结构分析中的有限元法与程序设计

——用Visual C++实现

· 侯新录　编著

中国建材工业出版社

结构分析中的有限元法与程序设计

——用 Visual C++ 实现

侯新录 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

结构分析中的有限元法与程序设计/侯新录编著．
北京：中国建材工业出版社，2004.8
ISBN 7-80159-728-1

Ⅰ.结… Ⅱ.侯… Ⅲ.①有限元法－应用－建筑结构－结构分析 ②建筑结构－结构分析－程序设计
Ⅳ.TU31

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 078624 号

内 容 提 要

本书以简明、浅显的方式系统地阐述了结构分析中的有限元法基本理论和程序实现方法。全书共十章，一个附录。内容包括：第一章至第五章为线弹性静力问题的有限元法；第六章为动力问题的有限元法；第七章为材料非线性问题的有限元法；第八章为几何非线性问题的有限元法；第九章为有限元法程序设计；第十章为有限元软件技术概述和几个著名的通用有限元软件简介；附录给出了本书 Visual C++源程序全文。

本书适合作为工科大学高年级学生和研究生的教材或参考书，也可供有关工程技术人员参考。

结构分析中的有限元法与程序设计
——用 Visual C++ 实现
侯新录　编著

出版发行：中国建材工业出版社
地　　址：北京市西城区车公庄大街 6 号
邮　　编：100044
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：438 千字
版　　次：2004 年 6 月第一版
印　　次：2004 年 6 月第一次
印　　数：1～3000 册
书　　号：ISBN 7-80159-728-1/TU·390
定　　价：30.00 元

网上书店：www.ecool100.com
本书如出现印装质量问题，由我社发行部负责调换。联系电话：（010）68345931

前　言

有限元法经过40多年的发展,现已成为结构分析的标准方法。强大的分析能力是有限元法最突出的特点。它所解决的问题种类之广泛,几乎囊括了结构分析的各个方面:分析对象既可以是杆件系统,也可以是由杆、板、壳、块等多种力学性质不同的构件组成的复杂系统;分析类型既可以是静力问题,也可以是动力问题;既可以是线性的,也可以是非线性的;既可以是确定的,也可以是随机的;既可以是单一物理场,也可以是固、流耦合或热、固耦合的多物理场;无论材料、载荷、边界条件多么复杂,有限元法都能有效地加以处理。

有限元法的另一个突出特点是:对于不同类型的问题,理论推导过程以及计算步骤的高度规范和统一。这一特点不但为学习这一方法减轻了难度,也为研制大型通用有限元软件奠定了基础。

有限元法的第三个特点是:人们可以从不同的专业背景和知识起点学习和掌握它。既可以从纯数学的概念出发,按数学物理方程数值求解的角度去学习和研究它,也可以从力学的直观概念出发去理解和掌握它。

有限元法的成熟和发展打破了传统结构力学的概念体系与研究范围,催生了另一门新兴学科——计算力学的出现。有限元法是20世纪力学研究领域最重要的成果之一。随着计算机软硬件技术的发展,有限元法使传统的工程计算和设计发生了天翻地覆的变化。它已成为设计现代CAE和CAD软件的核心算法。

尽管有限元法的应用范围极其广泛,但本书不准备(事实上也不可能)面面俱到地叙述这一方法在各学科中的理论和应用,只准备就结构分析中经常遇到的几类典型问题的有限元解法进行阐述。

作者力图用一种简明而浅显的方式来叙述有限元列式的来龙去脉,以及计算机的实现方法。特别注意计算流程和实现细节的论述。凡是与公式推导无关的理论一概不提。主要的列式工具就是虚功原理。作者认为,对于绝大多数有工科背景的读者,采用这种方法是适宜的。

考虑到C++已成为目前软件开发的主流开发工具,因此本书中的源程序全部用Visual C++(后简称VC++)书写。虽然并没有完全采用VC++面向对象的特性,但作者认为,书中所给出的示例性小程序已部分地体现了面向对象的思想。只要读者把书中给出的程序读懂,加上读者有关面向对象的基础知识,则不难把它改造成为面向对象的形式,也不难把它改写为Win32或MFC项目。相信这部分内容对于学习使用VC++开发工程应用软件的读者是有帮助的。

