科,是工程科技进步和计算机技术高度发展条件下形成与发展起来的一门新兴学科。

随着经济建设的发展和科学技术的进步,工程实践中所出现的结构分析问题愈来愈大型化和复杂化,一是结构的数量常常很多;二是结构分析的对象甚为复杂;三是结构分析的深度更大、要求更高。例如,过去一般仅分析简化的平面体系,现在则要考虑结构空间分析;过去抗震计算一般仅作上部结构分析,现在则要考虑地基、基础与上部结构的共同作用等;四是结构分析的含义也更为广泛,它不再局限于被动地对结构进行力学分析,现在则要扩展到主动地对结构体系进行优化设计。上述现象是传统的结构力学分析方法与手段难以相适应的,其中最主要的因素便是极其庞大的计算工作量。于是人们便寻求与社会发展相适应的结构分析方法,计算结构力学由此应运而生。

计算结构力学从广义上来说包括三方面的内容。主要内容是利用计算机进行结构的力学分析。在传统的结构力学中,采用力法或位移法分析,最后总可以将一个结构分析的力学问题归结为一组线性代数方程组的求解问题,整个运算过程可以用矩阵的形式简洁而又完全地表达,这就给我们以结构矩阵分析方面的启示。结构矩阵分析原理:就是利用矩阵代数理论来分析结构力学问题,这是一种高度统一和规格化的分析方法,其最大的特点是可进行带有普遍适用性的程序设计,从而由计算机来完成结构分析问题。因此,结构矩阵分析是计算结构力学的基础,是随着计算机的迅速发展而兴起的结构分析方法。

计算结构力学第二方面的内容是结构优化设计。随着计算机应用方面的发展,结构优化设计已从结构的构件优化设计发展到结构的形状优化,甚至结构拓扑和材料选择优化的更高层次的优化。计算结构力学第三方面的内容便是应用程序的研制。理论学习的目的在于应用,计算结构力学的功能最终还需通过应用程序来解决实际问题,所以程序设计便成为计算结构力学最重要的组成内容之一。只有适应各种工程与科技需要开发应用程序,才能使计算结构力学的功能得到充分发挥并形成生产力。

就结构力学课程体系而言,计算结构力学仍属土木、结构类专业的技术基础课程,课程开设目的主要是强化计算机在结构分析方面的应用,这是现代结构分析不可缺少的重要手段,也是专业技术适应现代化需要的重要组成部分。本课程现阶段主要研究杆件结构,以及一些简单的平面问题,可对各种类型的杆件结构进行分析。课程主要采用矩阵位移法或杆件有限元法。主要内容为采用有限单元法及矩阵代数的基本理论与基本方法,研究结构在静力条件下的平衡,以及动力和稳定性问题。要求掌握利用杆件有限元进行结构分析的全过程,并进行程序设计及计算机应用方面的训练。本课程还强调利用计算结构分析的技术手段在其他专业课程中融会贯通,借此达到专业技能的全面提高。

下面介绍结构矩阵分析的主要方法:

(1) 矩阵位移法(刚度法):以结点位移为基本未知量,建立结构的刚度方程。

(2) 矩阵力法(柔度法):结点力为基本未知量,建立结构的柔度方程。

(3) 矩阵混合法(杂交法):以部分结点位移、部分结点力为未知量,建立结构的混合法方程。

由结构力学内容可知,刚度法只需满足平衡条件,结构在荷载一定的情况下自然满足,故刚度法普遍得到使用。而柔度法要确立多余约束,建立基本结构,并满足位移协调条件,需要具体分析,故很难规范化统一编程格式,不易实现计算自动化。所以,工程计算一般采用矩阵位移法。

但在板壳问题中,所假设的位移场在某些情况下不能满足一些单元的协调性(C' 连续性问题),故混合法或柔度法仍得到运用和发展。

本课程主要介绍矩阵位移法。

在矩阵位移法中,所有的方程均采用矩阵的形式表示,所有的推导和运算均借助于矩阵代数,形式紧凑明了,方便程序设计。采用结构矩阵分析方法,并不改变结构力学的基本原理和基本假设。其中基本原理包括:平衡原理、叠加原理、变形协调原理、能量原理等。主要的基本假设有:结构的小变形假设、材料的线形行为假设(结构联结为理想联结),满足以上两个假设的结构就称为线形结构。

1.2 有限单元法简介

1.2.1 结构理想化的概念

结构理想化是一种简化手段,如同材料力学中的计算简图的概念。在结构力学中,就是假设结构为连续体,理想连接、均匀各向同性的线性结构。

经上述理想化以后,即可画出结构的计算简图,其主要特点有:

