奥林匹克数学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

钱展望 编著

第二册

GAO ZHONG SHU XUE JING SAI JI CHU JIAO CHENG

华中师范大学出版社

高中数学竞赛基础教程

钱展望 编著

华中师范大学出版社

奥林匹克教学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

第二册

钱展望　编著

*

华中师范大学出版社出版发行

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所经销

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张10.375　字数233　千字

1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷

ISBN 7-5622-0674-0/G·222

印数：1—30 200　定价：3.80元

出版说明

国际数学、物理、化学、计算机奥林匹克是世界上规模和影响最大的中学生学科竞赛活动。这项活动为各国表现本民族的聪明才智提供了合适的舞台，因而，受到越来越多的国家的重视。几年来，我国中学生在这项活动中获得了优异成绩，震惊中外。为了使中小学生开阔视野、启迪思维、发展才能，进一步推动中小学奥林匹克竞赛活动的普及开展，为了促进中小学教育的深化，为我国科学技术的腾飞做好准备，我社特约请一批热心奥林匹克事业的专家教授和中小学教师编写了这套《奥林匹克教学辅导丛书》。

这套丛书包括有数学、物理、化学、计算机、外语等五门学科。其中，中小学数学奥林匹克教学辅导书5册已经正式出版，物理、化学、计算机和外语等中小学奥林匹克教学辅导书也将陆续出版。本丛书的作者都是首批《中国奥林匹克高级教练员》和湖北省奥林匹克优秀教练员，他们为我国奥林匹克事业和湖北省的竞赛活动作出了富有成效的工作，这套丛书也是他们长期辅导学生经验的总结。每册均编有各层次的奥林匹克讲座和训练，内容翔实，是一套较好的奥林匹克教学辅导书，我们希望这套丛书能成为青少年学习的良师益友。

出版这样的丛书我们还是初步尝试，为了进一步充实完善，衷心希望广大读者提出建议和意见。

前　　言

近几年来，我国选手在国际数学奥林匹克中成绩日益突出，今年又以“五金一银”的成绩雄居世界第一，这极大地鼓舞了全国广大中学师生。毫无疑问，数学竞赛活动将在我国更广大的范围内旷日持久地深入开展下去。

大多数准备参加数学竞赛的中学生主要是利用课余时间来进行数学竞赛方面的训练。实践证明，为了使数学竞赛训练富有成效，对于参加竞赛必须掌握的数学知识和方法要灵活处理。有些内容要在学习中学数学教材的基础上同步加深；有些内容则应适当超前学习；对那些中学数学以外的竞赛内容则必须恰当地补充。为了保证训练的系统性，避免盲目性和随意性，编写一套合适的训练教材是必不可少的。这些年来我们在数学竞赛培训工作中，对竞赛训练的形式和训练教材的实用性作了一些探索和试验，在此基础上编写了这套《高中数学竞赛基础教程》。

这套书共分三册。第一册基本与高一数学内容对应，另外增添了“计数”一章，目的是从计数角度介绍组合的一些基本知识和方法，以便在以后各章中渗透组合思想方法。第二册与高二数学内容对应，既可与高二数学教学同步使用，也可在适当参考高二数学课本的基础上超前学习。第三册包括“初等数论”、“平面几何”、“几个典型问题”、“几个重要方法”四章，系统介绍了高中数学教材以外的竞赛内容和解答数学竞赛题的思想方法，读者可以根据自己的实际情况，在学习第一册、第二册的同时，穿插学习第三册内

容。全书内容前呼后应，在基本与高中数学教材内容同步的前提下加强了横向渗透，通过纵横联系的网络形成对高中数学竞赛内容和方法的较全面的覆盖。全书强调基础，着眼提高，力图具有较广的适用性和较强的针对性。

为了便于各地数学奥林匹克学校和数学培优班的教学，我们将全书各章都分成若干节，每一节就是一次讲座内容，每节材料略多于2小时讲授量，以便教师根据本校实际情况进行取舍。正如一位数学家所言，“学数学的最好办法是‘做数学’”。每节后我们都选编了相当数量的习题供学生练习。书中例、习题绝大多数选自国内外几十年来的优秀竞赛试题，这些题及书后解答闪耀着众多数学专家、教师和学生的智慧之光，是学习数学的极好素材。学生在理解每节内容的基础上再做后面的习题，可以获得参加各级数学竞赛所必需的数学知识、技能和方法，并使解题能力得到长足的发展。

