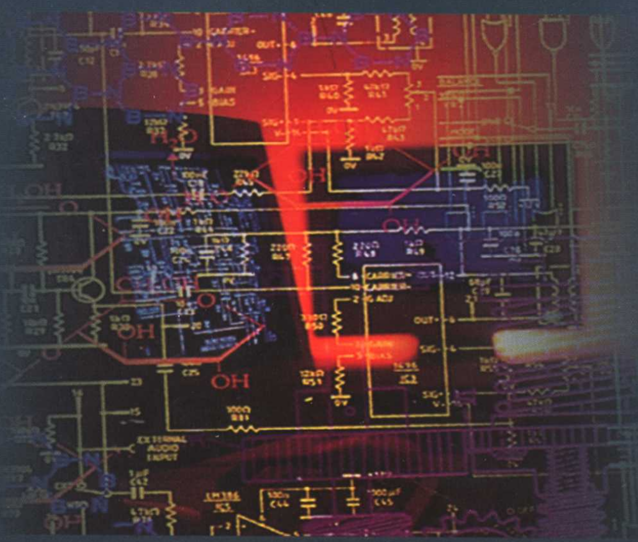
最优控制理论与方法

荆海英　编著



NEUPRESS
东北大学出版社

东北大学资助

最优控制理论与方法

荆海英　编著

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论与方法/荆海英编著 .—沈阳:东北大学出版社,2002.8

ISBN 7-81054-777-1

Ⅰ.最…　Ⅱ.荆…　Ⅲ.最优控制—数学理论—高等学校—教材　Ⅳ.O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048632 号

出 版 者:东北大学出版社
（邮编：110004　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号）
出 版 人:李毓兴
印 刷 者:沈阳农业大学印刷厂
发 行 者:东北大学出版社
开　　本:850mm×1168mm　1/32
字　　数:172 千字
印　　张:6.625
出版时间:2002 年 8 月第 1 版
印刷时间:2002 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑:孟　颖
责任出版:杨华宁
封面设计:唐敏智

定　　价:10.00 元

垂询电话　024—83687331（市场部）　024—83680265（传　真）
E-mail: neuph@neupress.com　http://www.neupress.com

前　　言

最优控制理论诞生于20世纪50年代。当时，在蓬勃兴起的航空航天技术的推动下，在计算机技术飞速发展的支持下，人们开始研究更复杂的系统，希望系统达到某种最优指标。在此期间，庞特里雅金（Pontryagin）发展了古典变分法，证明了最大值原理，得到了处理闭集性约束变分问题的有力工具；贝尔曼（R.Bellman）依据最优性原理，发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论，创立了寻求最优控制的动态规划法。到目前为止，庞特里雅金的最大值原理与贝尔曼的动态规划法在最优控制理论中仍占有重要地位。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分，它要解决的问题是：按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运行，并使给定的性能指标达到最优值。这里所说的“性能指标”是为了评价控制对象的优劣而人为规定的标准，它是以被控对象在整个工作期间的性能作为一个整体而出现的。因此，在计算机被广泛应用的今天，最优控制问题已经不仅是研究人员的理论课题，更重要的是科学技术人员在设计控制系统时所追求的目标。

随着航空航天、电子、军事、经济管理、生物工程等方面的飞速发展，最优控制理论将在所有与控制理论相关的领域里获得广泛的应用。由此可见，理工科大学生需要学习这门课程，科技工作者需要掌握这门理论。但是，国内专门为本科生撰写的有关最优控制理论的教材寥寥无几，仅有的几本又都是十多年甚至二十年前的教材，很难适应当前的需要。本书应运而生，不仅为大专院校提供了一本教材，还为科学技术人员提供了一本自学读物。

本书是作者在以往为本科生开设的最优控制课程教学中所写的讲义的基础上，参考国内外有关方面的教材或资料编写的，主要介绍最优控制理论的三种方法：变分法、最大值原理与动态规划方法，因此，它可作为学习最优控制理论及其应用的一本入门书。同时，为了满足高层次人才的需要，本书还介绍了目前最优控制理论的最新结果：存在最优控制的充分条件及近似计算方法。本书各章具有相对的独立性，可依据情况予以选用。

