全国各类成人高考强化应试指导

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套辅导用书

目标短期强化系列

Intensive Training Package

Advanced Mathematics（Ⅰ）

高等数学（一）

强化应试指导

专科起点升本科

主编 姚唐生

TERRACE 徕田

中国时代经济出版社

目标短期强化系列

全国各类成人高考强化应试指导

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套辅导用书

（专科起点升本科）

高等数学(一)
强化应试指导

主　编　姚唐生

中国时代经济出版社

目　　录

第一章　一元函数、极限、连续

要点提示

1. 一元函数

(1) 定义：设 x、y 为某变化过程中的两个变量.

若 x 在允许范围内，每取一个值，y 按规则 f，总有惟一值与之对应.

则称 y 是 x 的一元函数，记作 $y = f(x)$.

且称 x 为自变量，其取值范围为定义域. 记作 D. y 为因变量，其取值范围为值域，记作 Z.

(2) 分类

- 初等函数
  - 基本函数
    - ① 常量函数　$y = a$
    - ② 幂函数　$y = x^a$
    - ③ 指数函数　$y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
    - ④ 对数函数　$y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
    - ⑤ 三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, \cdots$
    - ⑥ 反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, \cdots$
  - 简单函数
  - 复合函数
- 分段函数
- 隐函数

注　① 结构最简单的初等函数，统称基本函数.

② 由基本函数仅在加、减、乘、除四则运算范围内而构成的初等函数，统称为简单函数.

③ 由基本函数或简单函数在乘方、开方、指数、对数、三角、反三角的运算范围内而构成的初等函数，统称为复合函数.

(3) 确定定义域的主要思路：

① 函数的分母部分不能为零.

② 函数的偶次根式内被开方的部分不能为负.

③ 函数的对数符号后的真数部分大于零.

④ 由 $f(x)$ 的定义域$[a,b]$，确定 $f[\varphi(x)]$ 的定义域时，可令 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$，此不等式的解即 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

(4) 确定函数表达式的主要思路：

① 由 $f(x)$ 的表达式，确定 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，可用替换法，将 $\varphi(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 即可.

② 由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式确定 $f(x)$ 的表达式，可用换元法或拼凑法.

(5) 确定函数奇偶性的思路：

① 据函数奇偶性的定义：当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 或 $(-a, a)$，$(a > 0)$ 时，若 $f(-x) = -f(x)$（或

$f(x)$),则称 $f(x)$ 在($-\infty, +\infty$)或($-a, a$)内有奇性(或偶性).

② 据奇、偶函数图形特点:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(6) 确定函数单调增、减性的思路:

① 据函数的增减性的定义:当 $x \in [a,b]$ 时,若 $a < x_1 < x_2 < b$,且 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增加(或单调减少).

② 据单调函数的图形特点:增函数的图形沿 x 轴正向上升. 减函数的图形沿 x 轴正向下降.

2. 数列极限

(1) 定义:给数列$\{a_n\}$,即 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 随着 n 的无限增大,若相应的项 a_n 无限接近一个常数 A,则称此数列$\{a_n\}$有极限,其极限即 A. 记作 $n \to \infty, a_n \to A$,或$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 否则此数列无极限,即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

(2) 两个特殊数列的极限:

常数列$\{a\}$,即 $a, a, a, \cdots, a, \cdots$ 其极限为 a.

数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$,即 $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ 其极限为 0.

数列$\{n\}$,即 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 无极限. 可记作$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

(3) 四则运算法则:

已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$.

若 $\lim a_n = A, \lim b_n = B$

则
$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = A \pm B$$
$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = A \cdot B$$
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

重要极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

确定数列极限的思路:利用恒等变形,将数列的通项化为两个特殊数列$\{a\}$及$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的极限及其四则运算即可.

3. 函数的极限

(1) 定义:已知函数 $f(x)$. 当自变量 x 无限增大(或无限接近于一点 x_0),若 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A,则称此函数有极限. 记作 $x \to \infty$ 或 $x \to x_0$ 时,$f(x) \to A$ 或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$(或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$). 否则此函数无极限. 记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$(或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$)不存在.

