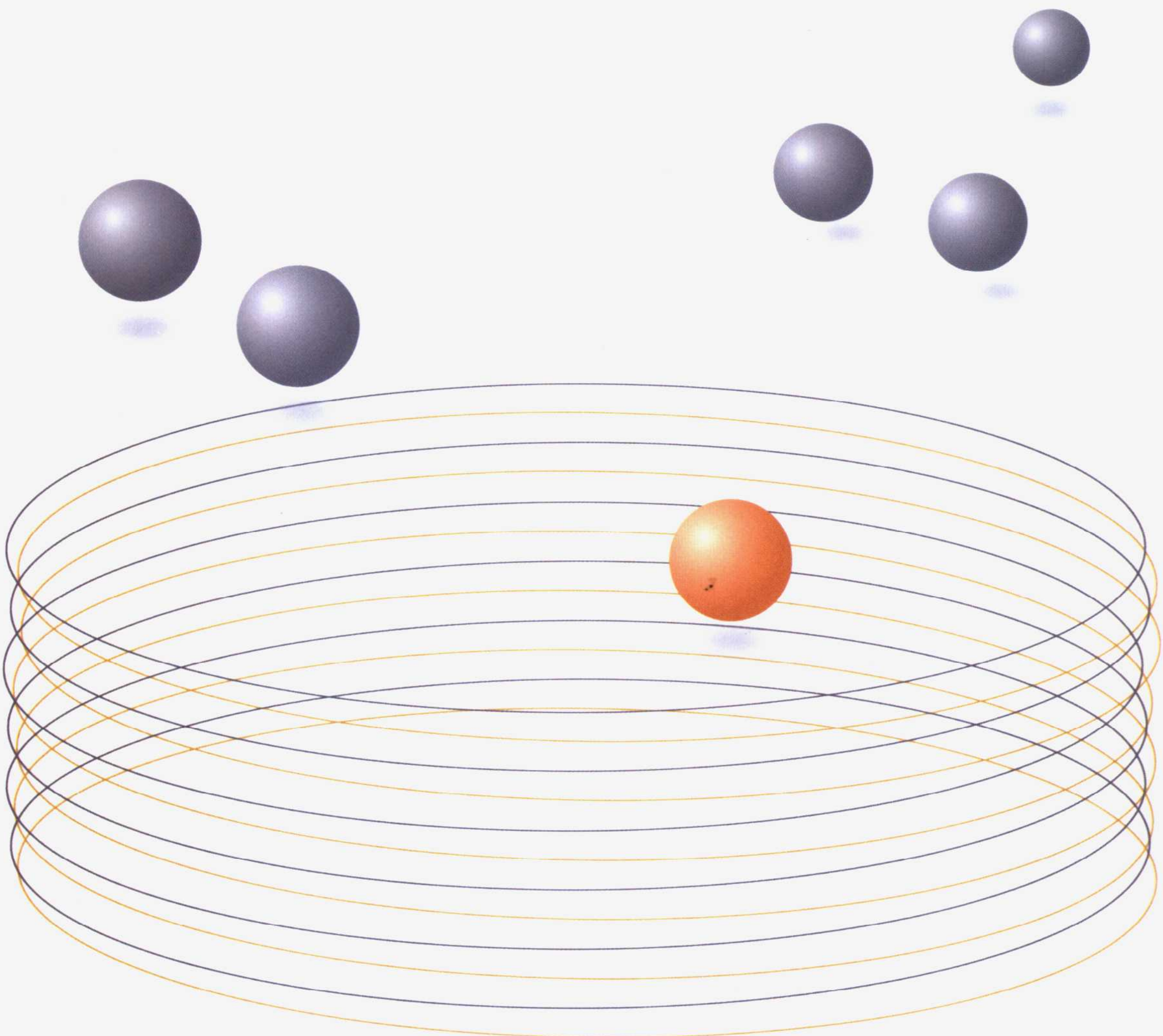
高等学校适用教材

概率论与数理统计

王志江 陶靖轩 沈鸿 编著



中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

[redacted]

高等学校适用教材

概率论与数理统计

王志江　陶靖轩　沈　鸿　编著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王志江，陶靖轩，沈鸿编著. —北京：中国计量出版社，2004

