教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

计算机数学基础

刘树利　孙云龙　王家玉　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高职高专规划教材

计算机数学基础

刘树利　孙云龙　王家玉　编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材，是根据高职高专教育对数学课程的要求编写的.

本书针对高职高专计算机类专业的特点，增加了 Mathematica 数学软件的应用；对于基本计算，只介绍基本公式和基本方法；注重实际应用，并配有数学建模的实例.

本书分成微积分、线性代数、概率论和离散数学四个模块，共十七章.主要内容有函数、极限与连续，导数与微分，导数应用，积分，积分的应用，常微分方程，多元微积分简介，无穷级数，数值计算初步，行列式与矩阵，线性方程组解的结构，随机事件与概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，集合论，数理逻辑，图论等，并有附录供学生参考.

本书可作为高职高专计算机类专业的数学教材使用，也可供相关技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/刘树利等编.—北京：高等教育出版社，2001.7

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-009943-8

Ⅰ.计… Ⅱ.刘… Ⅲ.电子计算机-数学-技术学校：高等学校-教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 26196 号

责任编辑 杨树东 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马静如 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 杨 明

计算机数学基础
刘树利 孙云龙 王家玉 编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 中国农业出版社印刷厂

开 本 787×1092 1/16 版 次 2001 年 7 月第 1 版
印 张 28.75 印 次 2001 年 7 月第 1 次印刷
字 数 700 000 定 价 24.10 元

前　言

随着新世纪的到来，我们已经进入“知识经济”时代，奔驰在信息高速公路上．此时，数学作为一门技术越来越受到各行各业的重视，但是传统的数学教育已远远不能适应时代要求．新世纪的数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识，还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力，让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物，能用数学的思维方法分析和借助于计算机这个工具解决实际问题．在这种思想指导下，我们结合专业教学改革，在总结编者多年教学改革经验的基础上编写了这本面向高职高专计算机专业的数学教材．针对高职高专教育的培养目标和该专业对数学课的基本要求，本教材主要体现了下面几个特点：

1．对基本概念和基本理论，除注重背景材料引入和直观阐述外，通过计算机数学实验（用 Mathematica 数学软件）进行数值、图形、动画演示，使概念更清楚，原理更明白，如极限、导数、定积分概念，微积分基本定理，函数逼近等（每章有一节演示与实验）．

2．对数学知识的应用，多引用一些贴近生活实际的例子，复杂一些的作为数学建模的典型例题讲解，使学生了解数学建模的过程和简单方法，同时可以提高学生的学习兴趣，如简单优化模型、积分模型、微分方程模型、线性模型、简单随机优化模型等．

3．对于基本计算，只介绍基本公式和基本方法，但通过数学实验可以学会用数学软件进行符号计算或数值计算．

4．将定积分和不定积分融合为一章，先讲定积分的概念与性质，后通过微积分基本定理建立起定积分与原函数（不定积分）的关系，再讲基本积分法．这样既突出了重点，又便于理解．

5．在概率论模块中，用一节的篇幅简单介绍了随机数的生成的有关知识，这对于学生在编程过程中用好随机数函数是有好处的．另外，通过一个卖报模型，介绍简单随机优化数学模型的建模和求解方法．

本书由微积分、线性代数、概率论和离散数学四个模块组成，共有十七章．其中第一至四章和第十二至十四章由刘树利编写，第五至七章和第十五至十七章由孙云龙编写，第八至十一章由王家玉编写，最后由刘树利统稿．

湖南大学的曹定华教授仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，编者在此表示衷心的感谢．

由于编者水平所限，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

2001 年 4 月

出 版 说 明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分.改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材.但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要.为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了"教育部高职高专规划教材"编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批"教育部高职高专规划教材".

"教育部高职高专规划教材"计划出版500种,用5年左右时间完成.出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程.计划先用2～3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2～3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

"教育部高职高专规划教材"是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司
2000年4月3日

目　　录

第一篇　微积分

第二篇 线性代数

第三篇 概 率 论

第四篇 离散数学

第一篇　微积分

第一章　函数、极限与连续

微积分与初等数学有很大不同。初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而微积分则主要研究事物运动、变化过程的数量关系。不同的研究对象有不同的研究方法.极限方法是微积分学中处理问题的最基本方法，微积分学的概念、性质和法则都是通过极限法推导出来的.因此，极限是微积分学最基本的概念.

