

大学数学辅助教材

# 大学数学教程 微积分解题指导

崔玉泉 蒋晓芸 许闻天 主编



山东大学出版社  
Shandong University Press

大学数学辅助教材

# 大学数学教程微积分解题指导

崔玉泉 蒋晓芸 许闻天 主编

山东大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分解题指导/崔玉泉,蒋晓芸,许闻天主编. — 济南:山东大学出版社,2002.8  
大学数学教程(2003.8重印)  
ISBN 7-5607-2488-4

I. 微... I. ①崔... ②蒋... ③许... III. 微积分—高等学校—解题  
IV. 0172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第064134号

山东大学出版社出版发行  
(山东省济南市山大南路27号 邮政编码:250100)  
山东省新华书店经销  
济南新华印刷厂印刷  
787×1092毫米 1/16 17.5印张 404千字  
2002年8月第1版 2003年8月第2次印刷  
印数:6001—14000册  
定价:24.00元

**版权所有,盗印必究**

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换

## 《大学数学教程微积分解题指导》编委会

主    编: 崔玉泉    蒋晓芸    许闻天

参编人员: 徐加义    崔    明    刘君义    刘    扬    张玉海  
          孙儒军    单沪军    王    玮    杜世田    张慕尧  
          吴    强    包芳勋    王照明    王自力    徐恭学  
          孙庆华    杨昌兰    刘爱奎    高夫征    潘建勋  
          方梅仙    宫献军    李乐学    刘华雯    王镇英  
          李文平    戎晓霞    张天德    娄永年    张焕玲  
          马克颖    叶    宏    祝精美    韩国平    王洪英  
          孙秋梅    王爱英    吕    同    陈燕来    牛智勇  
          郭    磊    高敏刚    李长峰

## 序

数学的发展可以归结为其基本问题的提出、尝试与解决。学习数学最有效的方法是通过演练一定数量的习题来洞悉前人的思想,从而提高独立解决问题的能力。正如 P. Halmos 总结的那样:“问题是数学的中心。”

高等数学是当代大学生应该具备的重要素养之一。山东大学理、工、医科学学生的全部,以及文科学生的绝大多数都必修高等数学课程。在教学过程中迫切需要一本指导书,帮助学生掌握正在学习的数学内容。为此,崔玉泉、蒋晓芸、许闻天三位老师在多年教学经验的基础上编写了这本书。我相信本书对广大学生会大有裨益,所以很高兴为之作序。

唐序

2003. 5. 15

# 前 言

大学数学是各专业一门重要的基础课。它不仅是学习其他专业的重要工具,同时也能使学生通过数学知识和方法的学习,获得理性思维的训练和数学美的享受,对培养和提高学生综合素质及能力具有重要意义。在大学数学的学习中,学生要理解基本概念,掌握基本理论,还要通过解题训练培养分析能力,体会数学思维的方法,这是保证和提高教学质量的一个至关重要环节。但是,数学思维方法的领会、分析问题能力的加强和解题水平的提高,仅仅靠阅读教材是不能完全满足这方面的需要,还必须通过课外解题以及习题课等多方面的总结归纳和动手训练。要做到这一点,需要有一本能帮助学生就整个学习内容进行复习、归纳和深化的书籍,它既有对基本内容简明扼要的总结,又有关于各种数学方法的综合;既有对数学思维的剖析,也有关于解题的启示;既能突出每部分的重点,又有关于各部分之间相互联系的分析。为此我们结合多年来从事大学数学及习题课教学的经验和长期积累的资料,编写了这本大学数学教程微积分解题指导,供教师和学生参考使用。

本书根据教育部有关非数学类大学数学微积分教学要求编写而成,对大学数学微积分的内容和方法作了比较系统的总结和概括。全书共十五章,每章由目的要求、内容提要、例题与分析、练习题四部分组成,每章都配合教材内容,在内容提要中扼要的叙述了各章的基本概念、定理、公式等,帮助学生将所学知识进行整理与归纳,选编的例题均为典型题目,除对例题进行了分析与详解外,还给出了解同类题目的一般方法及注意事项,题目难易适度,紧扣课本,是对书本知识的进一步巩固和加深,每章后面的练习是为帮助学生进一步了解和运用各章基本内容与方法而选配的,既有一般用以所学基本知识的练习题,也有一定难度的智力型综合练习题,书中附有练习题答案、模拟试题和2003年全国研究生入学考试的试题各一套,并给出了参考答案,可供学生自测和参考。