- (1) 以杆件轴线代替实际杆线;
- (2) 结构连接主要有刚结、铰接、链杆联结等;
- (3) 支座可简化为活动铰支座,固定铰支座和固定支座等。

1.2.2 有限单元法的基本思想及含义

结构矩阵分析所采用的主要方法为有限单元法,其基本思想是把整个结构看成是由有限个单元(杆件、平面、块体)所组成的集合体,各个单元由结点相互连接,这就是结构的离散化;由各单元的平衡条件建立单元刚度方程,再利用整体平衡条件,将各单元集合在一起,恢复为原结构,得到结构整体平衡方程(结构刚度方程)。

结构刚度方程形式为线性代数方程组,利用矩阵代数和数值计算方法编制成计算机程序,上机求解未知量。由此可知有限单元法的中心思想是一分一合。由于单元的个数有限,故称其为有限单元法。

1.2.3 单元的类型

单元的类型(见图 1-1)主要有:

- (1) 杆单元,见图 1-1(a);
- (2) 平面单元及板单元,见图 1-1(b);
- (3) 壳单元,见图 1-1(c);
- (4) 块体单元,见图 1-1(d)。

本课程主要研究杆系结构,称为杆系有限元。由于采用结点位移为未知量,故称为有限元位移法。在实施中,由单元的刚度方程,依各结点的集约条件,可直接形成结构刚度方程,其方法称为直接刚度法。

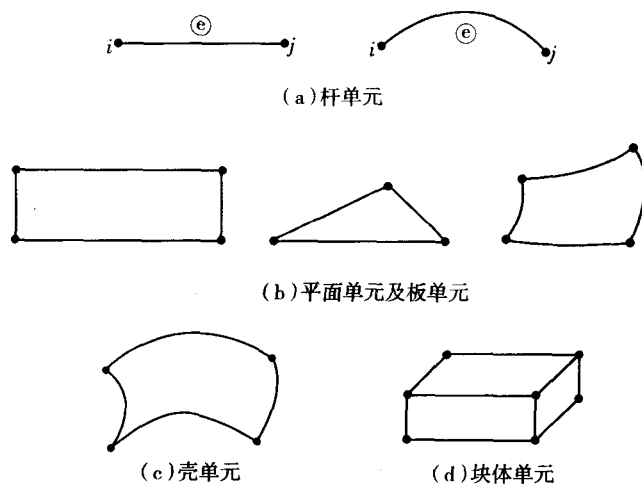
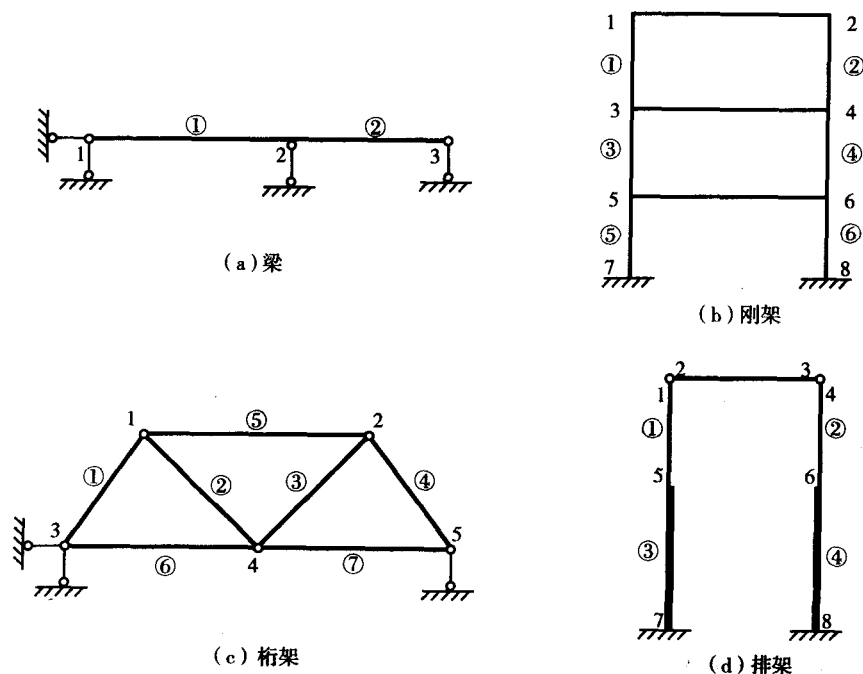