本章在对读者已有的函数知识进行复习的基础上，学习极限的概念、运算法则、连续函数的概念与性质等，并学习如何使用数学软件研究函数性质和求函数极限.

§1.1　函数及其图形

1.1.1　函数概念

我们先看几个实例：

实例 1　圆的面积 A 依赖于圆的半径 R，把 R 与 A 联系起来的规则是用公式 $A=\pi R^2$ 给出的.对于每个正数 R 都有唯一的 A 的值与之对应，这时我们就说 A 是 R 的函数.

实例 2　邮件的邮费 C 依赖于邮件的质量 m，在邮局公布的收费表中反映了 m 与 C 之间的对应关系.若给定一邮件质量 m，则有唯一确定的邮费 C 与之对应.

实例 3　半径为 R 的圆的内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 之间的对应关系由公式 $S_n=2nR\sin\frac{\pi}{n}$ 给定.当边数 n 在 3,4,5,…等自然数中任意取定一个数值时，按上式就有唯一确定的 S_n 的值与之对应.

这些例子虽来自不同的领域，但是它们有一个共同的特征.即每一个例子都描述了联系两个量之间的对应规则，在适当的范围内取定一个量 R、m 和 n 的值时，另一个量 A、C、S_n 的值就根据各自的规则被唯一确定了.这就是函数.确切地，给出函数定义如下：

定义 1.1　设 A 和 B 是两个非空的实数集合.若存在一个对应规则 f，使得集合 A 中的每个元素 x，按此规则 f 能在集合 B 中确定唯一的一个元素 y，则称这个对应规则 f 为集合 A 到集合 B 的**函数**，记作

$$f: x \to y \quad 或者 \quad y = f(x).$$

集合 A 称为函数 f 的**定义域**,记作 $D(f)$或 D_f.

数值 $f(x)$称为函数 f 在 x 处的值,即函数值.当 x 在定义域中变化时,$f(x)$的全体值的集合称为函数 f 的**值域**,记作 $R(f)$或 R_f.用集合形式可表示为

$$R_f = \{f(x) \mid x \in D(f)\}.$$

通常 $R_f \subseteq B$.

对于在函数 f 的定义域中变化的量,我们称为**自变量**;而随着自变量的变化而变化的量,则称为**因变量**.如前面三个例子中的 R、m、n 是自变量,相应地 A、C、S_n 就是因变量.

在函数的定义中,自变量和因变量采用什么字母符号并不重要,重要的是这两个量间的对应规则和函数的定义域.例如,函数 $y = f(x)$和 $S = f(t)$,虽然它们的自变量和因变量采用了不同的字母符号,只要对应规则 f 是同一个,定义域相同,则它们就是相同的函数.

习惯上常用字母 F、G、f、g、φ、ψ 等表示函数.一般来说,用不同的字母来表示函数和变量.在特殊情况下,也可以用相同的符号来表示函数和因变量.例如,函数 $y = y(x)$,在这个表达形式中,前一个 y 表示因变量,后一个 y 表示函数,即对应规则.所以,习惯上也称 y 为函数,或 y 是 x 的函数.

我们可以把函数看作是一部机器.若 x 在函数 f 的定义域中,当把 x 作为机器的输入放进机器,则通过机器的处理产生了一个输出 $f(x)$.当然,函数的定义域就被看作是一切允许输入的集合;函数的值域被看作是一切可能输出的集合.

在计算器中预先编好程序的函数,是把函数看作机器的一个很好的例证.例如,在普通计算器上都有$\sqrt{x}$键,它表示进行开平方运算的函数.要对一个数进行开平方运算,首先输入 x 到计算器的显示屏,然后按下$\sqrt{\ }$键.当 $x \geqslant 0$ 时,函数值即被显示出来;当 $x < 0$ 时,由于 x 不在开平方函数的定义域内,即这个 x 是一个不认可的输入,计算器将在显示屏上显示错误信息.

下面再看几个关于函数的例子.

例 1.1.1 平方函数为每个实数 x 指派了它的平方 x^2,它用下列等式来定义:$f(x) = x^2$.