高等学校适用教材

ISBN 7-5026-2024-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①王… ②陶… ③沈… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 077189 号

内 容 提 要

本书共 10 章，内容分别是：随机事件及其概率；随机变量及其分布；数字特征；多维随机变量；大数定律与中心极限定理；抽样分布；参数估计；假设检验；相关分析与回归分析；方差分析与正交试验设计。各章后配有相应的练习题和自测题，书后附有习题参考答案及常用统计用表。

本书主要用作高等院校理工科的通用教材，也可供有关技术与管理人员学习参考。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码　100013

电话(010)64275360

E-mail jlfxb@263. net. cn

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm　16 开本　印张 13　字数 304 千字

2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

*

印数 1—5 000　定价:20.00 元

前　　言

目前，高等教育已经进入大众化阶段。为适应高等教育蓬勃发展、培养高素质的复合型人才、不断提高教学质量的要求，加强教材建设显得十分必要。

概率论与数理统计是高等院校相关专业设置的一门研究随机现象统计规律的基础课。初次接触本课程，对它的基本概念、基本理论有一个比较清晰透彻的理解是一件比较困难的事。除了教师在课堂教学中讲解外，更需要学生对这些基本概念、基本理论、基本运算反复理解与推敲。因此，本书除了每章后附有练习题外，还配有题目类型齐全的自测题。同时，本教材强调质检系统的特色，给出了较多的关于质量检测与质量管理方面的例子，以提高学生的创造性思维能力和实际应用能力。

本教材第一、二、三章由王志江编写，第四、五章由沈鸿编写，第六、七、八、九、十章由陶靖轩编写。全书由王志江统稿。在编写过程中，我们得到了许多同仁的关心与支持，也得到了中国计量出版社的大力支持，在此对他们表示衷心感谢。

书中不足之处，诚恳地希望读者批评指正，以便再版时及时纠正。谢谢！

编者

2004 年 7 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

一、随机试验与样本空间

概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学。

在自然界与人类的社会活动中，人们观察到的现象大体可以分为两种类型：

一类是可事前预言的，即在准确地重复某些事件的条件下，它的结果总是肯定的，或者根据它过去的状况，在相同条件下完全可以预言将来的发展。例如：在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；向空中抛掷一颗骰子，骰子必然会下落；在没有外力作用下，物体必然静止或做匀速直线运动；太阳每天必然从东边升起，西边落下……称这一类现象为确定性现象或必然现象。

另一类现象则不然。例如：远距离射击较小的目标，可能击中也可能击不中；掷骰子，可能出现 1 点到 6 点中的某一点；从含有 5 件次品的一批产品中抽取 3 件，取到的次品件数可能是 0，1，2，3。这类在个别试验中呈现不确定的结果，而在相同条件下大量重复试验中呈现规律性的现象称之为随机现象或偶然现象，这种规律性称为统计规律性。

在一定条件下，对自然与社会现象进行的观察或实验称为试验。在概率论中，把满足以下条件的试验称为随机试验：

(1) 试验在相同条件下是可重复的；

(2) 试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；

(3) 每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知。

为简单计，今后凡是随机试验简称试验，并记之以英文字母 E；称试验的每一个结果为样本点；称全体样本点的集合为样本空间。样本点与样本空间分别用希腊字母 ω 和 Ω 表示。

[例 1]　设试验 E_1：将一枚硬币连掷 2 次，观察两次中出现正面和反面的情况，此试验有 4 种结果，即 4 个样本点，样本空间是

$$\Omega=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

其中样本点(正，正)表示第 1，2 次均掷出正面，其余类推。

[例 2]　设试验 E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数，样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

［例 3］ 设试验 E_3：从装有三个白球(记为 1，2，3 号)与两个黑球(记为 4，5 号)的袋中任取两个球。

(1) 如果观察取出的两个球的颜色，则样本点

ω_{00}表示“取出两个白球”；

ω_{01}表示“取出一个白球与一个黑球”；

ω_{11}表示“取出两个黑球”。

于是样本空间是由三个样本点构成的集合

$$\Omega_3' = \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{11}\}$$

(2) 如果观察取出的两个球的号码，则样本点 ω_{ij} 表示“取出第 i 号与第 j 号球“($1 \leqslant i < j \leqslant 5$)，于是样本空间是由 $C_5^2 = 10$ 个样本点构成的集合

$$\Omega_3'' = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{34}, \omega_{35}, \omega_{45}\}$$