本书作者都是多年来从事大学数学及习题课教学的老师,他们在长期的教学中,积累了丰富的教学经验,为本书的编写付出了辛勤的劳动,全书由蒋晓芸负责统稿。在编写过程中我们参考了数学院有关老师编写的研究生入学考试数学参考材料,得到数学与系统科学学院羊丹平院长、刘建亚院长、吴臻院长等领导的大力支持,刁在筠、徐加义、曹惠中、刘保东等老师也提出了许多宝贵意见。另外,本书的出版还得到了山东大学出版基金和山东大学出版社的大力支持。对此一并表示衷心的感谢。

本书正式出版前,在山东大学1999级和2000级教学中试用,反映良好,经过补充完善后正式出版。但限于编者水平,时间又较仓促,缺点与疏漏,在所难免,恳望广大读者批评指正。

编 者  
2003年6月

# 第一章 函数、极限和连续

## 一、目的要求

- (1) 掌握函数的概念和性质,掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.
- (2) 理解复合函数、隐函数、分段函数以及反函数的概念.
- (3) 理解极限的描述性概念和性质,理解左、右极限的描述性概念以及极限存在与左、右极限之间的关系.
- (4) 掌握无穷小、无穷大的概念及其性质.
- (5) 掌握函数连续(在一点  $x_0$  处连续以及连续函数)的概念,理解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.
- (6) 会讨论有关定义域,函数值,函数表达式以及复合函数的问题,会建立简单应用问题中的函数关系式.
- (7) 熟练掌握极限的四则运算法则和两个重要极限,掌握极限的两个重要准则,能熟练运用上述结论以及等价无穷小,复合函数的极限公式等求各种极限.
- (8) 会利用定义讨论函数的连续性,会判断函数的间断点,会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题.

## 二、内容提要

### (一) 重要概念

#### 1. 函数的概念

(1) 函数 设有两个变量  $x$  和  $y$ , 如果对于区间  $D$  中的每一个  $x$  值, 按照一定的法则, 变量  $y$  都有一个确定的值与之对应, 则称变量  $y$  是  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量, 而  $D$  称为这个函数的定义域.

因此, 函数概念的两个要素是定义域和对应关系, 函数的表示只与定义域和对应关系有关而与使用什么字母无关.

(2) 反函数 设  $y$  是  $x$  的函数  $y = f(x)$ , 若把  $y$  当作自变量,  $x$  当作因变量, 即由关系式  $y = f(x)$  确定的新函数  $x = \varphi(y)$  称为原来函数  $y = f(x)$  的反函数. 由于习惯上记  $x$  为自变量,  $y$  为因变量, 故  $y = f(x)$  的反函数常记作  $y = \varphi(x)$  或  $y = f^{-1}(x)$ , 原来函数  $y = f(x)$  与其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形关于直线  $y = x$  对称.

(3) 基本初等函数 常量函数  $y = c$ , 幂函数  $y = x^a$ , 指数函数  $y = a^x$ , ( $a > 0, a \neq 1$ )

1) 对数函数  $y = \log_a x$  以及三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

对基本初等函数, 要掌握它们的定义域、图形、基本性质和主要公式.

(4) 复合函数 若对由函数  $u = \varphi(x)$  确定的变量  $u$  的值, 通过函数  $y = f(u)$  有确定的  $y$  值与之对应, 从而得到的一个以  $x$  为自变量,  $y$  为因变量的函数, 称为由函数  $y = f(u)$  和  $u = \varphi(x)$  复合而成的复合函数, 记作

$$y = f[\varphi(x)] \quad \text{或} \quad y = f(u), u = \varphi(x)$$

其中  $u$  称为中间变量.