与自变量 x 相对应的函数值是用 x 代入这个等式获得的.例如:$f(3) = 3^2 = 9$,$f(-2) = (-2)^2 = 4$.

平方函数 f 的定义域 D_f 是全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$,f 的值域是由 $f(x)$的一切值所组成的,即形如 x^2 的全部的实数,$\mathbf{R}_f = \{y \mid y \geqslant 0\} = [0, +\infty)$.

例 1.1.2 若用下列等式定义函数 $g(x)$:

$$g(x) = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 3,$$

则

$$D_g = [0, 3].$$

与上例中的函数 f 相比,显然 $D_g \neq D_f$,所以 g 与 f 是不同的函数.

在例 1.1.1 和例 1.1.2 中,函数的定义域都是相当明确地给出的.如果一个函数是用公式来表示的,并且没有明确地给出定义域,那么就按惯例把按此公式可以获得对应函数值的全体实数组成的集合(即使得公式有意义的实数集合)为函数的定义域,也称为函数的自然定义域.但在实际问题中,函数的定义域要根据变量的实际意义来确定.

例 1.1.3 试求由下列公式定义的函数的自然定义域:

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}.$$

解 $D_f=\{x\mid x\neq 0\text{ 且 }x\neq 1\}=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty).$

例 1.1.4 在本节开始提到的 3 个实例中，函数的定义域由实际意义来确定.

(1) 圆面积 $A=\pi R^2, D=\{R\mid R\geqslant 0\}=[0,+\infty).$

(2) 邮费函数，定义域是 $D=[0,m_0]$，其中 m_0 是邮件的质量的上限.

(3) 圆内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 的函数，$S_n=2nR\sin\frac{\pi}{n}$，定义域为 $D=\{n\mid n\geqslant 3, n\in\mathbf{N}\}$.

1.1.2 函数的图形

现在介绍表示函数的最直观的形式——函数的图形.

定义 1.2 设 f 是定义在 D_f 上的函数，它的图形是满足条件 $y=f(x)$ 的有序数对 (x,y)（即平面点）的集合，即

$$G(f)=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}.$$

函数 f 的图形 $G(f)$ 给出了直观的函数形态. 当 $f(x)>0$ 时，在 x 处图形的高就是函数值 $f(x)$（见图 1.1.1）.

从 f 的图形 $G(f)$ 上，可以在 x 轴上获得 f 的定义域，在 y 轴上获得 f 的值域. 即图形 $G(f)$ 在 x 轴上的投影点集就是定义域 D_f，在 y 轴上的投影点集就是值域 R_f（见图 1.1.2）.

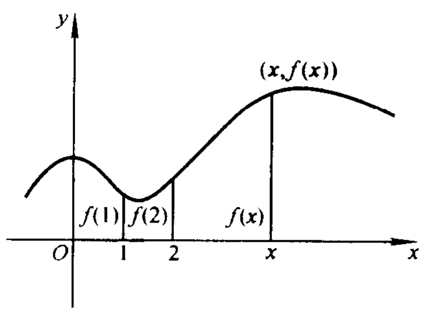

图 1.1.1

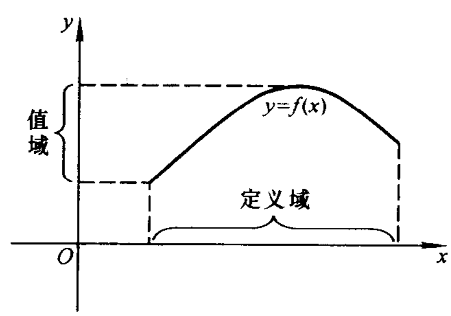

图 1.1.2

已知函数关系，可以用描点方法等作出函数的草图，这在中学已经学过，但这样画出的函数图形通常不太精确，尤其在取点较少的情况下更是如此. 不过，使用计算机软件可以使取的点数足够多，从而可以把函数图形画得足够精确. 我们将在本章最后介绍用计算机数学软件作函数图形的有关问题.

由于函数图形具有直观性强的优点，故而即使在讨论由公式或表格给出的函数时，也常要作出其图形，以帮助研究问题.

1.1.3 分段函数

有的函数在其定义域的不同范围中，对应的法则用不同的公式来表示，这种函数称为**分段函数**. 举例如下.

例 1.1.5 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x; & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时;} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$

如图 1.1.3.