这个例子表明，试验的样本点与样本空间是根据试验的内容而确定的。

［例 4］ 设试验 E_4：为一台电视机的寿命(从开始使用到第一次维修的时间)的样本空间

$$\Omega_4 = \{\omega_x \mid x \geqslant 0\}$$

［例 5］ 设试验 E_5：观察并记录某每日中午 12 点时的气温，假设该市这一时刻的气温不会低于 4℃，也不会高于 35℃，则样本空间

$$\Omega_5 = \{\omega_x \mid 4 \leqslant x \leqslant 35\}$$

［例 6］ 设试验 E_6：观察顾客在超市购买的商品数的样本空间

$$\Omega_6 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2 \cdots\}$$

其中，ω_i 表示该顾客在超市购买的商品数。

二、随机事件

试验的结果称为事件。如果在每次试验的结果中，某事件可能发生，也可能不发生，则这一事件叫做随机事件，简称事件。如果在每次试验的结果中，事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；相反地，如果某事件一定不发生，则叫作不可能事件。

通常，用 A，B，C…表示随机事件，Ω 表示必然事件，ϕ 表示不可能事件。

［例 7］ 已知一批产品共 100 个，其中有 95 个合格品和 5 个次品。检查产品质量时，从这批产品中任意抽取 10 个来检查，则在抽出的 10 个产品中，“次品数不多于 5 个”这一事件是必然事件 Ω；“次品数多于 5 个”这一事件是不可能事件 ϕ。而事件 A 表示“没有次品”；B 表示“恰有 1 个次品”；C 表示“有 2 个或 3 个次品”；D 表示“次品数少于 4 个”等等都是随机事件。

现在我们说明随机事件与样本空间的关系：

在例 3 中，设随机事件 A 表示“取出的两个球都是白球”，则对于样本空间 Ω_3' 来说，有

$$A = \{\omega_{00}\}$$

而对于样本空间 Ω_3'' 来说，有

$$A = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$$

这表明随机事件 A 是样本空间 Ω_3'或 Ω_3''的一个子集。

由此可见，任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集，该子集中任一样本点 ω 发生时事件 A 即发生。

因为样本空间 Ω 中任一样本点 ω 发生时，必然事件 Ω 都发生，所以 Ω 是所有样本构成的集合，这就是说，必然事件 Ω 就是全集。

因为样本空间 Ω 中任一样本点 ω 发生时，不可能事件 ϕ 都不发生，所以 ϕ 不是任何样本点的集合。这就是说，不可能事件 ϕ 是空集。

应该指出，试验的任一样本点 ω 也是随机事件，今后我们将称试验的样本点为试验的基本事件。显然，基本事件就是样本空间 Ω 的仅由单个样本点构成的子集。

三、随机事件的关系及运算

既然事件是样本空间的某种子集，所以集合论中的包含、相等、并、交等概念以及集合的运算对事件都适用。那么这些关系与运算对事件而言相应赋予怎样的涵义呢?

1. 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致 B 发生，即事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B 中。此时，也称事件 A 是 B 的子集，记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B \text{（如图 1-1 所示）}$$

事件 A 是 B 的子事件，即 $B \supset A$。换一说法：如果事件 B 不发生则事件 A 也不发生。

特别地，若 $B \supset A$ 且 $A \supset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作

$$A = B$$

由于必然事件在每一次试验中都发生，所以对任何一个随机事件 A 都有 $\phi \subset A \subset \Omega$。

2. 事件的和(并)

“二事件 A 与 B 中至少有一事件发生”，这一事件叫做事件 A 与事件 B 的和(并)，记作

$$A \cup B$$

$A \cup B$ 是由 A 或 B 的所有样本点组成的集合，$A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$（如图 1-2 所示）。

类似地：“事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”，这一事件称为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件(并)，记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

[例 8]　有两门火炮同时向一个目标各射击一次，设 A 表示甲火炮击中目标，B 表示乙火炮击中目标，C 表示目标被击中，则 C 表示意味着事件 A 或 B 至少有一个发生，即

$$C = A \cup B$$

3. 事件的积(交)