且称 $x \to -\infty$(或 $x \to x_0^-$)时,$f(x)$ 的极限为左极限.

$x \to +\infty$(或 $x \to x_0^+$)时,$f(x)$ 的极限为右极限.

(2) 极限存在的充分必要条件:函数 $f(x)$ 的左、右极限均存在并且相等.

即 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

(3) 基本初等函数的常见极限:

$\lim c = c$; $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$； $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$； $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$；

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$； $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；

$\lim\limits_{x\to 0}\ln x$ 不存在； $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 振荡不存在； $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 振荡不存在； $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$； $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$； $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在； $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$ 不存在.

(4) 四则运算法则：

已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$

若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B.$

则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$

$\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0).$

4. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义：在某变化过程中，极限为零的变量为无穷小量. 而在某变化过程中，绝对值无限增大的变量为无穷大量.

(2) 性质：无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量.

(3) 关系：在某变化过程中，无穷小量的倒数为无穷大量（零除外）. 无穷大量的倒数为无穷小量.

(4) 阶的比较：

已知 α 与 β 均为无穷小量，即 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0$

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则 α 与 β 比是较高的无穷小量.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则 α 与 β 比是较低的无穷小量.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$. 则 α 与 β 比是同阶的无穷小量.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则 α 与 β 比是同阶等价的无穷小量.

5. 函数的连续

(1) 定义：

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且与 $f(x_0)$ 相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续. x_0 为连续点，否则 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，即间断，x_0 为间断点.

(2) 间断点的类型：

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，但不相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $f(x_0)$ 不存在，或 $f(x_0)$ 存在，但 $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

③ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，

则称点 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

④ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 振荡不存在，

则称点 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

其中第 ①、② 两种间断点称为第一类间断点. 第 ③、④ 种间断点称为第二类间断点.

(3) 连续区间：

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上每一点均连续，

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

且称 $[a,b]$ 为 $f(x)$ 的连续区间.

(4) 性质：

连续函数的和、差、积、商仍连续.

连续函数的乘方、开方、取对数等复合仍连续.

(5) 初等函数的连续性：

① 基本初等函数在其定义区间上连续.

② 由基本初等函数经过四则运算构成的简单初等函数在其定义区间上连续.

③ 由基本函数或简单函数经乘方、开方、取对数等复合而成的函数在其定义区间上连续.

6. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$$

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

7. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

考题精析

(一) 有关“函数表达式”的试题

注 此知识点已在 1994、1996、1998、2001、2002 年的试卷中，以填空的题型考查过 5 年了，下面就近两年的试题加以分析.

1. (2002 年，填空) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=$______.

此题考查考生是否理解函数符号 $f(x)$ 与 $f[\varphi(x)]$ 的含义，是否会由给定函数 $f(x)$ 的表

达式,确定函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式.

考虑这类题的思路:将 $\varphi(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x,即可得到 $f[\varphi(x)]$ 的表达式.

此题解答如下:

由 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,得 $f[f(x)]=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$ 或 $f[f(x)]=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$.

2.(2001 年,填空) 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x^2}$,则 $f(x)=$ ______.

此题考查考生是否会由给定函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,确定函数 $f(x)$ 的表达式.(注:与上题截然相反.)

考虑这类题的思路:可用换元法或拼凑法.若换元,则令 $\varphi(x)=u$,并解得 $x=\varphi^{-1}(u)$,将之分别代入函数 $f[\varphi(x)]$ 的等号两边,即可得到 $f(u)$ 的表达式,再将 u 改写为 x,即所求 $f(x)$ 的表达式.

若不换元,可将函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,恒等变形为仅含 $\varphi(x)$ 的形式,再将 $\varphi(x)$ 改写为 x,即所求 $f(x)$ 的表达式.

此题解答如下:

换元法: 令 $\dfrac{1}{x}=u$,得 $x=\dfrac{1}{u}$,将之分别代入 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x^2}$ 的等号两边,即 $f(u)=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{\left(\frac{1}{u}\right)^2}=\dfrac{1}{u}+u^2$,再将 u 改写为 x,即所求函数为 $f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$.

