21 世纪数学系列教材

大学数学（文科）

华中科技大学数学系

华中科技大学出版社
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

- 传承数学文化 培养科学素质
- 适用 简明 通俗
- 深入浅出 学以致用

21 世纪数学系列教材

大学数学（文科）

魏 宏 毕志伟

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(文科)/魏　宏　毕志伟
武汉:华中科技大学出版社，2003 年 10 月
ISBN 7-5609-3035-2

Ⅰ.大…
Ⅱ.①魏…　②毕…
Ⅲ.高等数学-高等学校
Ⅳ.O13

大学数学(文科)　　　　魏　宏　毕志伟

责任编辑:李　德　　　　封面设计:刘　卉
责任校对:章　红　　　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:中科院武汉分院科技印刷厂
印　刷:湖北新华印务有限公司

开本:787×960　1/16　　印张:10.25　　字数:175 000
版次:2003 年 10 月第 1 版　　印次:2003 年 10 月第 1 次印刷　　定价:12.50 元
ISBN 7-5609-3035-2/O・289

内容提要

本书为大学文科数学课程的教材。适合于大学本专科的经济，法律，哲学、历史、新闻、外语，中文、建筑学、艺术设计等人文艺术类学科的学生使用。

本着向文科类学生介绍数学的思想与方法的基本宗旨，本书特别注重数学问题的背景介绍，阐明逻辑推导过程，穿插历史人物与故事的交代，适时地总结数学理论中的思想方法。

全书共分五章，包括函数与极限，微分学、积分学，微分方程和线性代数。各章配有基本的习题和参考答案。本书可作为一学期80学时的课程教材或辅导读物。

前　言

本书是大学文科数学课程的教材。适合于大学本专科中的经济，法律，哲学，历史，新闻，外语，中文，建筑学，艺术设计等人文艺术类学科的学生使用。

大学数学课程的设置在不断地变化。过去只给机械，电子类的理科学生开设为期两年的高等数学和工程数学，这些数学知识是理科学生进入自己的专业学科学习的必要基础，其重要性是显然的。后来又对经济与管理类的学生开设微积分、线性代数、概率与统计等数学课程，以满足与世界经济接轨之后这些专业的基本需要。而随着大学教育思想改革的不断发展，强调文科和理科相互交流的呼声愈来愈高，让理科学生了解一定的人文知识，文科学生懂得基本的理科思想便逐步成为共识。于是，对理科学生开设人文课程或讲座，对文科学生开设理科课程便纳入教学计划之中。

在确定向文科学生介绍理科的思想与方法的课程方面，人们不约而同地选择了人类文明发展史中的最重要的一大成果——数学文化。中国人民大学自 1993 年以来便开始了对人文类大学生的高等数学教育，北京大学则在 2000 年开设了以加强数学素质教育为宗旨的数学通修课程，向各类学科的学生介绍数学的思想与方法。这些改革取得了明显的效果，深受学生的欢迎。

数学知识对我们来说并不陌生。从扳着指头数数开始，到背诵乘法表，解一元二次方程，证明三角形的相似，大量的数学习题等等。应该说，小学和中学的数学教育已经为我们建立了扎实的初等数学基础。那么在大学里，学习什么样的数学？从数学课程中学习什么呢？对于这些问题，很难做出非常全面的回答。比较一致的看法应当有以下几点：首先，在初等数学中，我们学习的数学涉及的主要对象是常量，这些内容是在中世纪之前形成的知识，而大学数学则主要将变量作为研究对象，是在 16 到 19 世纪之间发展起来的数学。其次，在学习过程中，我们应当着重学习数学的思考方法，了解问题的提出，分析，到解决的全过程，体会数学方法的特

点。毫无疑问,抽象的思想和方法隐含在具体的问题和解答过程之中,要想真正体会和了解数学的思想与方法特点,就必须认真学习这门理论的背景问题、概念形成、计算规则、基本应用等环节。当然,与对理科学生的要求明显不同的是,我们不需要做大量的习题或难题,原则上是以理解为主,点到为止。