自1978年恢复数学竞赛以来，经过数学界有识之士和广大中学数学教育工作者的努力，使得数学竞赛训练工作在各地都有了一定的基础，为早发现人才和推动数学教育作出了积极的贡献，并且赢得了各级党政部门和社会各界的支持。我们深信我国数学竞赛活动必将取得更加丰硕的成果。我们衷心希望广大有志青少年积极参加到数学竞赛活动中来，把握住机会，脱颖而出，在科学和创造的道路上健康成长，为中华崛起作出应有的贡献。

编者

1990年12月25日

目　　录

第一章 数列与数学归纳法

§1.1 等差数列与等比数列

数列的一般形式可写成a_1，a_2，…，a_n，…简记为$\{a_n\}$（有时也可添上a_0）。

数列可看作整标函数在自变量取自然数（或零）时函数值形成的序列$f(1)$，$f(2)$，…，$f(n)$，…。
因此可用研究函数的方法去研究数列。

数列的有关问题通常围绕通项a_n及前n项的和S_n展开。这里我们将要谈及的主要是两类特殊数列——等差数列和等比数列。

1. 等差数列

(1) 定义　$a_{n+1}-a_n=d$（d为常数）。

(2) 等差中项　$A=\dfrac{a+b}{2}$。

(3) 前n项的和

$$S_n=\frac{n(a_1+a_2)}{2}=na_1+\frac{(n-1)}{2}d.$$

(4) 主要性质

(i) $m+n=p+q\Longleftrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$。

(ii) $\{a_{n+k}\}$（k为常数）仍为等差数列（$n=1,2,\cdots$）。

2. 等比数列

(1) 定义　$a_{n+1}:a_n=q$（q为常数）。

(2) 等比中项　$G=\pm\sqrt{ab}$。

(3) 前n项的和　$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1)。\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1)。\end{cases}$

(4) 主要性质

(i) $m+n=p+q \Longleftrightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$。

(ii) $\{a_{n+k}\}$(k为常数)仍为等比数列($n=1,2,\cdots$)。

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S=\dfrac{a_1}{1-q}$　$(|q|<1)$。

自然数数列1, 2, …, n, …是更为特殊的等差数列，并且有如下结论：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$。　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$。

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

例1　设$\{a_n\}$为等差数列，又设方程

$$a_ix^2+2a_{i+1}x+a_{i+2}=0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots)\qquad ①$$

这里各个a_i及公差都是非零的实数。

(1) 求这些方程的公共根。

(2) 证明：若上述方程的另一根为α_i，则

$$\frac{1}{\alpha_1+1},\ \frac{1}{\alpha_2+1},\ \cdots,\ \frac{1}{\alpha_n+1},\cdots$$

成等差数列。

解　(1) 设这些方程的公共根为α，d为数列公差。依

题设有 $\begin{cases} a_i\alpha^2+2a_{i+1}\alpha+a_{i+2}=0 & ② \\ a_{i+1}\alpha^2+2a_{i+2}\alpha+a_{i+3}=0 & ③ \end{cases}$

③－②得 $(a_{i+1}-a_i)\alpha^2+2(a_{i+2}-a_{i+1})\alpha+(a_{i+3}-a_{i+2})=0$

即 $$d(\alpha^2+2\alpha+1)=0$$

$\because\ d\neq 0$， $\therefore\ \alpha^2+2\alpha+1=0$。

解之得 $\alpha=-1$，代入①知$\alpha=-1$即为所求。

（2）将$a_{i+1}=a_i+d$，$a_{i+2}=a_i+2d$代入①，因式分解得 $$(x+1)(a_ix+a_i+2d)=0$$

因$a_i\neq 0$，故方程①的另一根为$-1-\frac{2d}{a_i}$。

从而 $$\frac{1}{a_i+1}=-\frac{a_i}{2d}.$$

$$\frac{1}{a_{i+1}+1}-\frac{1}{a_i+1}=\frac{a_i-a_{i+1}}{2d}=-\frac{1}{2}\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