“事件 A 与 B 同时发生，”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件(或交事件)记作

$$A \cap B \text{ 或 } AB \text{（如图 1-3 所示）}$$

AB 是由 A 与 B 的所有公共样本点组成的集合，如图 1-3 所示，类似地 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生。这一事件称为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件(交事件)，记作

$$A_1 A_2 \cdots A_n \text{，或 } \prod_{i=1}^{n} A_i$$

4. 互不相容事件(互斥事件)

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件(或互斥事件)。互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点(如图 1-4 所示)。即

$$AB = \phi$$

当事件 A 与事件 B 互斥时，A 与 B 的和事件 $A\cup B$，可简记作

$$A+B$$

如例 7 中，A 与 B 互斥，A 与 C 互斥，B 与 C 互斥。

5. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作

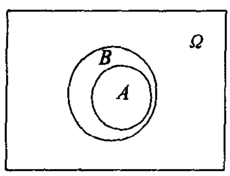
$$A-B$$

$A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合(如图 1-5 所示)。

6. 对立事件(互逆事件)

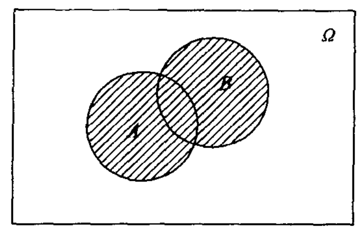
如果二事件 A 与 B 互不相容，并且它们中必有一事件发生，即二事件 A 与 B 有且仅有一事件发生，即 $A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B 对立(或互逆)。称事件 B 是事件 A 的对立事件(或互逆事件)；同样，事件 A 也是事件 B 的对立事件(或互逆事件)，记作

$$B=\overline{A} \text{ 或 } A=\overline{B}$$



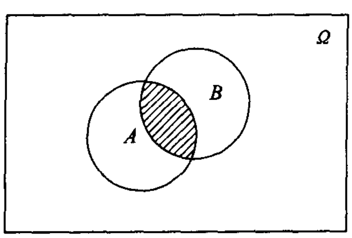
$B\supset A$

图 1-1



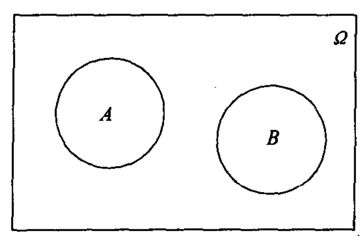
$A\cup B$

图 1-2



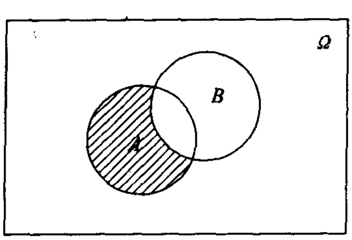
$A\cap B$

图 1-3



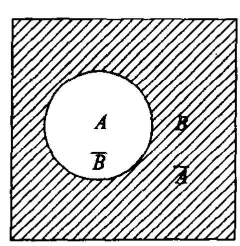
$AB=\phi$

图 1-4



$A-B$

图 1-5



$\overline{A}$

图 1-6

$\overline{A}$ 是由属于 Ω 但不属于 A 的所有样本点组成的集合，如图 1-6 所示。显然

$$\overline{\overline{A}}=A,\ A\overline{A}=\phi,\ A+\overline{A}=\Omega$$

[例 9] 抛掷一枚均匀的骰子，观察出现的点数，记 A 表示出现奇数点，则 $\overline{A}$ 表示出现偶数点。同样，若 B 表示的点数小于 3，则 $\overline{B}$ 表示出现的点数大于且等于 3。

注意：互不相容事件与对立事件是两个不同的概念：若 B 是 A 的对立事件，则有 $A\cup B=\Omega$，$AB=\phi$，故 A 与 B 一定互不相容；反之，若 A 与 B 互不相容，仅有 $AB=\phi$，不一定有 $A\cup B=\Omega$ 成立，所以，B 不一定是 A 的对立事件。

7. 完备事件组

若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，且 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组。

根据以上定义，容易得到以下事件之间的运算规律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(AB)C=A(BC)$