本书包括以下内容:第一章至第五章为线弹性静力分析问题的有限元法;第六章为动力问题的有限元法;第七章和第八章为非线性问题的有限元法;第九章为有限元法程序设计;第十章为有限元软件技术概述和几个著名的通用有限元软件简介;附录给出了本书VC++源程序全文。

按上述体例编写本书对于作者还仅仅是初次尝试，限于作者的水平，书中疏漏、缺点或错误均有可能出现，敬请读者指正。

真诚感谢书后所附主要参考书目的作者，他们是本人进入这一领域的良师益友。

作　者

2004年3月

目 录

第一章　有限单元法的基本概念

1.1　有限单元法的发展简况

有限单元法，又称有限元法，是一种求解数学物理问题的数值方法。它最早起源于固体力学，后来迅速扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等与场问题有关的物理学领域。

有限单元法的解题方法，最早可追溯到 1943 年库兰特（R. Courant）在一篇研究扭转问题的论文中对里兹（Ritz）法所作的重要推广。他把杆件的横截面划分成若干个三角形区域，假设翘曲函数在各个三角形子域内近似地用线性分布函数表示，从而克服了里兹法要求整个求解域的近似解函数必须满足全部边界条件的困难。

1960 年，克劳夫（R. W. Clough）在一篇弹性力学平面问题的论文中，首次提出有限单元法这一术语。从此，有限单元法成为连续体离散化的一种标准研究方法，在工程界获得了广泛的应用。

到了 20 世纪 70 年代前后，随着计算机技术的发展，有限元法的理论和应用研究也随之空前地活跃起来。研究的内容涉及有限元法的几乎所有方面：有限元法的数学力学理论基础；单元的划分原则，形状函数的选取及协调性；有限元法所涉及的各种数值计算方法及其误差、收敛性和稳定性；有限元软件开发技术；向非结构领域的推广等。

经过 40 多年的发展，有限元法已经成为一种理论上相当成熟，应用面极为广泛的数值方法。到目前为止，有限元法已被应用于各种单一物理场的线性或非线性静、动力问题的求解，以及固体、流体、温度等相互作用的耦合场问题的求解。有限单元法的工程应用如表 1.1 所示。

表 1.1　有限单元法的工程应用

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
结构工程学、结构力学和宇航工程学	梁、板、壳结构的分析； 复杂或混杂结构的分析； 二维与三维应力分析	结构的稳定性； 结构的固有频率和振型； 线性粘弹性阻尼	应力波的传播； 结构对于非周期载荷的动态响应； 耦合热弹性力学与热粘弹性力学
土力学、基础工程学和岩石力学	二维与三维应力分析； 填筑和开挖问题； 边坡稳定性问题； 土与结构的相互作用； 坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的分析； 流体在土和岩石中的稳态渗流	土与结构组合物的固有频率和振型	土与岩石中的非定常渗流； 在可变形多孔介质中的流动-固结； 应力波在土和岩石中的传播； 土与结构的动态相互作用
热传导	固体和流体中的稳态温度分布		固体和流体中的瞬态热流
流体动力学、水利工程学和水源学	流体的势流； 流体的黏性流动； 蓄水层和多孔介质中的定常渗流； 水工结构和大坝分析	湖泊和港湾的波（固有频率和振型）； 刚性或柔性容器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究（扩展问题）； 沉积物的推移； 流体的非定常流动； 波的传播； 多孔介质和蓄水层中的非定常渗流
核工程	反应堆安全壳结构的分析； 反应堆和反应堆安全壳结构稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析； 反应堆结构的热黏弹性分析； 反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布
电磁学	二维和三维静态电磁场分析		二维和三维时变、高频电磁场分析