所以$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$是等差数列。

例2 n^2（$n\geqslant 4$）个正数排成n行n列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等，已知$a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，求$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$。

解 设第一行数列公差为d，各列数列公比为q，则第四行数列的公差是dq^3。于是可得

$$\begin{cases} a_{24} = (a_{11} + 3d)q = 1 \\ a_{42} = (a_{11} + d)q^3 = \dfrac{1}{8} \\ a_{43} = \dfrac{1}{8} + dq^3 = \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

解之得 $$a_{11} = d = q = \pm\frac{1}{2}.$$

依题设n^2个数都是正的，所以 $a_{11} = d = q = \dfrac{1}{2}$。

对于任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，有

$$a_{kk} = a_{1k}q^{k-1} = [a_{11} + (k-1)d]q^{k-1} = \frac{k}{2^k}$$

于是 $$S = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + n\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + 2\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots + (n-1)\frac{1}{2^n} + n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

两式相减后即得

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$\therefore \quad S = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{n}{2^n}$ 即为所求。

例3 设实数$a \neq 0$，数列$\{a_n\}$是首项为a，公比为$-a$的等比数列，记

$$b_n = a_n \lg|a_n| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) 求证：当$a\neq-1$时，对任意自然数n，都有

$$S_n=\frac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}(1+n+na)a^n].$$

(2) 试问：当$0<a<1$时，是否存在自然数M，使得对任意自然数n，都有$b_n\leqslant b_M$？证明你的结论。

证明 (1) 依题设，有

$$a_n=a(-a)^{n-1}=(-1)^{n-1}a^n$$

所以 $b_n=a_n\lg|a_n|=(-1)^{n-1}na^n\lg|a|(n=1,\ 2,\cdots)$

于是 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$=a\lg|a|[1-2a+3a^2+\cdots+(-1)^{n-1}na^{n-1}] \quad ①$$

$$aS_n=a\lg|a|[a-2a^2+\cdots+(-1)^{n-1}na^n] \quad ②$$

①+②得 $(1+a)S_n=a\lg|a|[1-a+a^2+\cdots+(-1)^{n-1}a^{n-1}+(-1)^{n-1}na^n]$.

$\because$ $a\neq-1$， $\therefore$ $1+a\neq0$。

$$\therefore\ S_n=\frac{a\lg|a|}{1+a}\left[\frac{1-(-a)^n}{1-(-a)}+(-1)^{n-1}na^n\right].$$

即 $$S_n=\frac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}a^n(1+n+na)].$$

(2) 依题设存在所要求的自然数M。

$\because$ $0<a<1$， $\therefore$ $\lg|a|=\lg a<0$。

当n是奇数时，$b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a<0$。

当n是偶数时，$b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a>0$。

欲求最大值项，只须考虑n为偶数的情形.对于自然数k，

$$\frac{b_{2k+2}}{b_{2k}}=\frac{(2k+2)a^2}{2k}=(1+\frac{1}{k})a^2$$

所以，当$\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{a^2}-1$时，$(1+\frac{1}{k})a^2\geqslant 1$；

当$\frac{1}{k}<\frac{1}{a^2}-1$，时$(1+\frac{1}{k})a^2<1$。

现取m为不大于$\frac{1}{a^2}-1$的最大整数。则有

$$b_{2k+2}\geqslant b_{2k}\ (k\leqslant m)\quad 或\quad b_{2k+2}<b_{2k}\ (k>m)$$

即有

$$b_2\leqslant b_4\leqslant\cdots\leqslant b_{2m+2}$$

$$b_{2m+2}>b_{2m+4}>\cdots$$

所以可取$M=2m+2$,则对任意自然数n，都有$b_n\leqslant b_M$。

例4 在公比大于1的等比数列中，最多有连续几项是在100与1000之间的整数。

解 考察等比数列a，ar，ar^2，…，ar^{n-1}。n项全是整数且$r>1$。显然r是有理数，设$r=\frac{p}{q}$ $(p>q\geqslant 1)$，p,q互质