参照已有的同类教材的做法,本教材选择了微积分学、微分方程、线性代数作为教学内容。计划课时为80学时,一学期讲完。如果在教学过程中,结合各专业的特点,安排学生撰写课程论文并作为评定课程成绩的一部分,则可能会取得更好的效果。

数学文化是人类文化中最深刻的部分。数学既是一门推理严谨、计算准确的分析与计算的科学,也是一门洞察宇宙万物的共性规则的哲学方法,更是一门人类智慧文化的思想艺术。如同汽车、飞机提高了人类的移动能力,互联网扩大了人类的交流能力,计算软件提高了人类的计算能力,而数学文化则加强了人类洞察事物本质的能力,相信数学素质的提高可以帮助我们更好地应对未来。

本教材在华中科技大学数学系的组织下完成。由魏宏和毕志伟主编,刘金山承担了部分工作。王汉蓉、刘国钧参与了教材的组织和策划工作。由于编写文科类教材的经验不足,编写的时间较紧,不当之处难免,欢迎使用本书的教师和同学提出意见。

作　者

2003年6月

目　　录

第一章 函数与极限

§1.1 函数概念及其基本性质

函数概念的形成历经了不同时期数学家的不断发展及完善过程. 函数(function)一词,最初见于德国数学家、微积分创始人之一的莱布尼兹在1692年的著作之中. 而今天所用的记号$f(x)$则是瑞士数学家欧拉(Euler)在1724年首次使用的. 但最初的使用中,人们对函数概念的定义并不太在意,表述不够清楚,是德国数学家黎曼(Rieman)给出了其准确定义. 今天,函数概念已经进一步推广到更大的范畴,以适应其应用的需要.

1.1.1 常量与变量

在我们的日常生活、生产经营、工作学习与科学研究中,总免不了要与数字打交道. 对一位去外地上大学的学生来说,他要面对的数字是:学费、路费、旅途路程与时间,携带多少书本与衣物. 对一位工厂的管理者来说,他要操心的则可能是,员工人数、资产总量、流动资金、员工水平、生产流程、生产报表等一系列复杂的数量及这些量之间的相互联系. 对一位到大学进行招聘的人事经理来说,他所考虑的可能是招聘的员工数、应聘者的英语水平等级、计算机水平、年龄、相貌、专业分布等.

在这些要考虑的量当中,有一些量本身便是以数字形式出现的,而有一些量则似乎与数字无关,例如员工的工作能力,模特的漂亮程度等等. 但是为了应用的需要,人们可以设置一定的规则来对这些属性进行量化. 例如,员工的工作能力可以用某一种考试的成绩来量化,对漂亮的排序也可以组织一场选美大赛,根据评委的打分来确定. 随着计算机的使用,人的相貌、声音、指纹等都可以按照一定的方法用数据表现. 人类正走向数字化的时代,数字与我们的生活息息相关,影响重大.

事物存在于一定的时间与空间范畴之中. 当我们在一定的时空范畴中考察一个事物的数字特征时,可以根据其数量是否变化而将它们分为两类:常量与变量.

例如,当我们乘火车行进在去某大学所在地的这一段旅途之际,就读大学的地点,知名度应当没有改变,而学校里的迎新工作进度,已到校的新生人数、火车与家乡的距离则正在改变.

我们将某一过程中保持不变的量称做相对于该过程的常量,简称**常量**,而将发生变化的量称做相对于该过程的变量,简称**变量**. 由于变化是绝对的,不变是相对的,故有时也说常量是变量的特殊情形.

要强调的是,在描述变量时,应当指明变量所对应的考察过程,否则便很难理解其

含义.

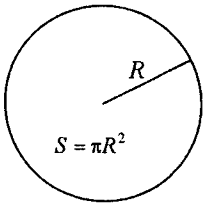

图 1.1.1

例 1 如图 1.1.1 所示，在圆的面积计算公式 $S=\pi R^2$ 中，一共有四个量：S、R、π、2. 当我们将此公式用于计算各种半径的圆的面积的过程中，半径 R 与面积值都是变量，π 与 2 则是常量.

应当说明的是，同一个量可能因为考察过程的不同而具有不同的属性.