拼凑法: 以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 中的 $\dfrac{1}{x}$ 为基准,将其表达式 $x+\dfrac{1}{x^2}$ 恒等变形为 $\dfrac{1}{\frac{1}{x}}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$,即 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$,再将 $\dfrac{1}{x}$ 改写为 x,即所求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$.

有的考生不理解这类函数符号的含义,不知道如何由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式确定 $f(x)$ 的表达式.

(二) 有关"分段函数函数值"的试题

注 此知识点已在 2000 年的试卷中,以填空的题型考查过 1 年了.

(2000 年,填空) 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$ 则 $f(0)=$ ______.

此题考查考生是否理解分段函数表达式的含义,是否会求分段函数的函数值.

考虑这类题的思路:要看准求 $f(x)$ 在哪一点的值.若此点即分段点,用 $f(x)$ 的哪段表达式求.若此点不在分段点处,用 $f(x)$ 的哪段表达式求.

此题解答如下:

要求的 $f(0)$ 是分段函数 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 处的值.由 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=\cos x$,而 $x>0$ 时,$f(x)=\sqrt{x}$.可知 $f(0)=\cos 0=1$.

有的考生不理解分段函数的符号含义,因而用 $f(x)=\sqrt{x}$ 求 $f(0)$,得 0 就错了.

(三) 有关"函数定义域"的试题

注 此知识点已在 1997 年的试卷中,以选择的题型考查过 1 年了.

(1997 年,选择)　函数 $y=\frac{1}{x}\ln(2+x)$ 的定义域为(　　)

A. $x\neq -2$ 且 $x\neq 0$　　　　B. $x>0$

C. $x>-2$　　　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$

此题考查考生是否会据函数的表达式,确定函数的定义域,即自变量 x 的取值范围.

考虑这类题的主要思路:函数的表达式,若为分式,其分母不能为零,即大于零或小于零.若为无理式,其偶次根号内的被开方部分不能为负,即大于零或等于零.若为对数式,其真数部分不能小于零及等于零,即大于零.

此题解答如下:

由分式 $\frac{1}{x}$ 可知 $x\neq 0$,由对数式 $\ln(2+x)$ 可知 $2+x>0$,即 $x>-2$,因而定义域为 $x>-2$ 且 $x\neq 0$,应选 D.

(四)有关"函数奇偶性"的试题

注　此知识点已在 1995、1999 年的试卷中,以选择、解答的题型考查过两年了.

1. (1995 年,选择)　函数 $f(x)=\cos x^3$ 在直角坐标平面上的图形关于(　　)对称.

A. x 轴　　B. y 轴　　C. 原点　　D. 直线 $y=x$

此题考查考生是否理解奇偶函数的定义,及奇偶函数的图形在坐标平面上关于原点关于 y 轴的对称性.

考虑这类题的思路:要熟悉理解函数奇偶性的定义:当 $x\in(-a,a)$,$a>0$,或 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 内为奇函数.若 $f(-x)=f(x)$.则 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 内为偶性.

还要熟悉奇偶函数的运算性质:两奇函数的和、差仍为奇函数,积、商为偶函数.两偶函数的和、差、积、商仍为偶函数.一奇,一偶两函数的和、差是非奇非偶函数.积、商是奇函数.

奇偶函数的图形特点是:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

此题解答如下:

由 $f(-x)=\cos(-x)^3=\cos x^3=f(x)$.(注:余弦函数的负角诱导公式为 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$)

可知 $f(x)=\cos x^3$ 是偶函数,因而其图形关于 y 轴对称.应选 B.

2. (1999 年,解答)　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为奇函数,判定 $F(x)=f(x)(2^x+2^{-x})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇偶性.

此题解答如下:

设 $g(x)=2^x+2^{-x}$,由 $g(-x)=2^{-x}+2^x=g(x)$,可知 $g(x)$ 是偶函数,又 $f(x)$ 是奇函数,可知 $f(x)g(x)$ 为奇函数,即 $F(x)=f(x)(2^x+2^{-x})$ 为奇函数.