(3) 分配律　$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

(4) 摩根律　$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$

(5) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

[例 10] 掷一颗骰子，观察其点数，令 A 表示掷出奇数点，B 表示掷出点数不超过 3，C 表示掷出点数大于 2，D 表示掷出 5 点，则

$$A=\{1,3,5\},\ B=\{1,2,3\},\ C=\{3,4,5,6\},\ D=\{5\}$$

于是　$A\cup B=\{1,2,3,5\}$，$B\cup C=\Omega$，$AB=\{1,3\}$，$BD=\phi$

$\overline{A}=\{2,4,6\}$，$\overline{A}C=\{4,6\}$，$A-B=\{5\}$，$B-A=\{2\}$

[例 11] 某人连续购买体育彩票，令 A、B、C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖，试用 A、B、C 及其运算表示下列事件：(1)第三次未中奖；(2)第三次才中奖；(3)恰有一次中奖；(4)至少有一次中奖；(5)不止一次中奖；(6)至多中奖两次。

解：(1)$\overline{C}$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}C$

(3) $\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\cup B\cup C$

(5) $AB\cup AC\cup BC=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$

(6) $\overline{ABC}$

§1.2　概　率

一、频率和概率的统计定义

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 m/n 叫做随机事件 A 的相对频率(简称频率)记作 $W(A)$，用公式表示如下：

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

显然，任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数：$0 \leqslant W(A) \leqslant 1$。对于必然事件，在任何试验序列中，我们有 $m=n$，所以必然事件的频率恒等于 1，即

$$W(\Omega)=1$$

同理

$$W(\phi)=0$$

经验证明：当试验重复多次时，随机事件 A 的频率具有一定的稳定性。就是说，当不同的试验序列中，当试验次数充分大时随机事件的频率常在一个确定的数字附近摆动。

例如：我们来看下面的实验结果，表 1-1 中 n 表示抛硬币的次数，m 表示正面向上的次数，$W=m/n$ 表示正面向上的频率。

表 1 - 1

试验者	抛掷次数 n	出现正面的次数 m	出现正面的频率 m/n
德摩根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K · 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K · 皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

从表中可以看出，不管什么人抛掷，当试验次数逐渐增多时，出现“正面向上”的频率逐渐接近 0.5，而试验次数 n 越大，则 m/n 对 0.5 这个数值的偏差就越小，并逐渐稳定在 0.5 这个数值上。因而，数值 0.5 的确反映抛掷一枚均匀硬币时出现“正面向上”这一事件发生的可能性大小。

类似的例子可以举出很多，这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性——频率的稳定性。因为它是通过大量统计显示出来的，所以称为统计规律性。

由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性可以用一个数来表示。这个刻划随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的介于 0 与 1 之间的数叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$。这个定义通常称为概率的统计定义。

当试验次数充分大时，随机事件 A 的频率 $W(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动。在上面的例子中，我们可以认为正面向上的概率等于 0.5。

直接估计某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，仅在比较特殊的情况下才可以计算随机事件的概率。概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法：我们把多次重复试验随机事件 A 的频率 $W(A)$ 作为随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值，即当试验次数 n 充分大时，有

$$P(A) \approx W(A)=\frac{m}{n}$$

因为必然事件的频率恒等于 1，所以必然事件的概率等于一，即

$$P(\Omega)=1$$

又因为不可能事件的频率恒等于 0，所以不可能事件的概率等于零，即

$$P(\phi)=0$$

这样，任何事件 A 的概率满足不等式：

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

应该指出，随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的，而随机事件的概率却是完全客观地存在着的。在实际进行的试验中，随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现。随机事件的概率表明，试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系，它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证的统一。

还应指出，随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性，这种客观属性是与我们认识主体无关的。不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度。有时一个人说某事件“可能发生”或“很少可能发生”，这仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已。因为个别现象不是发生，就是不发生，所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的。

二、古典概型

[例 1]　掷一枚均匀的硬币，只有“正面向上”或“反面向上”两种结果，而且这两种结果出现的可能性相同，均为 1/2。

[例 2]　从 100 件同类型的产品中，任意抽取 1 件进行质量检查，则共有 100 种抽法，且每种出现的可能性大小相同，均是 1%。这两个试验的共同特点是：

(1) 每次试验中，所有可能发生的结果只有有限个，即样本空间 Ω 是个有限集，不妨记作

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

(2) 每次试验中，每一种可能结果的发生的可能性相同，即

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)\text{，其中 } A_i=\{\omega_i\}(i=1, 2, \cdots n)$$

