成人高中结业应试必读

数 学

下 册

段云鑫　杨三阳　张　锬　编著

科学普及出版社

成人高中结业应试必读

数　　学

下　　册

段云鑫　杨三阳　张　铰　编著

科学普及出版社

内 容 提 要

本书是《成人高中结业应试必读》的数学（下册），内容包括平面几何、立体几何和解析几何。

本书特点：内容编排相对集中，选材慎重，重点突出，简明扼要，通俗易懂，例题典型，设有多层练习，书后附有几组模拟试题及其答案，便于成年人自学或书习，也便于成人补习学校（班）的教学安排。

成人高中结业应试必读

数 学

下 册

段云鑫 杨三阳 张 铗 编著

责任编辑：高宝成

封面设计：王序德

*

科学普及出版社出版（北京市海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：14.25 字数：314

1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷

印数：1—24,000册 定价：2.40元

统一书号：7051·1061 本社书号：1044

出 版 说 明

当前，我国经济建设蓬勃发展，体制改革方兴未艾，全国各地正在掀起学习文化科学知识的热潮。为了满足高中没有结业的广大职工干部的文化学习或报考各类成人高等学校的迫切需要，我们组织了长期从事成人教育的老教师和具有相当丰富教学经验的中学高中教师，编写了这套《成人高中结业应试必读》(以下简称《应试必读》)。《应试必读》包括政治、语文(上、下册)、数学(上、下册)、物理(上、下册)、化学、地理、历史。

这套《应试必读》是以教育部制订的《全日制十年制学校中学教学大纲(试行草案)》、教育部1985年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲和“速成的联系实际的”成人教育方针为依据，并充分考虑到成人理解力强、记忆力较差、学习时间少而分散等特点，以及近年来职工高中结业和各类成人高等学校招生考试的实际。《应试必读》从内容来说，既重视知识的科学性和系统性，深度和广度；又力求少而精，兼顾一般，重点突出，简明扼要。从方法来说，既重视传授学习方法(特别是自学方法)、思维方法、又注意培养学员独立思考、独立分析问题和解决问题的能力；既要由浅入深，循序渐近，通俗易懂；又要善于指导，加强练习，提高时效。只有这样，才能便于学员扬长避短，在较短的时间内，通过学习和必要而适量的练习实践，巩固和深化所学的知识，为日后深造打下良好的基础。

本套《应试必读》是广大成年人参加高中结业考试的复习

用书，也是报考各类成人高等学校的有益参考书，又是具有初中结业水平的成年人学习高中文化知识的良师益友。

科学普及出版社

一九八四年十一月

目　　录

第三编　平面几何

第四编　立体几何

第五编　解析几何

第三编 平 面 几 何

第十二章 相交线和平行线

本章包括直线(射线、线段)、角和平行线等几部分内容，重点放在平行线截得比例线段和线段的计算上。这些都是证明问题和解决问题的关键，以后会经常使用。由于这些知识都是初中已经学习过的内容，因此对于图形的概念和性质不再重复讲述(以后各章也是如此)，知识系统也不作逻辑的安排。为了达到成人高中结业或高考应试的目的，在学习要求上有一定程度的提高，对问题的论证也增加了一定的难度。要学好本章内容，应注意以下几点：

1. 首先要明确概念，如果不理解内错角、同位角的概念，当然难以证明两条直线平行；而对概念理解得不全面，也要影响问题的解决，就以平行线截得比例线段的定理来说，被平行线所截的两条直线，不管定行也好，相交也好，截得的对应线段都有成比例的性质，不能只局限于两条直线没有交在一起的情况。

2. 在证题中经常交互使用图形的判定定理和性质定理。这两种定理很容易混淆，必须分辨清楚，正确使用。

3. 许多问题的解决，例如证明线段的相等、平行等，常常需要通过比例式的反复变换才能得到，所以一定要熟悉比例的性质，掌握必要的变换技能和技巧。

一、直线　射线　线段

（一）内容

1．重要概念

（1）直线——两端无界，可任意伸长。

（2）射线——一端有界，另一端无界。

（3）线段——两端都有界。

（4）两点间的距离——连结两点的线段的长，叫做这两点间的距离。

（5）线段的比和成比例线段。

1）两条线段 a 和 b 的比，就是用一个长度单位来量 a 和 b 所得的量数的比（两条线段的比与所取的长度单位无关）。

2）如果线段 a 和 b 的比等于线段 c 和 d 的比，就是 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我们就说线段 a、b、c、d 成比例。这四条线段就叫做成比例线段。

2．重要性质

（1）过任意两点可以引一条直线，并且只能引一条直线（即两点决定一条直线）。由此可以推出：两直线相交，只能有一个公共点。

（2）在所有连结两点的线中，以线段最短。

（3）线段的比和由线段所组成的比例，分别具有数的比和由数所组成的比例的性质。

1）比例的基本性质：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$；反过来，

如果$ad=bc$，那么$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

2）反比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$。

3）更比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$或$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$。