图 1-1

1.2.4 结构的离散化过程

本课程给出的程序可以对6种杆系结构(见图1-2)进行分析,这6种杆系结构分别为:梁、刚架、桁架、排架、梁桁组合结构、框排架。

无论对哪一种结构,总可以假想地将它拆开,视为有限个单杆在其端点联结,可以自然剖分,亦可以细分,这些单杆称为单元,连接点就称为结点(结点)。结构的离散化过程见图1-2。



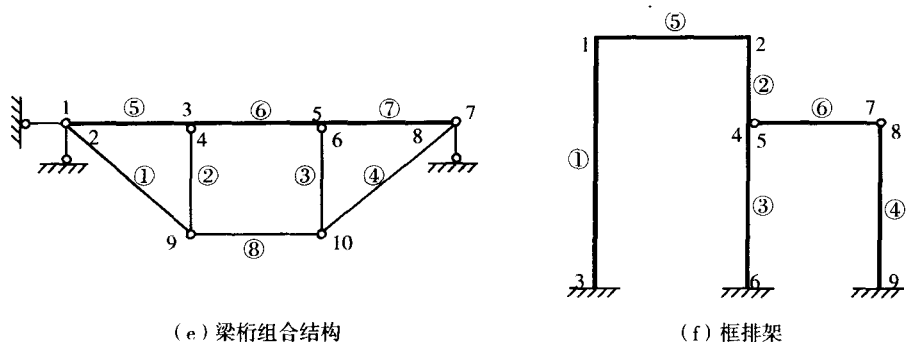


图 1-2

1.3 结点位移和结点力

1.3.1 结点位移

结点位移包括:线位移和角位移。单元两端的结点位移又称单元的杆端位移,或称其为单元结点位移。

已知杆端位移及荷载情况便可了解整个单元的变形状态,用 $\{\delta\}_i$ 表示结点 i 的结点位移列阵;用 $\{\delta\}$ 表示单元的结点位移列阵。

以下为各类结构的结点位移列阵和单元的结点位移列阵。

桁架

$$\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

连续梁

$$\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

刚架

$$\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1-3)$$

1.3.2 结点力

结点力包括力和力偶矩。

(1) 单元结点力:单元杆端力,这是结构内力,对单元而言是作用在单元两端结点上的外力。

(2) 结构结点力:由于汇交于每一结点的各单元杆端力的总和即等于该结点所受的力,故结构结点力是外力,为相应的结点荷载或结点支座的支座反力。

结点 i 的结点力列阵用 $\{F\}_i$ 表示;单元的杆端力列阵用 $\{F\}$ 表示;结构的结点力列阵用 $\{P\}$ 表示;反力用 $\{R\}$ 表示;结构的结点位移列阵用 $\{\Delta\}$ 表示。

结点位移与结点力的各个分量应相互对应,如: $\{\delta\}_i$ 与 $\{F\}_i$, $\{\Delta\}$ 与 $\{P\}$ 。

结点位移编号(或结点力编号)与结点编号有关:结点编号是人为的,现已可用程序实现结点自动编号;在进行结构分析时,首先应编好结点号。结点编号的好坏直接影响计算精度及内存占用状况,其原理是应尽量使每个单元两端结点号的差值最小。

1.4 基本未知量

1.4.1 确定基本未知量

确定结构基本未知量的方法有:

(1) 根据有限单元法的离散化要求,各个单元仅在结点处连接,因此只有结点处的力学量(结点位移,结点力)可以作为基本未知量。

(2) 由于矩阵位移法采用位移为未知量,故在有限元位移法中采用结点位移作为未知量。

(3) 因为荷载已知,此时相应的结点力向量应为已知,这对于一般结点均满足。

关于支座情况,需要进行约束处理。因为结点力包括了支座结点反力,这在通常情况下为未知。这点与上述要求不符,但由于在不考虑弹性支承情况下,有结点反力的这部分支座位移通常已知(零或已知沉降量),不需求解,可在结构刚度方程中将这一方程划去,这就是约束处理。

1.4.2 前处理法和后处理法

在直接刚度法中,支座的约束处理分为前处理法和后处理法。

(1) 前处理法:在形成结构刚度矩阵之前,也就是在建立结构刚度矩阵之前考虑到实际的约束情况,再形成结构刚度矩阵的方法。

(2) 后处理法:在形成结构刚度矩阵之前,先不考虑支承情况,而在形成结构刚度矩阵之后,再根据约束情况对结构刚度矩阵进行修改的方法。

很明显,前处理法可减少存贮单元,具体的约束处理如下:

(1) 对于一般结点(指无约束的结点)的未知量编号,再对结构的全部结点编号后即可确定;