谨承原东北大学理学院院长谢绪恺教授，东北大学人工智能与机器人研究所所长、控制仿真研究中心主任、博士生导师徐心和教授及大连理工大学信息与控制研究中心主任、博士生导师王伟教授审阅全稿，并提出许多宝贵意见，在此一并表示感谢。

感谢我的同事韩大伟，我的研究生李正义、张悦、刘全红，他们打印了本书的部分章节。他们的热情帮助使本书得以顺利出版。

由于水平有限，书中可能存在疏漏与不妥之处，敬请读者指正。

编者于东北大学

2002 年 1 月

目　　录

1 绪 论

随着大规模生产与空间技术的发展，第二次世界大战以后发展起来的自动控制理论，现称古典控制理论，已日益显示出它的局限性，不能适应宇航、经济、生物等各个领域发展的需要。因此，以状态空间概念为基础的现代控制理论在20世纪50年代后期诞生了。最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分，它以庞特里雅金的最大值原理和贝尔曼的动态规划为基础，立足于状态变量法，研究复杂的系统，要求系统达到最优指标。时至今日，最优控制理论的研究，无论在深度和广度上，都有了很大的进展。如分布参数系统的最优控制、随机最优控制、大系统的最优控制理论以及多方位、多层次的微分对策和主从对策等。与此同时，又产生了许多重要的理论问题。因此，最优控制是目前正在发展的、极其活跃的学科领域之一。

1.1 最优控制问题的实例

【例1.1】 月球上的软着陆问题 为了使宇宙飞船在月球表面实现软着陆(飞船到达月球表面时的速度为零)，要选择发动机的一个推力方案，使飞船在月球表面上软着陆时，所耗燃料最少。

设飞船质量为 $m(t)$(m 为 t 的函数)，$m(0)=M+F$，其中 M 为飞船的自身质量，F 为燃料质量，高度(距月球表面距离)为 $h(t)$，垂直速度为 $v(t)$，月球的重力加速度为常数 g，发动机推

力为 $u(t)$。

由于推力与飞船质量的变化率成正比，且小于0，故可设

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-ku(t)$$

其中 k 为比例系数。同时根据牛顿第二运动定律：$F=ma$，有

$$m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=u(t)-mg$$

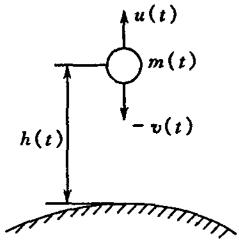


图 1.1 月球上的软着陆示意图

。

取

$$\begin{cases}x_1=h\\ x_2=\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ x_3=m\end{cases}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-g+\dfrac{u}{x_3}\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=-ku\end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_2\\-g\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\\ -k\end{bmatrix}$$

则问题化为：给定系统状态空间表达式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})u$$

其中边值条件为

$$x(0)=(h_0,v_0,M+F)^{\mathrm{T}}$$

$$x_1(T)=x_2(T)=0$$

求控制 u(推力), $0\leqslant u\leqslant u_{\max}$, 使性能指标

$$J=x_3(T)$$

取最大值。其中 T 为着陆时间。

上述问题是对控制有约束的最优控制问题。

【例 1.2】 最速升降问题 设有一物体 M, 作垂直升降运动。此时, 可将物体看成直升飞机或矿井中的提升机。假定在物体内部装有一个控制器, 它可产生一个作用力 $u(t)$, 控制物体上下运动。由于作用力的大小有限, 所以应满足约束条件 $|u(t)|\leqslant c$, 其中 c 是常数。

已知物体 M 在 $t=t_0$ 时离地面的高度为 $x(t_0)$, 垂直运动的速度为 $\frac{\mathrm{d}x(t_0)}{\mathrm{d}t}$。求出作用力 $u(t)$ 的变化规律, 使物体 M 最快到达地面, 且到达地面时的速度为零。