例 1.1.6 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时;} \\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$

如图 1.1.4.

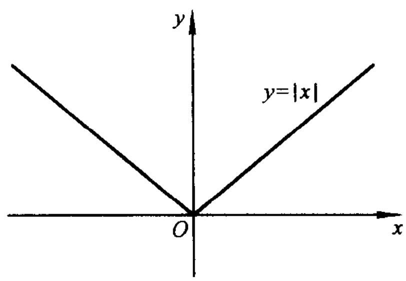

图 1.1.3

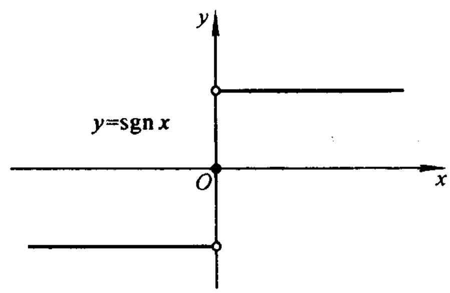

图 1.1.4

例 1.1.7 取整函数

$$y=[x]=n,\text{当 } x\in[n,n+1),\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{时}.$$

显然,$[x]$的定义域是全体实数 $\mathbf{R}$,值域是全体整数 $\mathbf{Z}$.

例如:$[4.5]=4$,$[\sqrt{2}]=1$,$[-3.2]=-4$.

函数图形如图 1.1.5.具有类似图形的函数通常称为阶梯函数.

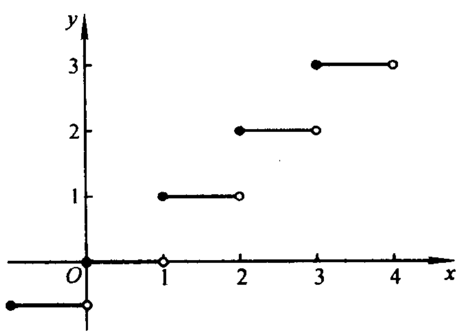

图 1.1.5

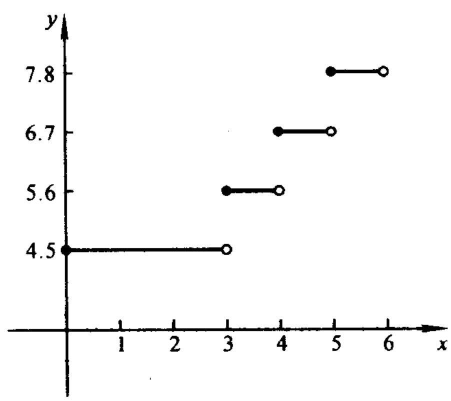

图 1.1.6

例 1.1.8 某城市的"面的"起价 4.50 元(3 km 以内),若大于或等于 3 km 但不足 4 km 再增加 1.10 元,依此类推,试求"打的"费与距离之间的函数关系.

解 设 y 为"打的"费(单位:元),x 为行驶距离(单位:km),则有

$$y=\begin{cases}4.5, & x\in(0,3);\\ 5.6, & x\in[3,4);\\ 6.7, & x\in[4,5);\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

或用取整函数可表示为

$$y=\begin{cases}4.5, & x\in(0,3);\\ 4.5+1.1([x]-2), & x\in[3,+\infty).\end{cases}$$

如图 1.1.6 所示,该函数也是一个阶梯函数.

1.1.4 函数的几种特性

当函数的自变量在定义域中取不同的值时,通常会得到不同的函数值.根据函数值的不同性态可以对函数进行分类.下面是函数常见的 4 种性态.

(1) 函数的有界性

定义 1.3 设 f 是定义在集合 A 上的函数,若存在正数 M,使得对任何的 $x\in A$,都满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 f 在 A 上有界,或称 f 是 A 上的**有界函数**.每一个具有上述性质的正数 M,都是函数的界.

若具有上述性质的正数 M 不存在,则称函数 f 在 A 上无界,或称 f 是 A 上的无界函数.换句话说,对任意给定的正数 M,不论它有多么大,总有某个 $x\in A$ 存在,使不等式 $|f(x)|>M$ 成立,则 f 在 A 上无界.

今后,我们将在自然定义域内有界的函数称为有界函数.