4）合比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

5）分比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ $(a>b)$。

6）等比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$，那么$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$
$=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$。

（二）**题型**

1．线段的运算

例1 如果M是线段AB的中点，P是MB内的任意一点，求证：

(1) $MP=\frac{1}{2}(AP-PB)$；

(2) $PA^2-PB^2=2AB\cdot MP$。

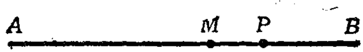

图 12-1

证明 如图 12-1。

(1) $\because$ $MP=AP-AM=AP-MB=AP-(MP+PB)$

$$=AP-MP-PB,$$

$$2MP=AP-PB,$$

$$\therefore \quad MP=\frac{1}{2}(AP-PB)。$$

(2) $PA^2-PB^2=(PA+PB)(PA-PB)$,

$$\because \quad PA+PB=AB,$$

$$PA-PB=AM+MP-PB=MB+MP-PB$$

$$=MP+PB+MP-PB=2MP,$$

$$\therefore \quad PA^2-PB^2=AB\cdot 2MP=2AB\cdot MP。$$

例2 如果按已知比$m:n$分一条线段AB，并且AB的长是a，求A点到分点的距离。

解 (1) 如果依$m:n$的比内分AB，得到分点M，那么$AM:MB=m:n$，见图 12-2，

图 12-2

即 $AM:(a-AM)=m:n$

$$\therefore \quad AM=\frac{ma}{m+n}。$$

(2) 如果依$m:n$的比外分AB，得到分点N，那么$AN:NB=m:n$，见图 12-3，

图 12-3

即 $AN:(AN-a)=m:n$,

$$\therefore \quad AN=\frac{am}{m-n}。$$

说明如果分点位于A、B之间(如M点)，这种分法叫做内分AB，M点叫做内分点；如果分点在线段AB(或BA)的延长线上(如N点)，这种分法叫做外分AB，N点叫做外分点。

2．比例性质的应用

例3 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$，求

(1) $\frac{x+y+z}{z}$；(2) $\frac{x+z}{y}$；(3) $\frac{x+y-z}{x}$。

解 (1) 由 $\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$，

得 $\frac{x+y+z}{2+7+5}=\frac{z}{5}$(等比定理)，

即 $\frac{x+y+z}{14}=\frac{z}{5}$，$\therefore$ $\frac{x+y+z}{z}=\frac{14}{5}$(更比定理)。

(2) 由 $\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$，

得 $\frac{x+z}{2+5}=\frac{y}{7}$(等比定理)，

即 $\frac{x+z}{7}=\frac{y}{7}$，$\therefore$ $\frac{x+z}{y}=1$ (更比定理)。

(3) $\because$ $\frac{z}{5}=\frac{-z}{-5}$，

$\therefore$ 由 $\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$，得 $\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{-z}{-5}$，

于是 $\frac{x+y-z}{2+7-5}=\frac{x}{2}$

即 $\frac{x+y-z}{4}=\frac{x}{2}$，$\therefore$ $\frac{x+y-z}{x}=2$。

例 4 P、Q两点分别为线段AB的内、外分点，已知$AB=a$，并且$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}=\frac{3}{2}$。求 PQ 的长，见图 12-4。

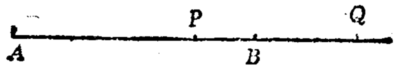

图 12-4

解 $\because\ \frac{AP}{PB}=\frac{3}{2}$，

$\therefore\ \frac{AP+PB}{PB}=\frac{5}{2}$，即 $\frac{AB}{PB}=\frac{5}{2}$，

$\therefore\ PB=\frac{2\cdot AB}{5}=\frac{2a}{5}$；

又 $\frac{AQ}{QB}=\frac{3}{2}$，

$\therefore\ \frac{AQ-QB}{QB}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{AB}{QB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\ QB=2AB=2a$，

$\therefore\ PQ=PB+QB=\frac{2}{5}a+2a=2\frac{2}{5}a$。

（三）练习

1．在一条直线上有顺序的三个点A、B、C，如果M是AC的中点，N是BC的中点，求证 $AB=2MN$。

2．（1）已知线段AB长24cm，点P内分AB为两部分，且$\frac{AP}{PB}=\frac{5}{3}$，求$AP$、$PB$的长。

（2）已知线段 AB 长 15cm，C 点外分 AB 为两部分，且

$\frac{AC}{BC}=\frac{3}{1}$，求$BC$的长。

3．延长线段AB到K，使$AK:KB=5:3$，求$AK:AB$。

4．已知C是线段AB上的一点，D是AB延长线上一点，并且$AD:DB=AC:CB$。如果$AB=6\text{cm}$，$AC=3.6\text{cm}$。求AD和DB的长。