因$ar^{n-1}=a(\frac{p}{q})^{n-1}$是整数，所以$q^{n-1}|a$，欲使$n$最大可取$p=q+1$，使

$$100\leqslant a<a\left(\frac{q+1}{q}\right)<\cdots<a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\leqslant 1000$$

如果$q\geqslant 3$，那么

$$4^{n-1}\leqslant(q+1)^{n-1}\leqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\leqslant 1000$$

此时 $n\leqslant 5$。

如果$q=1$，那么

$$100\cdot 2^{n-1}<a\cdot 2^{n-1}=a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\leqslant 1000$$

此时 $n\leqslant 4$。

如果 $q=2$，那么

$$100\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\leqslant a\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\leqslant 1000$$

此时 $n\leqslant 6$。综上 $n\leqslant 6$。

现可构造 $r=\frac{3}{2}$ 的等比数列128，192，288，432，648，972，它符合题设条件，故6为所求。

例5 设$\triangle ABC$是边长为a的正三角形，又在三边AB，BC，CA上各取一点A_1，B_1，C_1为顶点作正三角形$A_1B_1C_1$，

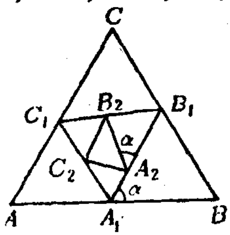

图 1-1

而$\angle B_1A_1B=\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$

然后，再依此方式顺次作出如图1-1所示的正三角形序列$A_2B_2C_2$，$A_3B_3C_3$，…，$A_nB_nC_n$，…。设$\triangle A_nB_nC_n$的面积为S_n，现要使所有新作的三角形面积的和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$等于$\triangle ABC$的面积，试确定$\alpha$的值是多少？

解 设$A_nB_n=x_n$，$x_0=AB=a$，$A_nA_{n+1}=y_n$。则如图1-2，显见 $B_nB_{n+1}=y_n$。

根据正弦定理有

$$\frac{x_{n+1}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{y_n}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad y_n=\frac{2}{\sqrt{3}}x_{n+1}\sin\alpha \qquad ①$$

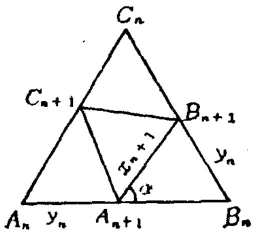

图 1-2

又 $x_n=y_n+x_{n+1}\cos\alpha+y_n\cos\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{3}{2}y_n+x_{n+1}\cos\alpha \qquad ②$$

①代入②得

$$x_n=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x_{n+1}\cdot\sin\alpha\right)+x_{n+1}\cos\alpha$$

$$=(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha)x_{n+1}$$

$$=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)x_{n+1}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{n+1}}{S_n}=\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2=\frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$$

因此，数列$\{a_n\}$是首项为S_1，公比为

$$\frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$$

的等比数列，由于$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，从而

$$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)<1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}<\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)<1.$$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}<1$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}S_{\triangle A_nB_nC_n}=\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{1-\frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}}$$

又 $$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}S_{\triangle ABC}$$

且依题设有$S_{\triangle ABC}=\sum\limits_{n}^{\infty}S_{\triangle A_nB_nC_n}$。

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}=\frac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}$$

化简得 $$\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

注意到 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{12}$。

例6 已知对任意的$n\in N$，有$a_n>0$，且$\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\right)^2$。求证：$a_n=n$。

证明 $\because\quad n\in N$，$a_n>0$，$\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\right)^2$

$$\therefore\quad a_{k+1}^3=a_{k+1}^2+2\left(\sum_{j=1}^{k}a_j\right)a_{k+1}$$

$$\therefore\quad a_{k+1}^2=a_{b+1}+2\sum_{j=1}^{k}a_j \qquad ①$$

同理 $$a_k^2=a_k+2\sum_{j=1}^{k-1}a_j \qquad ②$$

①－②得$a_{k+1}^2-a_k^2=a_{k+1}-a_k+2a_k=a_{k+1}+a_k$

$\because\quad a_{k+1}+a_k>0$，$\quad\therefore\quad a_{k+1}-a_k=1$。

又 $\because\quad a_1^3=a_1^2$，$\quad a_1>0$，$\therefore\quad a_1=1$。