从几何意义上看,有界函数的图形被夹在两条平行线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间;无界函数的图形,无论 $M(>0)$ 有多大,总要向上穿过 $y=M$ 或向下穿过 $y=-M$.

例如,$y=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上有界,但在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界;$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 上有界,但在 $(0,1)$ 上无界;$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

(2) 函数的单调性

定义 1.4 设函数 f 的定义域为 D_f,区间 $I\subset D_f$.若对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或总有 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 f 是在区间 I 上的单调增函数(或单调减函数),称 I 为 f 的单调增(或减)区间.

单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**.

从几何意义上看,单调增函数的图形是向右上方上升的曲线;单调减函数的图形是向右下方下降的曲线.

例如:$f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增,在 $(-\infty,0]$ 上单调减,但该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

(3) 函数的奇偶性

定义 1.5 设函数 f 的定义域 D_f 关于原点对称,即当 $x\in D_f$ 时,必有 $-x\in D_f$.若对于任意的 $x\in D_f$,总有 $f(-x)=f(x)$,则称 f 是**偶函数**;若对任意 $x\in D_f$,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称 f 是**奇函数**.

从几何意义上看,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点中心对称.

例 1.1.9 确定下列函数的奇偶性：

(a) $f(x)=x^5+\sin x$;

(b) $g(x)=\cos x-x^4$;

(c) $h(x)=x+\tan^2 x$.

解 (a) $\because f(-x)=(-x)^5+\sin(-x)=-(x^5+\sin x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)$是奇函数.

(b) $\because g(-x)=\cos(-x)-(-x)^4=\cos x-x^4=g(x)$,

$\therefore g(x)$是偶函数.

(c) $\because h(-x)=-x+\tan^2(-x)=-x+\tan^2 x\neq h(x)$，且 $h(-x)\neq -h(x)$,

$\therefore h(x)$是非奇非偶函数.

(4) 函数的周期性

定义 1.6 设函数 f 的定义域是D_f，若存在非零数 T，使对每个 $x\in D_f$，都有 $x\pm T\in D_f$，且总有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 f 是**周期函数**，数 T 称为周期函数f 的**周期**.

由定义显见，若 T 是 f 的周期，则 $2T,3T,\cdots,nT,\cdots$都是 f 的周期. 我们把 f 的所有周期中的最小正值称为f 的最小正周期. 通常情况下，我们谈到的周期均指最小正周期.

例如，大家熟知的正弦函数 $f(x)=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，正切函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形的特点是，如果把周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离，那么将与函数的其他部分重合(如图 1.1.7).

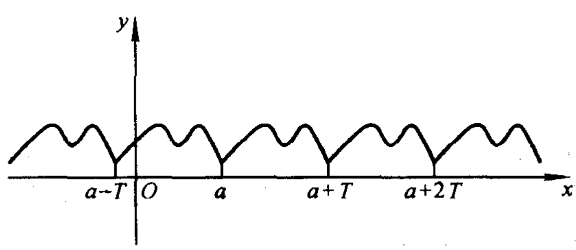

图 1.1.7

习题 1.1

1. 设 $f(x)=2x^2+3x-4$，求 $f(0),f(\sqrt{2}),f(-x),f(x+1),f(2x),\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}(h\neq 0)$.

2. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $f(x)=6-4x,-2\leqslant x\leqslant 3$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;

(3) $f(x)=|x|+x$;

(4) $f(x)=|x^2-1|$;

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\neq 0\ 时;\\ 0, & 当\ x=0\ 时.\end{cases}$

3. 下列各题中的函数 f 和 g 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$,　$g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$,　$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=x^2$,　$g(t)=t^2$.

4. 求下列函数定义域，并画出函数的草图：

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\leqslant 0\ 时;\\ x+1, & 当\ x>0\ 时;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}-1, & 当\ x\leqslant -1\ 时;\\ 3x+2, & 当\ |x|<1\ 时;\\ 7-2x, & 当\ x\geqslant 1\ 时.\end{cases}$

5. 干燥空气上升时体积膨胀变冷，若地面温度是 20 ℃时，高 1 km 处的温度是 10 ℃.

(1) 假定温度 T(单位:℃)是高度 h(单位:km)的线性函数，试写出这个函数.

(2) 画出此函数的草图，求出其斜率.