例 2 考察学生食堂中的人数 x. 在食堂开始营业前的一个小时当中，只有厨工们在劳作，x 是常量；而在开始营业后的一个小时当中，随着进餐者的来去，x 便是变量.

研究变量的意义在于：人们对于所关心的事物，总是想了解描述此事物的某几个关键量的属性，这些量是常量还是变量？如果是变量，那么它的变化范围是多大？变化方式如何？变化趋势怎样等等.

为了回答这些问题，人们从描写变量之间的关系入手，导致了函数概念的出现. 而对于变量的变化特性的研究，便引导出变量的极限的概念. 函数与极限是本章的两个重要概念.

通常，将变量 x 的可能取值范围称为变量的**变化范围**.

例如在例 1 中，S 与 R 的变化范围是全体正实数 $(0,+\infty)$. 而在例 2 中，x 的变化范围则是有限数集 $\{1,2,\cdots,m\}$（m 是该食堂的最大容量）. 本教材中所考虑的变量均取实数值.

通常，若变量的变化范围由一个或几个区间构成时，称之为**连续型变量**；若变量的变化范围为有穷数集或可数无穷数集（与自然数的个数一样多）时，称之为**离散型变量**.

1.1.2 函数的定义

假定 x 与 y 是我们在某个考察过程中的变量，它们的变化方式可能是毫无关系（例如你的业余爱好与太阳的西落东升），也可能存在相互联系（例如你的收入与支出，你的用电量与缴纳的电费）. 从哲学的意义上讲，变量之间的联系是永恒的、普遍的. 当今世界经济的国际化，传媒方式的普及化，使我们感觉到似乎每个事物都是相互关联，相互影响的，只是关联的方式不同，影响的程度不一罢了. 亚洲金融危机、巴以冲突、9·11恐怖袭击，可以说这些事件都不是孤立的，是事物内在联系的一种集中反映.

在日常的实际活动中，人们在面临错综复杂、瞬息万变的事件或问题时，仅靠经验、感觉是无法作出合理而科学的决策的. 人们需要弄清事件或问题中的关键的变量之间的相互关系及影响程度. 而这便导致函数概念的引入. 可以简单地说，研究事物的内在规律便是研究用来描写变量之间的关系的函数，对函数特性的深入而全面的研究，有助于我们准确地把握事物的本质，理清问题的头绪，正确地面对及处理日常学习与工作中

所遇到的各种问题.

在初等数学中，我们见过许多使用数学运算和数学公式定义的初等函数，例如以下公式

$$\begin{aligned} &y = kx + b, \quad y = x^2, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x \\ &y = 2^x, \quad y = \lg x, \quad y = \arctan x, \quad \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

刻画了自变量 x 与因变量 y 的依从关系. 通常称以这种方式定义的 x 与 y 的关系为解析形式的函数. 而函数的较一般描述则如下所述。

定义 1　设 x, y 是两个变量，X 是 x 的变化范围. Y 是 y 的一个变化范围，f 是一个对应法则. 若对每个 X 中的 x 值，依据对应法则 f，Y 中有确定的并且惟一的一个 y 值与之对应，则称对应法则 f 是从 x 到 y 的一个**函数**. 记作

$$y = f(x), \quad x \in X \quad 或 \quad f: x \to y, \quad x \in X.$$

并称 x 为**自变量**，y 为**因变量**；X 是 f 的**定义域**，$f(x)$ 是 f 在 x 处的**函数值**；当 x 在 X 中变动时，函数值 $f(x)$ 的全体(是 Y 的一个子集)

$$G = \{y \mid y = f(x), \quad x \in X\}$$

称做函数 f 的**值域**.

关于这个定义，我们必须作几点重要说明：

(1) 与初等数学中称因变量 y 是函数的说法不同，定义中称对应规则 f 是函数，这一方式表明，函数的本质是变量之间的对应关系.

(2) 在定义 1 中，并未规定对应规则 f 必须是用数学公式来表现的，尽管这是最常用的形式. 依据定义，描写一个对应规则的方式不限于这一种形式，还可以采用曲线、表格，甚至文字等各种方式表示.