(2) 对于整个结构的全部未知量编号,还需要加上支座的未知量编号。

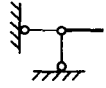
这实际上就是要对结构的支座约束进行处理,这是结构分析中非常重要的环节。

对支座进行约束处理,可通过约束特征数来实现。支座约束特征数表示支座结点的某一位移未知量有无刚性约束的人为赋值数字。

有约束的约束特征数为 1,无约束的约束特征数为 0。

显然,有约束则无位移未知量,无约束则有位移未知量。对于采用刚架单元的平面杆系结构,其支座约束特征数见表 1-1。

表 1-1

支座	u	v	θ	支座	u	v	θ
	1	1	1		1	0	1
	0	1	1		0	1	0
	1	1	0				

例题 1-1 试对图 1-2 的结构进行结点未知量编号。

解：(1) 图 1-2(a) 为连续梁，先编好结点号和单元号。本结构不考虑横梁的轴向变形，即结构在水平方向的位移是无效的，位移未知量可填 -1。这时每个结点仅有一个转角未知量。本例题中为了帮助读者更好地理解解题思路，将结点未知量编号列表，见表 1-2。在以后的例题中就不再列表，而直接写在结点号旁边的方框内。

表 1-2

结点号	未知量编号
1	0 0 1
2	-1 0 2
3	-1 0 3

(2) 图 1-2(b) 为三层刚架，在图中已编好结点号和单元号，这时每个结点有水平位移、竖向位移和转角共 3 个位移未知量，见表 1-3。

如果不考虑横梁的轴向变形，则每层只有一个水平位移未知量，这时在同一层的水平位移只编一个号，则结点未知量编号见表 1-4。

表 1-3

结点号	未知量编号	结点号	未知量编号
1	1 2 3	5	13 14 15
2	4 5 6	6	16 17 18
3	7 8 9	7	0 0 0
4	10 11 12	8	0 0 0

表 1-4

结点号	未知量编号	结点号	未知量编号
1	1 2 3	5	11 12 13
2	1 4 5	6	11 14 15
3	6 7 8	7	0 0 0
4	6 9 10	8	0 0 0

(3) 图 1-2(c) 为桁架，在图中已编好结点号和单元号，这时每个结点有水平和竖向两个位移未知量，则结点未知量编号见表 1-5。

(4) 图 1-2(d) 为排架，在图中已编好结点号和单元号，排架横梁的拉压刚度为无穷大，则结点未知量编号见表 1-6。

表 1-5

结点号	未知量编号
1	1 2 -1
2	3 4 -1
3	0 0 -1
4	5 6 -1
5	7 0 -1

表 1-6

结点号	未知量编号	结点号	未知量编号
1	1 2 3	6	9 10 11
2	1 2 -1	7	0 0 0
3	1 4 -1	8	0 0 0
4	1 4 5		
5	6 7 8		

(5) 图 1-2(e) 为梁桁组合结构(梁的轴向变形不考虑),在图中已编好结点号和单元号。结点未知量编号见表 1-7。

(6) 图 1-2(f) 为框排架结构,在图中已编好结点号和单元号。结点未知量编号见表 1-8。

表 1-7

结点号	未知量编号	结点号	未知量编号
1	0 0 1	6	-1 4 -1
2	0 0 -1	7	-1 0 6
3	-1 2 3	8	-1 0 -1
4	-1 2 -1	9	7 8 -1
5	-1 4 5	10	9 10 -1

表 1-8

结点号	未知量编号	结点号	未知量编号
1	1 2 3	6	0 0 0
2	4 5 6	7	7 10 -1
3	0 0 0	8	7 10 11
4	7 8 9	9	0 0 0
5	7 8 -1		

1.5 轴力杆单元刚度方程(桁式单元)

首先介绍坐标系的概念。

(1) 结构坐标系:又称整体坐标系。

(2) 自身坐标系:又称局部坐标系,是建立在单元上,由始结点至终结点,用“/”做记号。

由结构力学位移法可知,杆单元的平衡方程可写成

$$[k]\{\delta\} = \{F\} \quad (1-4)$$

的形式,其中

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

$[k]$ 为 2×2 阶的单元刚度矩阵,现予详细介绍。

单元刚度系数 k_{ij} 的定义:仅当 $\delta_j = 1$ 时在 i 处所需施加的力。取单元两端轴向位移为未知量 u_1, u_2 , 见图 1-3(a)。