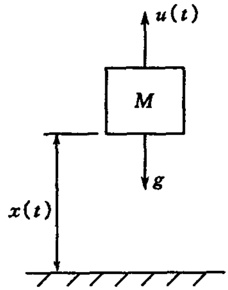


图 1.2 最速升降示意图

不妨设物体的质量为 1。根据牛顿第二运动定律, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=u(t)-g$$

其中 g 是重力加速度, 它表示物体所受的重力。

取

$$x_1(t)=x(t),\quad x_2(t)=\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

则物体的状态方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_2(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u(t) - g \end{cases}$$

初始条件为

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

现在问题化为：寻求一个控制 $u(t)$，满足约束条件 $|u(t)| \leqslant c$，使物体在最短时间内由初态(x_{10}, x_{20})转移至(0, 0)。换言之，就是使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{T} \mathrm{d}t = T - t_0$$

取最小值，且 $x_1(T) = x_2(T) = 0$。

【例 1.3】 最快到达问题 有一单位质点，在 $t=0$ 时位于(1, 0)处，并以大小为 2 的初速度沿 x 轴向右运动，现施加一力 $u(t)$，要求 $|u(t)| \leqslant 1$，使质点尽快返回原点，并停留在原点上(不计阻力)，试求 $u(t)$。

由牛顿第二运动定律，有

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = u(t)$$

取

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

则系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_2, \ x_1(0) = 1, \ x_1(T) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u, \ x_2(0) = 2, \ x_2(T) = 0 \end{cases}$$

现在问题化为求 $u(t)$，满足 $|u(t)| \leqslant 1$，使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{T} \mathrm{d}t$$

取最小值。

1.2 最优控制问题的一般提法

例 1.1～1.3 虽然研究对象不同，但它们在 4 个方面有共同之处。

(1) 系统的状态方程

都给定了一个状态方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t)$对 $\boldsymbol{x}$ 与 t 满足李氏条件。因此上述方程对给定的初始条件及给定的控制 $\boldsymbol{u}(t)$有惟一解，其解 $\boldsymbol{x}(t_0,\ \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x})$连续依赖于 $\boldsymbol{x}_0$ 及 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t)$。这个解惟一地描述了系统的状态在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的运动规律。

(2) 状态方程的边界条件

在这三个最优控制问题中，初始时刻 $t = t_0$ 和初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$都是固定的。而终止状态可以是状态空间的一个点集

$$S = \{\boldsymbol{x}(T) \mid \varphi(\boldsymbol{x}(T),\ T) = 0\}$$

称之为目标集。当 $S = \mathbf{R}^n$ 时，称之为自由端问题。终止状态也可以是一个固定值，当 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}_T$ 为固定值时，称之为固定端问题。

(3) 容许控制

在例 1.1～1.3 可以看出，对 $\boldsymbol{u}$ 都有一定的限制：$0 \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{u}_{\max}$或$|\boldsymbol{u}(t)| \leqslant c$。称这样的 $\boldsymbol{u}$ 为容许控制。如果对 $\boldsymbol{u}$ 无限制，则可以认为 $\boldsymbol{u}$ 的容许控制集为整个空间。

(4) 性能指标

从例 1.1～1.3 中，都给定一个衡量控制系统优劣的数量指标，它取决于最优控制所要完成的任务，一般表示为

$$J = \varphi(\boldsymbol{x}(T),\ T) + \int_{t_0}^{T} F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t)\mathrm{d}t$$

其中 T 表示终止时刻。

综上所述，最优控制问题的一般提法是：

给定 n 阶系统的状态方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t)$$

初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

其中

$$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n,\quad t \in [t_0,\ T],\quad \boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^m$$

向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t)$是 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$，t 的连续函数，并对 $\boldsymbol{x}(t)$，t 连续可微。寻求一容许控制 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\Omega}$，使性能指标

$$J = \varphi(\boldsymbol{x}(T),\ T) + \int_{t_0}^{T} F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t)\mathrm{d}t$$