满足这两个条件的数学模型称为古典概型。

设试验结果共 n 个基本事件 $\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，$\cdots\{\omega_n\}$，而且这些事件的发生具有相同的可能性，而事件 A 由其中的 m 个基本事件组成，则事件 A 的概率为古典概率。

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

在这里显然 $\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，$\cdots$，$\{\omega_n\}$ 构成完备事件组，用这种方法算得的概率称为古典概率。古典概率的计算主要基于排列与组合。

[例 3]　抛掷一颗匀质骰子，观察出现的点数，求出现的点数是不小于 3 的偶数的概率。

解： 设 A 表示出现的点数是不小于 3 的偶数，则基本事件总数 $n=6$，A 包含的基本事件是“出现 4 点”和“出现 6 点”即 $m=2$，故

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

[例 4]　设在 100 件产品中，有 4 件次品，其余均为正品，求：(1) 这批产品的次品率；(2) 任取 3 件，全是正品的概率；(3) 任取 3 件，刚好有 2 件正品的概率。

解： 设 A 表示次品；A_0 表示任取 3 件，全是正品；A_1 表示任取 3 件，刚好有 2 件正品。

(1) 基本事件总数 $n_1=100$，A 包含的基本事件数 $m_A=4$，故

$$P(A)=\frac{4}{100}=0.04$$

(2) 基本事件总数 $n_2=C_{100}^3$，A_0 包含的基本事件数为 C_{96}^3，故

$$P(A_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\approx 0.8836$$

(3) 基本事件总数仍为 C_{100}^3，事件 A_1 包含的基本事件数为 $C_{96}^2C_4^1$，故

$$P(A_1)=\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\approx 0.1128$$

[例 5] 用 0，1，2，3，4，5 这六个数字排成三位数，求：(1)没有相同数字的三位数的概率；(2)没有相同数字的三位偶数的概率。

解：设 A 表示没有相同数字的三位数，B 表示没有相同数字的三位偶数，则基本事件总数

$$n=5\times 6\times 6=180$$

(1) 事件 A 包含的基本事件数为 $m_A=5\times 5\times 4$，所以

$$P(A)=\frac{5\times 5\times 4}{5\times 6\times 6}=\frac{5}{9}$$

(2) 事件 B 包含的基本事件数为 $m_B=4\times 4\times 2+5\times 4=52$，所以

$$P(B)=\frac{52}{5\times 6\times 6}=\frac{13}{45}$$

[例 6] 袋内有 a 个白球与 b 个黑球。每次从袋中任取一球，取出的球不再放回去。接连取 k 个球($k\leqslant a+b$)，求第 k 次取得白球的概率。

解：由于考虑到取球的顺序，这相当于从 $a+b$ 个球中任取 k 个球的选排列，所以基本事件的总数为

$$A_{a+b}^k=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

设事件 B_k 表示第 k 次取得白球，则因为第 k 次取得的白球可以是 a 个白球中的任一个，有 a 种取法；其余 $k-1$ 个球可在前 $k-1$ 次中顺次地从 $a+b-1$ 个球中任意取出，有 A_{a+b-1}^{k-1} 种取法。所以，事件 B_k 所包含的基本事件数为

$$A_{a+b-1}^{k-1}\cdot a=(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)\cdot a$$

因此，所求概率为

$$P(B_k)=\frac{(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)\cdot a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

值得注意的是，这个结果与 k 的值无关。这表明无论哪一次取得白球的概率都是一样的，或者说，取得白球的概率与先后次序无关。

古典概率的局限性很显然：它只能用于全部实验结果为有限个，且等可能发生的情形。

三、几何概型

将古典概率中的有限性推广到无限性，而样本点又具有类似于古典概型中的等可能性，就得到几何概型。一般地说，具有下列特点的概率称之为几何概率：

(1) 该概率问题可转化为一个可度量的几何图形，试验 E 看成在 S 中随机投掷一点，即 S 为样本空间，而事件 A 就是所掷的点落在 S 中的可度量图形 A 中。

(2) 事件 A 的概率与 A 的度量 $L(A)$ 成正比。

则概率 $P(A)$ 由下式计算：

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$$

这里，L 表示几何度量，指长度、面积或体积等。这样计算的概率称为几何概率。

[例 7]　(约会问题)甲乙相约在上午 8 点到 9 点之间于某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时离去，试求两人能会面的概率。