某些复合函数是由基本初等函数多次复合而成.

(5) 初等函数 由基本初等函数经过有限次四则运算以及复合所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数. 它是高等数学课程中讨论的主要对象.

(6) 隐函数和分段函数 由因变量未解出的方程所确定的函数称为隐函数.

在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数, 常见的分段函数:

$$\textcircled{1} y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{符号函数} \quad y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

## 2. 数列极限的定义

给定数列  $\{x_n\}$ , 如果当  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限趋近于某个确定的常数  $a$ , 则  $a$  为  $n$  趋于无穷时数列  $\{x_n\}$  的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

此时称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ .

## 3. 函数极限的定义

(1) 给定一个函数  $y = f(x)$ , 在自变量  $x$  充分大时函数有定义, 如果当  $x$  无限增大时, 函数的值  $f(x)$  无限趋近于某个确定的常数  $a$ , 则称  $a$  是函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow +\infty).$$

(2) 设函数  $f(x)$  在自变量  $x$  充分小时有定义, 如果当  $x$  无限减小 ( $x \rightarrow -\infty$ ) 时, 函数的值  $f(x)$  无限趋近于某个确定的常数  $a$ , 则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow -\infty$  时以  $a$  为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow -\infty).$$

(3) 设对某个常数  $h > 0$ , 函数  $y = f(x)$  在实数集

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < h\}$$

上有定义, 如果当自变量  $x$  无限趋向于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近一确定的常数  $a$ , 则称  $a$  为当自变量  $x$  趋近于  $x_0$  时函数  $f(x)$  的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow x_0).$$



(4) 左、右极限  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限记成  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ,

$f(x)$  在  $x_0$  的右极限记成  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

函数极限和左、右极限的关系是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

该等价性常用来判断分段函数在分段点处是否有极限.

#### 4. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量 在自变量  $x$  的一定趋势 ( $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ) 下, 如果变量  $\alpha(x)$  的极限为零, 则称  $\alpha(x)$  为这种变化趋势下的无穷小量, 可记为  $\alpha(x) = o(1)$  ( $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ).

(2) 无穷小量的阶 设  $\alpha(x), \beta(x)$  都是自变量  $x$  在同一变化趋势下的无穷小量, 如果

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  高阶的无穷小, 记为  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ,

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c, (c \neq 0)$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是同阶的无穷小, 记为  $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ,

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是等价无穷小量, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c, (c \neq 0)$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的  $k$  阶无穷小量, 亦可记为  $\alpha(x) = O(\beta^k(x))$ ,

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ , (或  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ ), 则称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  低阶的无穷小量.

#### (3) 无穷大量

任意大的  $G > 0$ , 如果  $x \rightarrow x_0$  时, 恒有  $|f(x)| > G$ , 则称  $f(x)$  是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷大量.

显然, 不为零值的无穷小量的倒数是无穷大量, 反之, 无穷大量的倒数是无穷小量.

#### 5. 连续的概念

(1) 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内有定义, 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续.

由上面定义可知, 函数在点  $x_0$  连续有三个要求:

①  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域 (包括  $x_0$ ) 内有定义;

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,

③  $f(x)$  在  $x_0$  的函数值恰等于极限值, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(2) 左连续和右连续 设  $\delta > 0$  为某一任意小的正数, 若  $f(x)$  在  $x_0$  的左邻域  $(x_0 - \delta, x_0]$  内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  点左连续. 类似可定义函数

$f(x)$  在  $x_0$  点右连续.

显然,  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续  $\Leftrightarrow f(x)$  在点  $x_0$  左连续且右连续.

(3) 函数  $f(x)$  在区间上连续的概念 设函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内有定义且  $\forall x_0$

$\in (a, b)$ , 恒有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 或  $f(x)$  是  $(a, b)$  内的连续函数.

如果函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续且在左端点  $x = a$  处右连续, 在右端点  $x = b$  处左连续, 则称  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 或  $f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上的连续函数.