利用有限元软件解决工程和科学计算问题，是有限元理论应用于工程设计和科学研究实践的主要形式。由于工程设计的巨大市场需要，几十年来，有限元软件的发展是很迅速的。从解决单一学科的结构分析软件发展到解决多学科的多功能综合分析软件。其集成化、智能化、可视化和网络化的功能越来越强，成为工程技术人员和科研工作者的必备工具软件。目前，我国引进的大型有限元软件常见的有 SAP 系列（包括 SAP 5，SAP 7，SAP 84，SAP 2000 等），ADINA，MSC/NASTRAN，MSC Marc，ANSYS，ASKA 等。这些有限元软件的共同特点是：具有丰富的单元库和求解器，强大而可靠的分析功能，且很多已移植到 Windows 环境，完全的 CAD 式操作方式和强大的前后处理功能，使分析工作变得轻松和容易了。人们利用这些软件解决了很多工程建设和工业产品设计中遇到的问题，取得了巨大的经济技术效益。目前，有限元软件在有关学科，特别是在计算机技术发展的推动下，继续朝着更加方便用户以及和 CAD/CAM 技术更加紧密结合的方向发展。

1.2 有限单元法的特点

在实际工作中，人们发现，一方面许多力学问题无法求得解析解答，另一方面许多工程问题也只需要给出数值解答，于是，数值解法便应运而生。

力学中的数值解法有两大类型。其一是对微分方程边值问题直接进行近似数值计算，这一类型的代表是有限差分法；其二是在与微分方程边值问题等价的泛函变分形式上进行数值计算，这一类型的代表是有限单元法。

有限差分法的前提条件是建立问题的基本微分方程，然后将微分方程化为差分方程（代数方程）求解，这是一种数学上的近似。有限差分法能处理一些物理机理相当复杂而形状比较规则的问题，但对于几何形状不规则或者材料不均匀情况以及复杂边界条件，应用有限差分法就显得非常困难，因而有限差分法有很大的局限性。

有限单元法的基本思想是里兹（Ritz）法加分片近似。将原结构划分为许多小块（单元），用这些离散单元的集合体代替原结构，用近似函数表示单元内的真实场变量，从而给出离散模型的数值解。由于是分片近似，可采用较简单的函数作为近似函数，有较好的灵活性、适应性与通用性。当然有限单元法也有其局限性，如对于应力集中、裂缝体分析与无限域问题等的分析都存在缺陷。为此，人们又提出一些半解析方法，如有限条带法与边界元法等。

在结构分析中，从选择基本未知量的角度来看，有限单元法可分为三类：位移法、力法与混合法。其中位移法易于实现计算自动化，在有限单元法中应用范围最广。

依据单元刚度矩阵的推导方法可将有限单元法的推理途径分为直接法、变分法、加权残数法与能量平衡法。

直接法直接进行物理推理，物理概念清楚，易于理解，但只能用于研究较简单单元的特性。

变分法是有限单元法的主要理论基础之一，涉及泛函极值问题，既适用于形状简单的单元，也适用于形状复杂的单元，使有限单元法的应用扩展到类型更为广泛的工程问题，当给定的问题存在经典变分叙述时，这是最方便的方法。当给定问题的经典变分原理不知道时，须采用更为一般的方法，如加权残数法或能量平衡法来推导单元刚度矩阵。

加权残数法由问题的基本微分方程出发而不依赖于泛函。可处理已知基本微分方程却找不到泛函的问题，如流-固耦合问题，从而进一步扩大了有限单元法的应用范围。

1.3 线弹性力学的基本方程和能量原理

在讲述结构分析的有限元法之前，有必要回顾一下线弹性力学的基本方程和有关的能量原理。

1.3.1 线弹性力学的基本方程

(1)平衡方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

式中，X,Y,Z 是体积力；$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$是惯性力，于静力平衡时右端惯性力项都为零；$\rho$ 为单位体积的质量；u,v,w 为位移分量。

(2)几何方程

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\&\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

这组方程表达了弹性体内任一点的应变和位移之间的关系。

式(1.2)的 6 个应变分量之间还存在以下 6 个关系式，称作变形协调条件，它们是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\\&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

(3)物理方程、弹性矩阵

弹性体内任一点的应力和应变之间的关系，可以用矩阵表示如下

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{1.4}$$

式中

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{1.5}$$

称作应力向量；而

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{1.6}$$

称作应变向量；$[D]$称作弹性矩阵，即

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & \text{对} & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

式中，E 为弹性模量；μ 为泊松比。

(4)边界条件和初始条件

1)边界条件。分为应力边界条件、位移边界条件，或两者的混合。

应力边界条件：若物体表面处面力 $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$ 已知，则边界条件可写作

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n \\ \overline{Y}&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n \\ \overline{Z}&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