5．如果a、b、c、d是成比例线段，证明$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

6．已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，求：

(1) $\frac{x+y+z}{x}$；(2) $\frac{x+y+z}{x+y-z}$；(3) $\frac{y+z-x}{z+x-y}$；

(4) $\frac{x+y}{y+z}$。

7．在下列各式中，分别求出线段x和y的比：

(1) $(x+y):y=5:4$；(2) $(x+y):(x-y)=6:2$；

(3) $(2y+3x):(5y-2x)=8:3$；(4) $\frac{x-a-c}{y-b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

8．已知$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，

求证：$\frac{ma+nd}{ma-nd}=\frac{ma^3+nb^3}{ma^3-nb^3}$。

9．已知$x:y:z=3:4:5$，$x+y-z=6$。求x，y和z（注：$x:y:z=3:4:5$是$x:3=y:4=z:5$的另一种写法。）

10．已知：A、B、C、D是直线上顺次四点，求证：$AB\cdot CD$

$\therefore AD \cdot BC = AC \cdot BD$。

练习的提示或答案

1．如图12-5所示，$AB = AC - BC$

$$= 2AM - 2BN = 2(AM - BN)$$
$$= 2(MC - NC) = 2MN$$

图 12-5

2．(1) $\because \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{5}{3}$，$\therefore \dfrac{AP+PB}{PB} = \dfrac{8}{3}$，即 $\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{8}{3}$，$\therefore \dfrac{24}{PB} = \dfrac{8}{3}$，得 $PB = 9\text{cm}$，$AP = 15\text{cm}$。

(2) $\because \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{1}$，$\therefore \dfrac{AC-BC}{BC} = \dfrac{2}{1}$，即 $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{1}$，

$\therefore \dfrac{15}{BC} = \dfrac{2}{1}$，$BC = 7.5\text{cm}$。

3．$AK : AB = 5 : 2$。

4．$AD = 18\text{cm}$　$DB = 12\text{cm}$。

5．$\because \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$，

$\therefore \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$　①　　$\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$　②

$\frac{①}{②}$得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

6．(1) $\frac{x+y+z}{x}=\frac{9}{2}$；(2) $\because$ $\frac{x+y+z}{9}=\frac{z}{4}$，

$\frac{x+y-z}{1}=\frac{-z}{-4}=\frac{z}{4}$，$\therefore$ $\frac{x+y+z}{9}=\frac{x+y-z}{1}$。

即 $\frac{x+y+z}{x+y-z}=\frac{9}{1}=9$； (3) $\frac{y+z-x}{z+x-y}=\frac{5}{3}$；

(4) $\frac{x+y}{y+z}=\frac{5}{7}$。

7．(1) 1:4；(2) 2:1； (3) 34:25； (4) $a:b$ 或 $c:d$。

8．提示：先证明$\frac{ma}{nd}=\frac{ma^3}{nb^3}$。

9．$x=9$，$y=12$，$z=15$。

10．$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AB\cdot CD+(AC+CD)BC$

$=AB\cdot CD+AC\cdot BC+CD\cdot BC$

$=CD(AB+BC)+AC\cdot BC=CD\cdot AC+AC\cdot BC$

$=AC(CD+BC)=AC\cdot BD$。

二、相交线和平行线

(一) 内容

1．角

(1) 角的度量：$1°=60'$，$1'=60''$。

(2) 角的分类：锐角($0°<\alpha<90°$)、直角 ($\alpha=90°$)、钝角($90°<\alpha<180°$)、平角($\alpha=180°$)和周角($\alpha=360°$)。

(3) 相关的角：

1）数量相关的角$\begin{cases}\text{互为余角：}\alpha+\beta=90^\circ,\\ \text{互为补角：}\alpha+\beta=180^\circ。\end{cases}$

2）位置相关的角：对顶角、内错角、同位角和同旁内角。

（4）有关角的重要性质：

1）同角（或等角）的余角相等；

2）同角（或等角）的补角相等；

3）对顶角相等；

4）角平分线上任意一点到这个角两边的距离相等；

5）到一个角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上。

2．垂线

（1）垂直公理：过一点可以引已知直线的一条垂线，并且只能引一条垂线。

（2）有关垂线的性质：

1）从直线外一点到这条直线的所有线段中，以垂直线段（从已知点到垂足间的线段）最短。（这条垂直线段的长叫做从这点到这直线的距离）；

2）在线段垂直平分线上的点到这条线段的两端的距离相等；

3）到一条线段两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上；

4）对应边互相垂直的两个角相等或互补。

3．平行线

（1）平行公理：过已知直线外的一个已知点，只能引一条直线和已知直线平行。

（2）判定定理

1）两条直线和第三条直线相交，如果具有下列条件中的