(4) 函数的间断点 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处, (1) 中三个要求中有任何一个不满足, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处不连续, 点  $x_0$  称为  $f(x)$  的间断点.

其中, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在但不相等, 或  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ , 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的第一类间断点, 后者又称为可去间断点.

若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  中至少有一个不存在, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的第二类间断点, 若其中至少有一个是  $\infty$ , 则又称为  $f(x)$  的无穷间断点.

## (二) 重要性质

### 1. 函数 $f(x)$ 的性质

(1) 奇偶性 设函数  $f(x)$  在区间  $D$  上有定义, 如果  $\forall x \in D$ , 恒有  $f(x) = f(-x)$  (或  $f(x) = -f(-x)$ ), 则称  $f(x)$  为区间  $D$  上的偶函数 (或奇函数).

显然, 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不具有奇偶性. 另外, 从函数的图像看, 偶函数关于  $y$  轴对称, 奇函数关于坐标原点对称.

(2) 周期性 设函数  $f(x)$  在区间  $D$  上有定义, 若存在一个与  $x$  无关的正数  $T$ , 使对任一  $x \in D$ , 恒有  $f(x+T) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数, 并且通常把满足关系式的最小正数称为函数  $f(x)$  的周期.

若  $f(x)$  的周期是  $T$ , 则函数  $f(ax+b)$  亦是周期函数, 周期为  $\frac{T}{|a|}$ , 并且若  $f(x)$ ,  $g(x)$  分别是以  $T_1, T_2$  为周期的函数, 则  $f(x) \pm g(x)$  是以  $T_1, T_2$  的最小公倍数为周期的周期函数.

(3) 有界性 设函数  $f(x)$  在区间  $D$  上有定义, 如果存在  $M > 0$ , 使对一切  $x \in D$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在区间  $D$  上有界, 否则,  $f(x)$  在  $D$  上无界.

注意, 函数  $f(x)$  有界或无界是相对于某个区间而言, 无穷大量是相对于某一点的一个变化过程, 因此是不同的概念,  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内无界是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  的必要条件, 而  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  是  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域无界的充分条件. 例如函数

$y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上无界, 但当  $x \rightarrow +0$  时,  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  不是  $\infty$ .

(4) 单调性 设函数  $f(x)$  在区间  $D$  上有定义, 如果  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ , 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上是单调增加 (单调减少) 的.

### 2. 数列极限的性质

(1) 有界性 若数列  $\{x_n\}$  收敛, 则数列  $\{x_n\}$  有界, 反之不真, 但单调有界数列必收敛.

(2) 夹逼性 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 且有  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

### 3. 函数极限的性质

(1) 如果  $f(x) \geq g(x)$ , 而  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则有  $A \geq B$ .

(2) 保号性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在  $x_0$  的某个去心邻域  $u = \{x | 0 < |x - x_0| < h\}$ , 当  $x \in u$  时, 恒有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

反之, 若在  $x_0$  的某个去心邻域  $u$  恒有  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ) 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

(3) 夹逼性 若当  $x \in \{x | 0 < |x - x_0| < h\}$  (或  $|x| > M$ ) 时, 恒有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$ , 则  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$ .

### 4. 闭区间上连续函数的性质

设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则有:

(1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

(2) 最大、最小值定理  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有最大值和最小值, 即至少存在点  $\xi$  和  $\eta \in [a, b]$ , 使对一切  $x \in [a, b]$ , 有  $f(\eta) \leq f(x) \leq f(\xi)$ .

(3) 介值定理 设  $\mu$  是介于  $f(a), f(b)$  [ $f(a) \neq f(b)$ ] 间的任何一个数, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = \mu$ .

(4) 零值定理 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

### (三) 重要运算性质和公式

#### 1. 极限的四则运算法则

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$  ( $A, B$  均为有限数), 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, (\text{当 } B \neq 0).$$

#### 2. 极限存在的两个准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则 (见 (二), 2, 3).

#### 3. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

#### 4. 无穷小量的运算性质

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(4) 等价无穷小代换. 设  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  是自变量同一变化过程中的无穷小且  $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$

$\beta', \lim \frac{\beta}{\alpha}$  存在, 则  $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta'}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha'} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$ .