图 1.1.2

例如图 1.1.2 中的心电图表示了一位受检者的心电情况，是电流信号随着时间变量 t 的一个函数. 尽管我们也可以构造出该曲线的一个近似的数学公式，但是对于医生来说，并不需要函数的解析形式，直接对曲线的形状进行分析，更能得到所需要的病情信息.

又例如下面的一份期末考试卷面成绩 8 折表

x:卷面成绩	50	51	52	…	90	…	100
$y = 0.8x$	40	40.8	41.6	…	72	…	80

表示了由卷面成绩 x 到折算成绩 y 的函数关系. 有意思的是，尽管 x 与 y 之间有简单的解析公式：$y = 0.8x$，但教师们还是愿意直接使用表格得出学生的折算成绩而不愿每次都作乘法.

(3) 在定义 1 中，对规则 f 的一个基本要求是，它必须**能**以确定的方式指定**惟一的**一个 y 值与 x 值对应. 这种可操作性与惟一性是十分重要的，是数学的严密性和精确性的 一个重要体现. 例如，以下几种文字描述的对应规则便不符合函数定义中的这一要求：

(a) 有少许白头发的男士可以免费领取一瓶染发水；

(b) 任给实数 x，$f(x)$ 是满足 $y^2 = x$ 的实根 y.

在(a)中，少许白头发这一限定无法实际操作，显然，仅有 1 根白发或满头全白的男士不可以领取染发水，但有 100 根，1000 根白发者可以吗?由于这个描述使得对象无法区分，因此，其定义域不明确.

在(b)中，如果给定的 $x=1$，则符合所论规则的 $f(x)$ 值既可以是 1，也可以是 -1，于是，函数值 $f(1)$ 不惟一；并且若取 $x=-1$，则由于方程 $y^2=-1$ 没有实根，按照此规则，居然找不到函数值与 $x=-1$ 相对应.

因此，一个对应规则及一个使该规则成立的定义域便构成了函数概念的两个基本要素. 两个函数相同的充分必要条件便是这两个基本要素完全一样，即：定义域相同并且自变量取相同的值时所对应的因变量之值也完全相同. 有鉴于此，人们有时也把函数中的因变量省去不写，而将函数 $y=f(x)$ 简记成

$$f(x), \quad x \in X .$$

例 3 指明以下两对函数中哪一对是相同的.

(1) $f(x)=\ln x^2, x>0, \quad g(y)=2\ln y, y>0$；

(2) $f(x)=\ln x^2, x\neq 0, \quad g(x)=2\ln x, x>0$.

解 (1) 中两个函数所用的字母虽然不同，但定义域相同，都是正实数，并且在自变量取相同的值时函数值也一样，如 $x=2, y=2$ 时，有 $f(2)=\ln 2^2=2\ln 2=g(2)$. 可见对应规则也一致，故两函数相同. 由此可知，使用什么记号表示自变量及用什么形式表示对应规则是无关紧要的，关键是函数的定义域与对应规则最终相同.

(2) 中两个函数的定义域不一样，故两函数不相同.

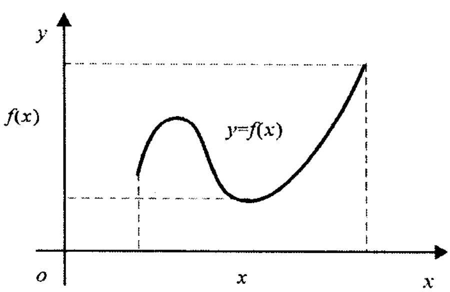

图 1.1.3

函数的图形 自从笛卡尔等人发明了直角坐标系等解析几何方法之后，人们便将变量 x 与 y 的函数关系用平面直角坐标系 xoy 中的点来表示. 于是，函数 $y=f(x)(x\in X)$ 的图形(见图 1.1.3)就定义为 xoy 平面中的点集

$$G_f=\{(x,y)\mid y=f(x), \quad x\in X\}.$$

虽然有时候，G_f 并不是一条通常意义上的曲线(比如它是断开的几个线段或一些点的集合)，但仍称之为曲线，简称为曲线 $y=f(x)$.