位移边界条件：若物体表面处的位移为已知，则边界条件可写作

$$u=\overline{u}, \quad v=\overline{v}, \quad w=\overline{w} \tag{1.9}$$

当物体表面上一部分面力已知取式(1.8)的形式，另一部分位移已知取式(1.9)的形式，就形成了混合边界条件。

2)初始条件。对于动力问题，还需提供如下初始条件，当 $t=0$ 时

$$\left.\begin{aligned} &u=f_1(x,y,z), \quad v=f_2(x,y,z), \quad w=f_3(x,y,z) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}=\phi_1(x,y,z), \quad \frac{\partial v}{\partial t}=\phi_2(x,y,z), \quad \frac{\partial w}{\partial t}=\phi_3(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

一个弹性力学问题的正确解答，应该满足以上式(1.1)～式(1.9)的所有方程和边界条件，对动力问题尚需满足初始条件式(1.10)。

1.3.2 线弹性力学的能量原理

(1)虚功原理

考察一变形体在外力作用下的静力平衡状态，若这一物体在另一新的力系作用下，产生了新的符合约束条件的变形及位移，称之为虚位移。所谓“虚”指该位移不是原来力系所产生的意思。这样，原来的外力及内力都要在虚位移上作功，称为虚功。虚位移以 u^*, v^*, w^* 表示，虚应变以 $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \cdots, \gamma_{xy}^*, \cdots$ 等表示。根据作用在弹性体中任一微元体上所有的力平衡时合力为零的条件，引出虚功总和为零的条件，经整理，弹性体的虚功原理可表示为

$$\iint (q_x u^* + q_y v^* + q_z w^*) \mathrm{d}S + \iiint (X u^* + Y v^* + Z w^*) \mathrm{d}V$$
$$= \iiint (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* + \tau_{zx} \gamma_{zx}^*) \mathrm{d}V \tag{1.11}$$

式中左面第一项的面积分，表示弹性体表面 S 上的表面力 q_x, q_y, q_z 所作的外力虚功，第二项表示体积力 X, Y, Z 所作的外力虚功；式中右面表示弹性体内部的内力虚功之和。该式说明，如果物体在外力作用下处于平衡状态，则作用于弹性体上的外力虚功等于内力虚功。

为应用方便，式(1.11)也可写成矩阵形式。引入以下矩阵符号

$$\{q\} = [q_x\ q_y\ q_z]^{\mathrm{T}}, \quad \{P\} = [X\ Y\ Z]^{\mathrm{T}}, \quad \{\delta^*\} = [u^*\ v^*\ z^*]^{\mathrm{T}}$$
$$\{\sigma\} = [\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]^{\mathrm{T}}, \quad \{\varepsilon^*\} = [\varepsilon_x^*\ \varepsilon_y^*\ \varepsilon_z^*\ \gamma_{xy}^*\ \gamma_{yz}^*\ \gamma_{zx}^*]^{\mathrm{T}}$$

则式(1.11)可简写为

$$\iint \{\delta^*\}^{\mathrm{T}} \{q\} \mathrm{d}S + \iiint \{\delta^*\}^{\mathrm{T}} \{P\} \mathrm{d}V = \iiint \{\varepsilon^*\}^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \mathrm{d}V \tag{1.12}$$

(2)最小势能原理

定义变形体的应变能密度为

$$\frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{1.13}$$

则总应变能为

$$U = \iiint \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\} \mathrm{d}V \tag{1.14}$$

并定义物体的总势能为

$$\Pi = U - W \tag{1.15}$$

其中

$$W = \iiint \{\delta\}^{\mathrm{T}}\{P\} \mathrm{d}V + \iint \{\delta\}^{\mathrm{T}}\{q\} \mathrm{d}S \tag{1.16}$$

式中，$\{\delta\}^{\mathrm{T}}$ 为物体某一点的位移向量；$\{P\}$，$\{q\}$ 分别为体力向量和面力向量。

最小势能原理可以表述如下：

物体在外力作用之下产生位移和变形，在所有满足几何边界条件的可能位移之中使物体达到变形和平衡状态的真实位移，应使物体的总势能 Π 取得极小值，若把 Π 看作泛函，则 Π 取极小值，相当于 Π 的一阶变分为零，用公式表示即