注意:

- ① 作等价无穷小代换时, 只能代换乘积中的无穷小因子而不能代换和、差中的因子.
- ② 当  $x \rightarrow 0$  时, 常用的与  $x \rightarrow 0$  等价的无穷小有:

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, (1+x)^n - 1 \sim nx, (1-ax)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim -\frac{a}{n}x \text{ 等.}$$

### 5. 连续函数的运算性质

(1) 连续函数的四则运算 若  $f(x), g(x)$  在点  $x_0$  连续, 则  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, (g(x_0) \neq 0)$  在点  $x_0$  处亦连续.

(2) 反函数的连续性 设  $y = f(x)$  是区间  $[a, b]$  上单值、严格单调的连续函数且  $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ , 则其反函数  $y = \varphi(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上也单调连续.

(3) 复合函数的连续性 设函数  $y = f(u)$  在点  $u = u_0$  连续,  $u = \varphi(x)$  在点  $x = x_0$  连续且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x = x_0$  连续.

复合函数的连续性又可写成:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)]$$

$$\text{或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow a} f(u), \quad [u = \varphi(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a].$$

上面两个式子在求复合函数的极限时常常用到, 第一个式子表示求复合函数  $f[\varphi(x)]$  的极限时, 函数符号  $f$  与极限号可以交换次序, 第二个式子表示求极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$  时, 可以作代换  $u = \varphi(x)$ , 化为  $f(u)$  求  $u \rightarrow a$  时的极限.

## 三、例题与分析

### 1. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时, 常常利用函数表达式与所用字母无关的特性.

**例 1** 设  $f(x)$  满足方程  $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$ , 其中  $a, b, c$  为常数且  $|a| \neq |b|$ , 求  $f(x)$  并证明它是奇函数.

**分析** 由  $f(x)$  所满足的方程, 无法直接求出  $f(x)$  的表达式, 但作代换令  $x = \frac{1}{t}$ , 可以得到新的方程, 联立并消去  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  即可解出  $f(x)$ , 再利用奇函数定义即可证之.

**解** 在原方程中作代换  $x = \frac{1}{t}$ , 可得  $af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct$ , 即

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx,$$

与原方程联立, 并消去  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 可解出  $f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(\frac{a}{x} - bx\right)$ ,

又  $f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left( -\frac{a}{x} + bx \right)$ ,  $f(x) + f(-x) = 0$ , 故  $f(x)$  为奇函数.

### 2. 关于求反函数

求  $y = f(x)$  的反函数, 首先由  $y = f(x)$  解出  $x = \varphi(y)$ , 再把所得表达式中的  $x$  与  $y$  对换, 即得所求函数的反函数.

例 2 设  $f(x) = \begin{cases} x, & -2 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2; \\ 2^x, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$  求  $f^{-1}(x)$ .

分析  $f(x)$  是分段函数, 因此要分别求出各区间段的反函数及定义区间

解 由  $y = x$ ,  $-2 < x < 1$ , 可得  $x = y$ ,  $-2 < y < 1$ .

故它的反函数是  $y = x$ ,  $-2 < x < 1$ .

由  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , 可得  $x = \sqrt{y}$ ,  $1 \leq y \leq 4$ .

故其反函数是  $y = \sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ .

由  $y = 2^x$ ,  $2 < x \leq 4$ , 可得  $x = \log_2 y$ ,  $4 < y \leq 16$ ,

故其反函数是  $y = \log_2 x$ ,  $4 < x \leq 16$ ,

所以  $f(x)$  的反函数是  $y = \begin{cases} x, & -2 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4; \\ \log_2 x, & 4 < x \leq 16. \end{cases}$

### 3. 关于复合函数

将两个或两个以上函数进行复合, 求其表达式主要是使用代入法, 即把一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量即得由这两个函数构成的复合函数.

而要讨论含有分段函数的复合函数, 应抓住最外层函数定义域的各区间段, 再结合中间变量的表达式和中间变量的定义域进行分析.