(五)有关"极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$"的试题

注　此知识点已在 1994、1996、1998、2000、2001 年的试卷中,以选择、填空、解答的题型考查过 5 年了.

1. (2000 年,解答)　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

此题考查考生是否会用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及其变形 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 以及扩大理

解的 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$ 求极限

考虑这类题的思路：将要求的极限，经过换元，并用幂指数的运算法则，化为重要极限的基本形式. 或不换元，直接恒等变形，化为重要极限的扩大理解的形式.

此题解答如下：

由幂指数的运算法则. 如：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$. $a^{mn}=(a^m)^n$，$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，… 可知

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-1}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\text{ 或 }\mathrm{e}^{-2}.$$

有的考生对指数运算这部分初等数学的知识想不起用，不会用.

2.（2001 年，填空） 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$，则 $k=$______.

解法(1)：令 $\dfrac{k}{x}=u$，得 $x=\dfrac{k}{u}$，当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$

$$\because\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to 0}(1+u)^{\frac{2k}{u}}=[\lim_{x\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{2k}=\mathrm{e}^{2k}.$$

令 $\mathrm{e}^{2k}=\mathrm{e}$，得 $2k=1$，可知 $k=\dfrac{1}{2}$.

解法(2) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{2k}=\mathrm{e}^{2k}$，

令 $\mathrm{e}^{2k}=\mathrm{e}$，得 $2k=1$，可知 $k=\dfrac{1}{2}$

有的考生不会将重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

（六）有关“无穷小量”的试题

注 此知识点已在 1994、1995、1997、1998、2000、2001、2002 年的试卷中，以选择、填空的题型考查过 7 年了.

1.（2001 年，选择） 当 $x\to 0$ 时，（ ）是无穷小量.

A. $2x-1$ B. $x^2+\sin x$ C. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ D. $\dfrac{\sin x}{x}$

此题考查考生是否理解无穷小量的概念.

考虑这类题的思路：在给定的变化过程中，若变量的极限为零，则此变量为无穷小量，否则，此变量不是无穷小量.

此题解答如下：

由 $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\sin x)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$.

可知 $x\to 0$ 时，变量 $x^2+\sin x$ 是无穷小量. 应选 B.

2.（2002 年，选择） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=$（　）

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

此题考查考生是否熟练，掌握“无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量”这个无穷小量的运算性质.

考虑这类题的思路：当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时，若变量 $f(x)\to 0$，且变量 $|g(x)|\leqslant M$，即变量 $g(x)$ 有界，则变量 $f(x)\cdot g(x)$ 仍是无穷小量. 因而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)=0$. 例如 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$.

此题解答如下：

由 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，而 $\sin 2x$ 振荡无极限，但 $|\sin 2x|\leqslant 1$，即 $\sin 2x$ 有界，可知 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\sin 2x$ 是无穷小量. 因而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin 2x=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=0$，应选 A.

有的考生考虑极限问题时，忽略变量的变化过程，只记表达式. 如，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，就误认为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{sim } x}{x}=1$. 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，就误认为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，…

3.（2000 年，选择） 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 与 x 比较是（　　）的无穷小量.

A. 高阶　　B. 等价　　C. 同阶非等价　　D. 低阶

此题考查考生是否掌握无穷小量之间阶的比较.

考虑这类题的思路：当 $\lim f(x)=0$ 且 $\lim g(x)=0$ 时，

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则 $f(x)$ 比 $g(x)$ 的阶较高.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则 $f(x)$ 比 $g(x)$ 的阶较低.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的阶相同.

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶等价.

此题解答如下：

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$，可知 $x\to 0$ 时，两个无穷小量 $x^2-\sin x$ 与 x 是同阶非等价的，应选 C.

（七）有关“函数在一点连续或间断”的试题

注　此知识点已在 1994、1995、1996、1998、1999、2000、2001、2002 年的试卷中，以选择、填空、解答的题型考查过 8 年了.