解：设 x，y 分别表示甲乙到达会面地点的时刻，则能会面的充要条件：$|x-y|\leqslant 20(0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60)$。如果把以 60 为边长的正方形看成样本空间 S，则 A 表示两人能会面，就是不等式所表示的区域，如图 1-7 所示。故

$$P(A)\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

[例 8]　随机地向半圆$\{(x,\ y)|0<y<\sqrt{4x-x^2}\}$内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比例，试求从坐标原点到该点的连线与 x 轴的夹角大于 $\pi/6$ 的概率。

解：样本空间 Ω 即半圆$\{(x,\ y)|0<y<\sqrt{4x-x^2}\}$，它的面积为

$$S_\Omega=2\pi$$

所求事件 $A=\left\{(x,\ y)\left|\frac{\sqrt{3}}{3}x<y<\sqrt{4x-x^2}\right.\right\}$对应的区域，即图 1-8 中阴影部分，它的面积为

$$S_A=\int_0^3\left(\sqrt{4x-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

故所求事件的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}{2\pi}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6\pi}$$

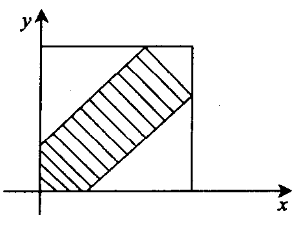


图 1-7

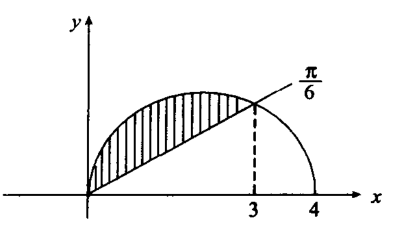


图 1-8

§ 1.3　概率的性质

首先，我们讨论关于互不相容事件的概率加法定理。

定理 1　两个互不相容事件的和概率，等于这两个事件的概率的和：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

证：设试验的样本空间 Ω 共有 n 个等可能的基本事件，而随机事件 A 包含其中的 m_1 个基本事件，随机事件 B 包含其中的 m_2 个基本事件，由于事件 A 与 B 是互不相容的，因而它们所包含的基本事件应该是完全不相同的，所以，事件 A 与事件 B 的和 $A+B$ 所包含的基本事件共有 m_1+m_2 个，于是得到

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

这一定理不难推广到有限多个互不相容事件的情形。

定理 2　有限个互不相容事件的和概率等于这些事件的概率的和：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

由此可得下面的推论：

推论 1　如果事件 A_1，A_2，…，A_n 构成的完备事件组，则这些事件的概率的和等于 1：

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

推论 2　对立事件的概率的和等于 1：

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

推论 3　若 $B \supset A$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；$P(A-B)=0$

定理 3　对任意两个随机事件 A，B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证明：因为

$$A\cup B=A+\overline{A}B$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)$$

又

$$B=AB+\overline{A}B$$

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$$

所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论 4　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

推论 5　$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$

[例 1]　袋中有 20 个球，其中 15 个白球，5 个黑球，从中任取 3 个，求至少取到一个白球的概率。

解： 设 A 表示至少取到一个白球，A_i 表示刚好取到 i 个白球（$i=0$，1，2，3），则

利用定理 2　（方法 1）

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{C_{15}^1C_5^2}{C_{20}^3}+\frac{C_{15}^2C_5^1}{C_{20}^3}+\frac{C_{15}^3C_5^0}{C_{20}^3}\\&=0.1316+0.4605+0.3991\\&=0.9912\end{aligned}$$

或利用对应事件的概率关系　（方法 2）

A 的对立事件 $\overline{A}$ 表示“没有一个是白球”，即 $\overline{A}=A_0$，所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_0)=1-\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=0.9912$$

[例 2]　甲、乙两人同时对目标射击一次，设甲击中的概率为 0.85，乙击中的概率为 0.8，两人都击中的概率为 0.68，求目标被击中的概率。

解： 设 A 表示甲击中目标，B 表示乙击中目标，C 表示目标被击中，则

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.85+0.8-0.68=0.97\end{aligned}$$