#### 例 3 求下列复合函数

(1) 设  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , 求  $f[f(f(x))]$  及其定义域  $D$ .

(2) 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$   $g(x+1) = x^2 + x + 1$ , 求  $f[g(x)]$  及  $g[f(x)]$ .

分析 (2) 中出现分段函数, 求  $f[g(x)]$  时, 外层是分段函数, 先求出  $g(x)$  的表达式, 再依  $g(x) > 0$  或  $g(x) < 0$  代入  $f(x)$  的表达式, 求  $g[f(x)]$  的表达式  $g[f(x)] = f^2(x) - f(x) + 1$  应先求出  $f^2(x)$  后依  $f^2(x) - f(x) + 1$  大于零或小于零一并代入, 得到的依然是分段函数.

解 (1)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ,  $x \neq -1$ , 所以  $f[f(x)] = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = -\frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

$$f[f(f(x))] = \frac{f[f(x)]-1}{f[f(x)]+1} = \frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1} = \frac{1+x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

定义域为  $x \neq -1, 0, 1$ .

(2)  $g(x+1) = x^2 + x + 1 = x^2 + 2x + 1 - x = (x+1)^2 - x - 1 + 1$

$$= (x+1)^2 - (x+1) + 1.$$

所以  $g(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$

因为  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$  所以,  $f[g(x)] = g(x) = x^2 - x + 1.$

$$g[f(x)] = f^2(x) - f(x) + 1.$$

又因为  $f^2(x) = f(x) \cdot f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

所以  $g[f(x)] = \begin{cases} 0 - 0 + 1, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$

即  $g[f(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$

#### 4. 利用极限存在准则求极限

利用夹逼定理求极限, 要对数列(或函数)进行适当放大或缩小, 并注意夹逼两端的极限值一定要相同.

**例 4** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$

**分析** 分析  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ , 它是  $n$  项之和, 虽然无法求出其和, 但各项之间递减, 因此可以将  $x_n$  进行放大, 缩小, 试用夹逼定理.

**证** 记  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$

则  $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

故由夹逼定理  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$  证毕.

**例 5** 设  $x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  有极限并求:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

**分析** 先利用极限存在准则, 判别  $\{x_n\}$  是单调有界数列, 因此极限存在, 然后再求极限.

**证明** 因为  $x_1 = 1 > 0$  且  $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}},$

所以显然有  $0 < x_n < 2$ , 即  $\{x_n\}$  有界.

下面利用归纳法证明单调性

由于  $x_2 = 1 + \frac{1}{1+1} > 1 = x_1$ ,

不妨设  $x_n > x_{n-1}$  成立,

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{x_n}{1+x_n}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})},$$

所以  $x_{n+1} - x_n > 0$ ,

故  $\{x_n\}$  单调增加. 所以  $\{x_n\}$  有极限.

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{则 } a = 1 + \frac{a}{1+a},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (舍去).}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### 5. 常见的求极限问题

包括数列极限和函数极限,这是高等数学中最重要运算之一. 常用求极限的方法有:

- (1) 极限的四则运算法则.
- (2) 两个重要极限.
- (3) 等价无穷小代换.
- (4) 函数的连续性以及复合函数求极限法则.

在求极限过程中,要灵活选用适当的方法,并注意及时将被求极限式化简以及作恒等变换将其变形. 除了上述方法外,在第三章中,我们还要介绍求未定式极限的洛必达法则以及泰勒公式等方法.

**例 6** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ .

**分析** 利用对数性质可化为求  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ,再利用对数函数的连续性及其第二个重要极限即可求出极限.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

**例 7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ .

**分析** 直接求极限比较困难,因此进行变换  $u = a^x - 1$ ,则  $x = \log_a(1+u)$ ,且  $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) = 0$ ,于是转换为求  $u \rightarrow 0$  的极限.