1.（2001 年，选择） 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ \mathrm{e}^x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 的（　）

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 第二类间断点　　D. 不是可去的第一类间断点

此题考查考生是否理解函数在一点连续的概念，是否会确定间断点的类型.

考虑这类题的思路：

若 $f(x_0)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 均存在且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

否则称 $f(x)$ 在 x_0 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. 则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 均存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而 $f(x_0)$ 不存在，一旦修改或补充 $f(x)$ 在 x_0 处的定义，可使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. 即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 振荡不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

跳跃与可去的间断点统称第一类间断点，无穷与振荡的间断点统称第二类间断点.

此题解答如下：

由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，又 $f(0) = e^0 - 1 = 0$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

可知 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的连续点，应选 A.

2.（2002 年，解答）　设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan ax}{x}, & x < 0, \\ x + 2, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，求 a 值.

此题解答如下：

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\tan ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(x + 2)$，即 $a = 2$.

强化训练题

(一) 单项选择题

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，则 $f(2x - 1)$ 的定义域为(　　)

A. $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$　　C. $[0,1]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$

2. 设 $f(x) = 2^{x-1}$，则 $f^{-1}(x) =$ (　　)

A. $\log_2(x + 1)$　　B. $\log_2 x + 1$　　C. $\dfrac{1}{2}\log_2 x$　　D. $2\log_2 x$

3. 设 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{a^x + 1} - \dfrac{1}{2}\right)$ 是(　　)函数.

A. 奇　　B. 偶　　C. 非奇非偶　　D. 既奇又偶

4. $x = 1$ 是函数 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ 的(　　)

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 无穷间断点

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$(　　)

A. 等于 -1　　B. 等于 0　　C. 等于 1　　D. 不存在

6. 在指定的变化过程中,(　　)是无穷小量.

A. $\sin\dfrac{1}{x},(x\to 0)$　　B. $e^{\frac{1}{x}},(x\to 0)$

C. $\ln(1+x^2),(x\to 0)$　　D. $\dfrac{x-3}{x^2-9},(x\to 3)$

7. 当 $x\to 0$ 时,$\sin(2x+x^2)$ 与 x 比较是(　　)的无穷小量.

A. 高阶　　B. 同阶　　C. 等价　　D. 低阶

8. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0, \\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ 在(　　)

A. $x=0,x=1$ 处均间断

B. $x=0$ 处间断,在 $x=1$ 处连续

C. $x=0,x=1$ 处均连续

D. $x=0$ 处连续,在 $x=1$ 处间断

9. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$(　　)

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 极限(　　)正确.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

11. 函数 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\leqslant -2, \\ -x, & -2<x<0, \\ x, & 0\leqslant x<2 \end{cases}$ 的定义域为(　　)

A. $[-2,2)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(-\infty,-2)\cup(-2,2)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

12. 函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0, \\ 1+\cos x, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　)

A. 等于 1　　B. 等于 2　　C. 等于 0　　D. 没定义

13. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义.则 $F(x)=f(-x)+f(x)$ 为(　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 单调函数

14. 函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$(　　)

A. 在$(-\infty,+\infty)$内单增　　B. 在$(-\infty,0)$内单增

C. 在$(-\infty,+\infty)$内单减　　D. 在$(0,+\infty)$内单增

15. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$(　　)

A. 等于 0　　B. 等于 1　　C. 等于 ∞　　D. 不存在但不是 ∞

16. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$(　　)

A. 等于 0　　B. 等于 1　　C. 等于 ∞　　D. 不存在但不是 ∞

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=$(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

18. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在的(　　)条件.

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充分且必要　　D. 非充分非必要

19. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的(　　)条件.

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充分且必要　　D. 非充分非必要

20. 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的(　　)条件.

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充分且必要　　D. 非充分非必要

(二) 填空题

1. 函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域为________.

2. 设 $f(x)=3x+5$,则 $f[f(x)-2]=$________.

3. 设 $f(x^2+1)=x^4+3x^2+2$,则 $f(x)=$________.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=$________.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{(x+2)^3}=$________.