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \tag{1.17}$$

式(1.17)中出现了变分运算,它的运算法则类似于微分学中的微分运算,但两者在概念上完全不同,变分运算是对泛函来实施的,而微分运算实施的对象则是普通函数。所谓泛函是一种以函数为自变量的函数,即函数的函数。求解泛函极值问题的各种准则称作变分原理,是有限元法最重要的数学基础。

利用物理方程(1.4)及几何方程(1.2),可以把式(1.14)中的应变能 U 用位移函数表示,从而可以把物体总势能 Π 看作是位移函数的泛函。

1.4 里兹(Ritz)法

有限元法可以看作是里兹法的一种推广。因此,掌握里兹法的解题思路对理解有限元法是有好处的。

里兹法是一种求解泛函极值的直接法。其要点是,首先假设一组带有若干个待定参数的近似解函数,对这些近似解函数一般只要求它们是一些满足一定边界条件的连续函数,由泛函取极值时一阶变分等于零的条件,可得到一组求解待定参数的代数方程,解这组方程可得到这些待定参数,从而求得原问题的一组近似解。

用里兹法求解式(1.17)的具体步骤如下:

设满足式(1.17)的位移函数为

$$\left.\begin{aligned} u &= \overline{u}(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x,y,z) \\ v &= \overline{v}(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(x,y,z) \\ w &= \overline{w}(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} c_i w_i(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

式中,$\overline{u}(x,y,z)$,$\overline{v}(x,y,z)$和 $\overline{w}(x,y,z)$在位移边界上等于已知位移;$u_i(x,y,z)$,$v_i(x,y,z)$和 $w_i(x,y,z)$在位移边界上的值为零;a_i,b_i 和c_i 为待定参数。

将式(1.18)代入式(1.17),经整理得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

解上述联立方程组,可得 a_i,b_i,c_i($i=1,2,\cdots,n$),再将这些系数代回式(1.18)就得到位移的近似解。

显然,我们可以假设各种各样的形如式(1.18)所表示的位移函数,每一种这样假设的位移函数都称作原问题的一个试探解,也称作位移模式。位移模式的选择,在有限元分析中是很关键的一步。

【例 1.1】 用里兹法求解受均布载荷 q 作用的两端简支梁的挠度曲线。

【解】 设梁的挠度曲线为

$$v(x) = \sum_{i=1,3,5,\cdots} b_i v_i(x) = \sum_{i=1,3,5,\cdots} b_i \sin\frac{i\pi x}{l} \tag{a}$$

梁的势能泛函的表达式为

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l qv\mathrm{d}x \tag{b}$$

简支梁两端的位移条件为

$$v(0) = v(l) = 0 \tag{c}$$

显然式(a)满足上式的要求。

将式(b)代入式(a),并注意到

$$\int_0^l v_i v_j \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \dfrac{l}{2}, & i = j \end{cases}$$

然后代入条件式(1.19),得

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = EI\sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^l v''_i v''_j \mathrm{d}x - q\int_0^l v_i \mathrm{d}x = 0$$

由于 $v''_i = \dfrac{i^2\pi^2}{l^2} v_i$,从而由上式得到

$$EI\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} b_i = \frac{ql}{i\pi}(1 - \cos i\pi)$$

$$b_i = \frac{4}{l}\left(\frac{l}{i\pi}\right)^5 \frac{q}{EI}, \quad i = 1,3,5,\cdots$$

所以问题的级数解是

$$v(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI}\sum_{i=1,3,5,\cdots} \frac{1}{i^5}\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{d}$$

若取前两项,可得近似解

$$v(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{243}\sin\frac{3\pi x}{l}\right)$$

将 $x = \dfrac{1}{2}l$ 代入,得到跨中挠度为 $0.013017\dfrac{ql^4}{EI}$,与精确解$\dfrac{5ql^4}{384EI}$相比,误差为 2.74×10^{-4}。

【例 1.2】 单位厚度的矩形薄板四边受均布压力作用,如图 1.1(a)。不计体力,求位移解。

【解】 这是一个平面应力问题,利用结构和载荷有两个对称轴的特点,可以只取$\dfrac{1}{4}$进行计算,如图 1.1(b)。