**解** 作代换  $u = a^x - 1$ ,于是由复合函数的连续性,有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}} \\ &= \frac{1}{\log_a\left(\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \end{aligned}$$

**例 8** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \frac{\sin x}{x}}$ .

**分析** 该极限可利用第一个重要极限及连续函数的极限,即可求出.

**解** 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$  及函数  $f(u) = \sqrt{u}$  在点  $u_0 = 1$  的连续性.

因此有  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 + \frac{\sin x}{x} \right)} = \sqrt{1} = 1$ .

**例 9**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ , 求  $a, b$ .

**分析** 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$  若有有限极限, 必须  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ .

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ . 由题意必须  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ .

即  $1 + a + b = 0, b = -1 - a$ .

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1 + a)}{x - 1} = 2 + a$ ,

故  $\begin{cases} 2 + a = 3 \\ b = -1 - a \end{cases}$  解得  $a = 1, b = -2$ .

**例 10** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ .

**分析** 可利用极限的性质, 四则运算法则来求极限. 由于  $\sin n\pi = 0$ , 因此, 可首先利用和差化积公式, 而后利用极限的四则运算法则及无穷小量的性质求出该极限.

**解** 
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) - \sin n\pi] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \cos \frac{\pi \sqrt{n^2 + 1} + n\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \left( \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{2} \pi \right) \cdot \sin \left[ (\sqrt{n^2 + 1} - n) \cdot \frac{\pi}{2} \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left( \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{2} \pi \right) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$ , 而  $|\cos \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{2} \pi| \leq 1$ , 由有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量, 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = 0$ .

**例 11** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**分析** 由于  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\cos x}{\cos 2x} \rightarrow 1$ , 而  $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ , 故可考虑用第二个重要极限.

**解** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x}{\cos 2x} \right)^{\frac{\cos 2x}{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x} \cdot \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos 2x}} \end{aligned}$$



因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3}{2}x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2\sin \frac{x}{2}}{x} \right) \cdot \left( \frac{\sin \frac{3}{2}x}{x} \right) \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}$ .

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}$ .

**例 12** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\ln(1+x\sin x)}$ .

**分析** 当  $x \rightarrow 0$  时, 分子分母均为无穷小量, 分子含有根号, 可首先分子有理化, 又分母  $\ln(1+x\sin x) \sim x\sin x (x \rightarrow 0)$ , 故可结合利用等价无穷小代换求极限.

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x + 1 - \cos^2 x}{(\sqrt{1+x\sin x} + \cos x) \cdot \ln(1+x\sin x)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x + \sin^2 x}{(\sqrt{1+x\sin x} + \cos x) x\sin x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{(\sqrt{1+x\sin x} + \cos x) x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(\sqrt{1+x\sin x} + \cos x)} + \frac{\sin x}{(\sqrt{1+x\sin x} + \cos x) x} \right]$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

### 6. 关于函数的连续性

**例 13** 讨论  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  的连续性.

**分析** 本题主要考虑在  $x=0$  点处函数的连续性, 因为  $x \neq 0$  时, 函数显然是连续的.

**解** 当  $x \neq 0$  时,  $f(x)$  显然处处连续.

在  $x=0$  处,  $f(0) = 0$ , 又  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ ,

故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 因此  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 所以  $f(x)$  是连续函数.

**例 14** 讨论  $f(x) = [x]$  的连续性.

**分析** 函数  $[x]$  表示  $x$  的整数部分, 因此考虑该函数的连续性, 就要分别考虑两种情况, 一种是当  $n < x < n+1$  时,  $n$  为整数; 另一种是当  $x = n$  时.

**解** 当  $n < x_0 < n+1$  时, 则  $f(x_0) = n$  ( $n$  为整数), 此时  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = n$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n$ , 故  $f(x)$  在  $x_0$  处连续.

当  $x_0 = n$  时,  $f(x_0) = n$ , 此时  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = n-1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n$ .

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  点上是间断的,  $x_0$  是  $f(x)$  的第一类间断点.

**例 15** 若  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 3x, & 0 \leq x < 1 \\ e^{2ax} - e^{ax} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  在  $x=1$  连续, 求  $a$ .

**分析** 本题关键是讨论  $x=1$  处的连续性, 分别讨论左、右连续.