6. $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \end{cases}$ 的第________类间断点.

7. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}=3$,则 $a=$________.

8. 当 $x\to 0$ 时,ax^2 与 $\tan\dfrac{x^2}{4}$ 是等价的无穷小量,则 $a=$________.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3n}=$________.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}=$________.

11. 设 $y=3^u, u=v^2, v=\tan x$,则复合函数 $y=f(x)=$________.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} a\,\mathrm{e}^x, & x<0, \\ 2+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=$________.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=$________.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2}{n}=$________.

(三) 计算题

1. 求$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$.

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$.

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3n}}{2n+1}$.

6. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}+ax+b\right)=0$,求常数 a,b.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+b, & x\neq 1,\\ 2, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续,求常数 b.

8. 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})^{-n}$.

9. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

10. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n}$.

11. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$.

12. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$.

13. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

14. 讨论 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1.\end{cases}$ 当 $x\to 0$、$x\to 1$ 时的极限是否存在?

15. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

16. 求$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

17. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否连续.

18. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否连续.

19. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+a, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ \dfrac{b}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,求 a,b 值.

20. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+3, & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,求 a 值.

21. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 在 $x=0$ 处连续,则应给 $f(x)$ 在 $x=0$ 处补充一个什么定义?

22. 求函数$\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 的连续区间.

23. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

24. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}+\cdots+\dfrac{2n-1}{\sqrt{n}}-\dfrac{2n}{\sqrt{n}}\right)$.

25. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-2}{n^2+1}$.

26. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{4n-2}}$.

27. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{n}-n}$.

28. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^4+2}}$.

29. 求$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x+1}$.

30. 讨论极限$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 是否存在.

31. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5\cos x}{3x^2+6\sin x}$.

32. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

33. 求$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}$.

34. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+6}{3x^3+5x-2}$.

35. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+4}{3x^3+5x+2}$.

36. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+5x+2}{3x^2+4}$.

37. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

38. 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

39. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

40. 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的定义域.

41. 求函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域.

42. 求函数 $y=\ln(x^2-3x+2)$ 的定义域.

43. 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-5)}$ 的定义域.

44. 求函数 $y=\sqrt{\ln(x-5)}$ 的定义域.

45. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{7-x}}{\ln(x-5)}$ 的定义域.

46. 求函数 $y=\dfrac{\ln(x-5)}{\sqrt{7-x}}$ 的定义域.

47. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,3]$,求函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域.

48. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,3]$,求函数 $f(\ln x)$ 的定义域.

49. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,3]$,求函数 $f(e^x)$ 的定义域.

50. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,3]$,求 $f(x^2)$ 的定义域.

51. 已知 $f(\frac{1}{x})=\dfrac{x}{x-1}$,求 $f(x)$.

52. 已知 $f(x+3)=x(x+3)$,求 $f(x)$.

53. 已知 $f(\sin x)=3-\cos 2x$,求 $f(x)$.

54. 已知 $f(x+1)=x^2$,求 $f(x)$.

55. 判定 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 的奇偶性.

56. 求函数 $y=x^3-1$ 的反函数.

57. 求函数 $y=\sqrt[3]{x}-1$ 的反函数.

58. 求函数 $y=\dfrac{x}{x-2}$ 的反函数.

59. 求函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

60. 求函数 $y=\log_2(x-1)$ 的反函数.

参 考 答 案

(一) 单项选择题

1. 选:B

分析 由函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,即$0\leqslant x\leqslant 1$,若确定函数 $f(2x-1)$ 的定义域,可令 $0\leqslant 2x-1\leqslant 1$,即$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,即 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$. 应选 B.

2. 选:B

分析 由函数 $f(x)=2^{x-1}$,即 $y=2^{x-1}$,利用指数式与对数式互相转化的关系:$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$. 可知 $x-1=\log_2 y$,即 $x=\log_2 y+1$,再将 x 与 y 对换. 得 $y=\log_2 x+1$,即函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数,记作 $f^{-1}(x)=\log_2 x+1$. 应选 B.

3. 选:B