当 $u_1 = 1, u_2 = 0$ 时,由刚度系数的定义可得

$$F_{11} = k_{11}u_1 = k_{11}, \quad F_{21} = k_{21}u_1 = k_{21} \quad (1-6)$$

当 $u_1 = 0, u_2 = 1$ 时,则

$$F_{22} = k_{22}u_2 = k_{22}, \quad F_{12} = k_{12}u_2 = k_{12} \quad (1-7)$$

由材料力学可知

$$F = \frac{EA}{l} \delta$$

当 δ 分别为 u_1, u_2 , 且为任意时; 由图 1-3(b), 可得

$$F_{11} = \frac{EA}{l} u_1$$

由单元平衡条件可得

$$F_{21} = -F_{11} = -\frac{EA}{l} u_1$$

由图 1-3(c), 可得

$$F_{22} = \frac{EA}{l} u_2$$

由单元平衡条件可得

$$F_{12} = -F_{22} = -\frac{EA}{l} u_2$$

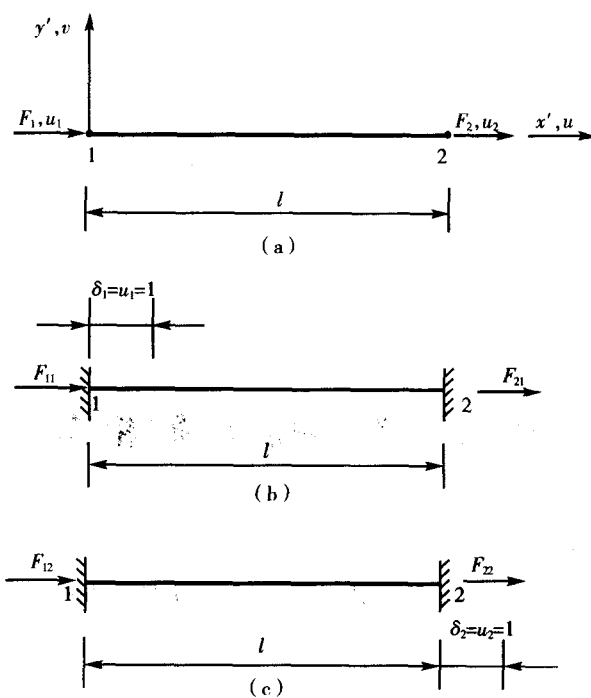


图 1-3

所以, 在图 1-3 中, 图(a) = 图(b) + 图(c), 则

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{11} + F_{12} \\ F_{21} + F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l} u_1 - \frac{EA}{l} u_2 \\ -\frac{EA}{l} u_1 + \frac{EA}{l} u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1-8)$$

即

$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

这里

$$[k] = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix}$$

也可由刚度系数的定义直接得到

$$k_{11} = F_{11} = \frac{EA}{l}, \quad k_{12} = F_{12} = -\frac{EA}{l}, \quad k_{21} = F_{21} = -\frac{EA}{l}, \quad k_{22} = F_{22} = \frac{EA}{l}$$

当局部坐标系和整体坐标系不重合时,如竖杆、斜杆等,其刚度方程(或刚度矩阵)一般可通过坐标变换(后面再详细介绍)推导得出。下面介绍利用静力法推导杆单元在整体坐标系中的刚度方程。

杆单元每端有两个未知量(见图 1-4)

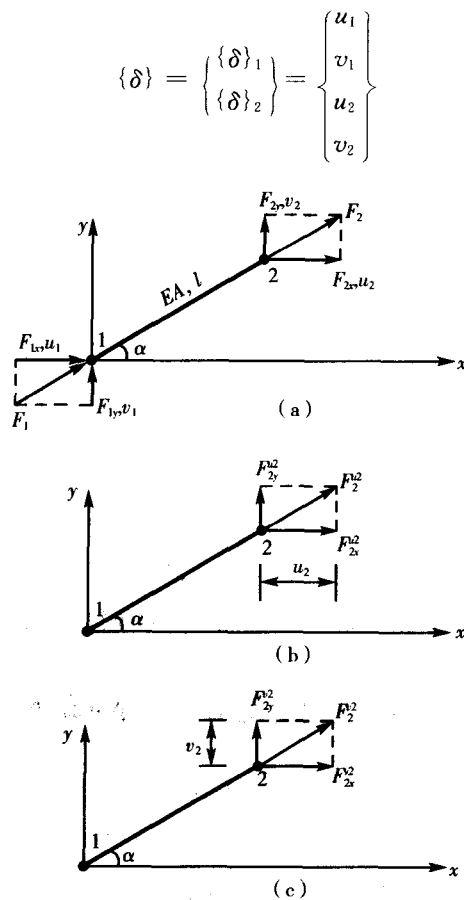


图 1-4

相应地

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix}$$

现在研究单独发生 u_2 或 v_2 时所引起的杆端力。