就像心电图的例子一样，曲线 $y=f(x)$ 以直观的方式给出了函数的整体分布及 x 与 y 的动态关系，这对于理解函数性质或探索可能结果十分有益. 在本教材中，我们将常常画出函数的图形以便于对问题的理解.

自然定义域　当函数 $y=f(x)$ 表现的是某个实际问题时，它的定义域便完全由此问题中 x 的实际意义来确定. 例如圆的面积公式

$$S=\pi R^2$$

中，自变量 R 的定义域是正实数集 $(0,+\infty)$. 但是人们在数学处理过程中，为了更好地表现函数关系本质，往往去掉了函数问题中变量所依存的背景空间（这就叫抽象！），而仅将函数作为变量之间的一种纯粹的对应法则来研究. 这种情况下，人们对于以数学公式形式写出的函数，将其定义域规定为使得公式有意义的所有 x 的取值范围，并称之为自然定义域. 例如对函数（注意，不考虑几何背景）

$$S=\pi R^2$$

来说，其定义域便是全体实数 $(-\infty,+\infty)$，因为 R 取负数时，还是可以从公式中求出确定的量 πR^2 与 R 对应.

例 4　求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域.

解　对分数 $\dfrac{u}{v}$ 来说，运算规则要求分母不为零，故应当有 $x\neq 0, x-1\neq 0$，于是定义域为三个区间 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 的并集.

例 5　求函数 $y=\lg(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域.

解　由初等数学知，对数的真数 $1-x$ 必须为正数，开平方根的数 x 必须非负，再结合分母不能为零，便可以写出约束自变量的条件为

$$1-x>0 \quad 及 \quad x\geqslant 0 \quad 和 \quad x\neq 0,$$

联立求解便得到所求定义域为 $0<x<1$.

例 6　求函数 $y=\arcsin(\mathrm{e}^x-1)$ 的定义域.

解　由初等数学知，反正弦函数的定义域是 $[-1,1]$，故应当有

$$-1\leqslant \mathrm{e}^x-1\leqslant 1 \quad 或 \quad 0\leqslant \mathrm{e}^x\leqslant 2,$$

于是，$-\infty<x\leqslant \ln 2$ 为所求定义域.

例 7（分段函数）　某客运公司规定的行李收费规则为：每位乘客可免费携带至多 20 kg 的行李，超过 20 kg 者，对超出部分按 2 元/kg 的价格加收运费，如图 1.1.4 所示. 于是行李的重量 w 与乘客为行李所支付的费用 p 之间的函数关系可写成以下形式

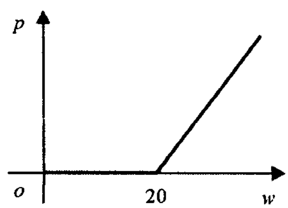

图 1.1.4

$$p=\begin{cases}0, & 0\leqslant w\leqslant 20;\\ 2(w-20), & w>20.\end{cases}$$

通常称这种形式的函数为分段函数,其对应法则由几个分规则构成.每个分规则不重叠,各自适合于自变量的某一段变化范围.在商业活动中存在着许多分段函数,如电话计费采用分时计价;量贩店购物采用按量定价,同样的商品在不同地区之间实行价格歧视策略等等.

1.1.3 几个常用函数

以下我们通过实际问题来引入一些常用的函数,并介绍这些函数的代数特征与几何图形,以期对它们有较全面的理解.

例8(比例函数) 如果每千克大米的单价是3.6元,则购买x千克大米所须支付的价钱y便与x成比例关系,比例系数是单价$p=3.6$,故x与y的函数关系为(图1.1.5)

$$y=f(x)=px.$$

它的代数特征是:y与x的比(即价格)保持为常数.

例9(反比例函数) 在一个电流为I,电阻为R,电压为V的电路上,若电压V是常数V_0,则I与R的关系是反比例关系(图1.1.6):

$$I=f(R)=\frac{V_0}{R}.$$

其代数特征是:自变量R与因变量的乘积保持为常数;或者说,电流I与电阻R的倒数成比例.