(3) 求出在高度为 2.5 km 处的温度.

6. 试确定下列函数在指定区间上是有界还是无界：

(1) $f(x)=-\sin x+2$,　$[0,100\pi]$;

(2) $f(x)=x^2-x$,　$(2,8]$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,　$(0,+\infty)$;

(4) $f(x)=\tan(2x)$,　$\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$.

7. 试判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+x$;

(2) $f(x)=x^3-x$;

(3) $f(x)=x^2(1-x^2)$;

(4) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

8. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出它的周期(最小正周期).

(1) $f(x)=\cos(x-2)$;

(2) $f(x)=x\cos x$;

(3) $f(x)=\sin^2 x$.

§1.2 函数运算

在这一节，我们讨论函数的一些基本运算，并介绍初等函数的概念.

1.2.1　函数的四则运算

两个函数 f 和 g 之间可经过类似于实数间的四则运算,构成新的函数.下面来定义这些运算.

定义 1.7　设函数 f 和 g 的定义域分别为 D_f 和 D_g,则和函数 $f+g$、差函数 $f-g$、积函数 fg 和商函数 f/g 分别定义如下:

和函数: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $D_{f+g}=D_f\cap D_g$;

差函数: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $D_{f-g}=D_f\cap D_g$;

积函数: $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $D_{fg}=D_f\cap D_g$;

商函数: $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$, $D_{f/g}=\{x\mid x\in D_f\cap D_g \text{ 且 } g(x)\neq 0\}$.

例 1.2.1　设 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x^2-4}$,求函数 f 和 g 的和、差、积、商.

解　易见 $D_f=[0,\infty)$, $D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

由定义 $(f\pm g)(x)=\sqrt{x}\pm\sqrt{x^2-4}$, $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[2,+\infty)$;

$(fg)(x)=\sqrt{x(x^2-4)}$, $D_{fg}=[2,+\infty)$;

$(f/g)(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$, $D_{f/g}=(2,+\infty)$.

1.2.2　函数的复合运算

设有函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=\varphi(x)=x^2+1$,若要求变量 x 和 y 之间的对应规则,即函数,可用代入法来实现:

$$y=f(u)=f(\varphi(x))=f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}.$$

这样处理过程就是函数的复合过程.一般地有:

定义 1.8　设函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$是两个已知的函数.对于函数 φ 的定义域 D_φ 中的一些 x,如果函数值 $u=\varphi(x)$在函数 f 的定义域 D_f 中,那么就可计算得到一个对应的值 $f(\varphi(x))$,于是构成了一个新的函数 $y=g(x)=f(\varphi(x))$,这个新函数称为由函数 f 和 φ 复合而成的**复合函数**,记作 $f\circ\varphi$,可以读作"f 圈 φ".即$(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))$(如图 1.2.1).

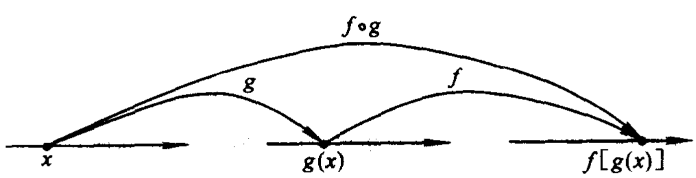

图 1.2.1

显然,复合函数 $f\circ\varphi$ 的定义域$D_{f\circ\varphi}$应是函数φ 的定义域D_φ 的子集.变量 u 通常称为复合函数的中间变量.中间变量的取值范围一般应是 D_f 的一个子集.

例 1.2.2　若 $f(x)=x^2$, $g(x)=x-3$,试求复合函数 $f\circ g$ 和 $g\circ f$,并求其定义域.

解

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-3)=(x-3)^2.$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2-3.$$

且
$$D_{f\circ g}=D_{g\circ f}=\mathbf{R}$$

从上例可以看出，一般来说 $f\circ g\neq g\circ f$，即复合运算不同于乘积运算，它与函数的前后次序有关.

例 1.2.3 试把函数 $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$ 分解成几个简单函数的复合.