例10(线性函数) 一个理发店的经营成本y由固定成本及可变成本两部分构成.固定成本c由店面租金,理发员的基本工资构成,无论是否有人来理发,这个费用都得开支;可变成本则是顾客来了之后,由耗材、电费、理发员的提成工资等构成,通常这是与顾客人数x成比例的,设为kx,则经营成本y便是x的线性函数(图1.1.7).

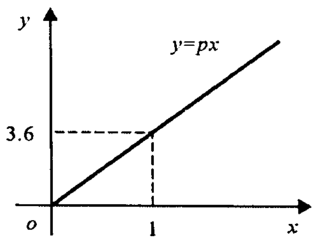

图1.1.5

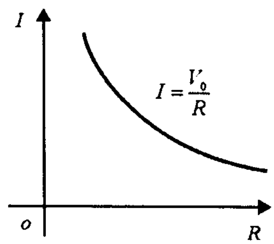

图1.1.6

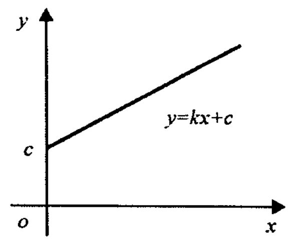

图1.1.7

$$y=kx+c.$$

它的一个重要性质为,无论目前顾客人数是多少,每增加一位顾客人数所带来的经营成本的增加是相同的,即

$$y(x+1)-y(x)=k.$$

对这一现象的本质化的理解则是:y的增加量与x的增加量之比是常数

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=k.$$

例 11(指数函数) 某一地区的人口统计数据如下表:

t/年	1980	1981	1982	1983	1984	1985
y:人口/百万	67.38	69.13	70.93	72.77	74.66	76.60
人口改变量/百万		1.75	1.80	1.84	1.89	1.94

从中看出,随着时间 t 的增大,人口总数不断增加,并且每年的改变量也呈逐年上升趋势.我们想知道,总人口数 y 与时间 t 成立什么函数关系?为此,若以 1980 年总人口数为基准,则可以发现一个规律

$$\frac{1981\text{ 年人口数}}{1980\text{ 年人口数}}=\frac{69.13}{67.38}=1.026,$$

$$\frac{1982\text{ 年人口数}}{1980\text{ 年人口数}}=\frac{70.93}{67.38}=(1.026)^2.$$

于是我们推测 1980 年后的第 t 年时,总人口数 $y(t)$ 为

$$y(t)=1980\text{ 年人口数}\times(1.026)^t.$$

这是一个指数函数.通常记作

$$y=ka^t.$$

其代数特征为:相同间隔(相邻 1 年或相邻 Δt 年)年份的总人口数之比是常数

$$\frac{y(t+\Delta t)}{y(t)}=\frac{y(s+\Delta t)}{y(s)}.$$

对依从指数函数 $y=ka^t(k>0)$ 变化的函数,当 $0<a<1$ 时,y 关于时间变量 t 递减,当 $a>1$ 时,y 关于 t 递增.设 $t=0$ 时,y 的值为 y_0,而 $t=T$ 时 y 的值为 $y_0/2$(或 $2y_0$),则称(见图 1.1.8,图 1.1.9)T 为变量 y 的**半衰期**(或**倍增期**).指数函数在增长和衰减问题中有较广泛的应用.

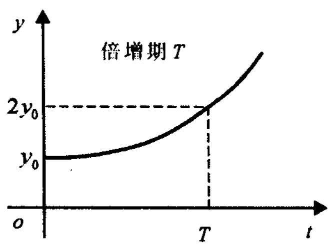

图 1.1.8

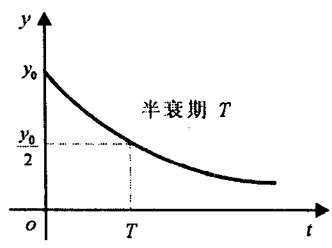

图 1.1.9

例 12 一段用粘土制成的发动机排气管可用来吸收废气中的污染物.设废气在进入管道之前的污染物含量 y 的初始量是 y_0,且 1 m 长的管道可使污染物减少 20%,问变量 y 衰减到初始量的一半所需要的时间(即半衰期)是多少?若要将污染物减少到初始