解 从函数的表达式可以看出，求 x 的函数值的运算过程是：首先把 x 除以 2，再求其反正弦值，最后再进行平方运算. 因此，可以分解出几个简单函数：

$$\begin{aligned}&y=g(u)=u^2,\\&u=h(v)=\arcsin v,\\&v=\varphi(x)=\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

由它们进行复合即为原来的函数：

$$y=f(x)=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2=(g\circ h\circ\varphi)(x)\text{，或 }f=g\circ h\circ\varphi.$$

1.2.3 反函数

定义 1.9 设函数 f 的定义域为 D_f、值域为 R_f. 若对任意的 $y\in R_f$，在 D_f 内有唯一的满足 $f(x)=y$ 的数 x 与之对应. 又把 y 看作自变量，x 看作因变量，这样得到一个新的函数，则称它是函数 f 的**反函数**，记作 f^{-1}. 即 $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$，对 R_f 中所有的 y 都成立.

相对于反函数 f^{-1} 来说，原来的函数 f 称为**直接函数**.

例如，$f(x)=x^3$ 的反函数是 $f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{3}}$.

由于习惯上我们总把 x 作为自变量，所以可以把反函数定义中的 x 和 y 的地位互换. 这样，$f(x)=x^3$ 的反函数可以写成 $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

由定义可以看出：

(1) 单调函数一定存在反函数.

(2) f^{-1} 的定义域就是 f 的值域，f^{-1} 的值域就是 f 的定义域.

求已知函数的反函数的步骤可以归纳为以下两步：

(1) 从等式 $y=f(x)$ 中解出 x，得 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 在(1)所求出的式子中将 x 和 y 互换，得反函数表达式 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.2.4 求 $y=\dfrac{x}{x-2}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{x-2}$ 解得 $x=2+\dfrac{2}{y-1}$，互换 x 和 y 得 $y=2+\dfrac{2}{x-1}$. 此即 $y=\dfrac{x}{x-2}$ 的反函数.

值得注意的是，不是所有的函数都存在反函数. 但是一个函数总可以在其各个单调区间内写出其反函数.

例如，按定义，$f(x)=x^2$ 在其定义域内没有反函数，但是对于 $f_1(x)=x^2, D_{f_1}=[0,+\infty)$；$f_2(x)=x^2, D_{f_2}=(-\infty,0]$.

由于 f_1 和 f_2 分别在 D_{f_1} 和 D_{f_2} 上单调，因而都存在反函数

$$f_1^{-1}(x)=\sqrt{x},\ f_2^{-1}(x)=-\sqrt{x}.$$

关于反函数的图形是大家早已在中学数学中熟知的，即 $y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

1.2.4 初等函数

(1) 基本初等函数

下面六类函数统称为**基本初等函数**：

a. 常数函数 $y=C$ （C 为常数）；

b. 幂函数 $y=x^{\alpha}$ （α 为常数）；

c. 指数函数 $y=a^{x}$ （a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$）；

d. 对数函数 $y=\log_a x$ （a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$）；

e. 三角函数 $y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\sec x$， $y=\tan x$， $y=\cot x$， $y=\csc x$；

f. 反三角函数 $y=\arcsin x$， $y=\arctan x$， $y=\arccos x$， $y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数在中学数学中已经学过，它们的定义域、值域、图形、性质等要非常清楚（参见附录Ⅰ）.

(2) 初等函数

定义 1.10 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合运算构成的，并在定义域内可以用一个表达式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$、$y=(x^2+3x)\ln x$、$y=\sin^2 x$ 等都是初等函数，而分段函数大部分都不是初等函数.

习题 1.2

1. 求 $f\pm g$、fg 和 f/g，并求其定义域：

(1) $f(x)=x^3+2x^2$， $g(x)=3x^2-1$；

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}$， $g(x)=\sqrt{1-x}$.

2. 求 $f\circ g$、$g\circ f$、$f\circ f$ 和 $g\circ g$，并求其定义域：

(1) $f(x)=2x^2-x$， $g(x)=3x+2$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$， $g(x)=x^3+2x$.

3. 把函数分解成 $f\circ g$ 的形式：

(1) $F(x)=(x-9)^5$；

(2) $F(x)=\sin\sqrt{x}$；

(3) $F(x)=\ln(x^2+1)$；

(4) $F(x)=\dfrac{1}{x+3}$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=\dfrac{1+3x}{5-2x}$；

(2) $f(x)=1+\ln(x+2)$；

(3) $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；