取极值。其中终止状态与终止时刻可能是固定的，也可能是变化的。

1.3 概　述

综上所述，最优控制所要解决的问题是：按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运行，并使给定的性能指标达到最优值。从数学观点看问题，就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。这是一个变分学问题。本书第 2 章先介绍了变分学的基本概念，然后讨论了使用变分方法求解具有开集约束的最优控制问题。本书第 3 章介绍的是线性二次

型最优控制问题。

然而，经典变分法所能解决的只是控制无约束或只有开集约束的一类最优控制问题。而在工程实践中所遇到的却多是容许控制属于闭集的一类最优控制问题。这就要求人们寻求新的求解方法。由此，最小值原理(原称最大值原理)与动态规划方法应运而生。庞特里雅金的最小值原理发展了古典变分法，成为处理闭集性约束变分问题的有力工具。贝尔曼依据最优性原理，发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论，创立了动态规划。到目前为止，这两种方法在最优控制理论中仍占有重要地位。因此，本书有 3 章介绍有关问题。第 4 章重点介绍最小值原理及其证明。第 5 章将最小值原理运用于时间、燃料及能量最优控制问题。第 6 章介绍离散与连续动态规划。

虽然最小值原理为解决带有闭集约束的最优控制问题提供了有效的方法，但遗憾的是它只是一个必要条件；动态规划虽然提供的是充分条件，但是，由于连续型系统的哈密顿-雅可比方程难于求解而不能满足实际需要。因此，寻求具有充分条件的最优控制算法就成为更重要的问题。鉴于此，本书第 7 章与第 8 章介绍了目前最优控制理论的最新结果：最优控制存在的充分条件及近似计算方法。

为了方便读者，在书末增加了 2 个附录，以介绍线性系统理论的部分重要结果和阅读本书所需要的矩阵理论。最后还给出了本书所有习题的详细解答，相信这会为一些自学者提供很大的方便。

2 变分法与最优控制

变分法是求解泛函极值的一种经典方法，因此也是研究最优控制问题的一种重要工具。

本章的中心内容是介绍经典变分法的基本原理，并加以推广，用以求解某些最优控制问题。尽管经典变分法有其局限性，但本章所涉及的有关内容，在最优控制理论中是最基本的东西。掌握这些概念与方法对理解与掌握其他各章的内容具有不可忽视的作用。

2.1 泛函与变分法的基本概念

定义 2.1 给定函数空间 U，若对于任何函数 $x(t)\in U$，总有一个确定的值 $J(x(t))$与之对应，则称 $J(x(t))$是函数 $x(t)$的泛函。这里 $x(t)$常被称做宗量。

从定义 2.1 中可以发现，泛函是变量与函数之间的关系，故常称之为“函数的函数”。

例如：$J=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$ 是一个泛函。因为当 $x(t)=t$ 时，$J=\frac{1}{2}$；当 $x(t)=\sin t$ 时，$J=1-\cos 1$。而不定积分$\int x(t)\mathrm{d}t$ 不是一个泛函。

设 $\delta x(t)=x(t)-x_0(t)$为宗量的变分，又设泛函的增量为

$$\Delta J=J(x_0+\delta x(t))-J(x_0)$$

显然宗量的变分 $\delta x(t)$ 仍是变量 t 的函数，而泛函的增量 ΔJ 是一个数量。为了衡量宗量的"微小"变化，这里取

$$d^0(x(t),\ x_0(t)) = \max_{t\in[a,\ b]}\{|x(t) - x_0(t)|\}$$

$$d^1(x(t),\ x_0(t)) = \max_{t\in[a,\ b]}\{|x(t) - x_0(t)|,\ |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)|\}$$

称前者为函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之间的 0 阶近似度的距离，称后者为函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之间的 1 阶近似度的距离。图 2.1 说明，当 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之间的 0 阶近似度的距离相对较小时的情况，图 2.2 说明，当 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之间的 1 阶近似度的距离相对较小时的情况。

图 2.1

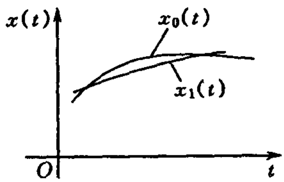


图 2.2

有了上述准备工作，就可以给出连续线性泛函的定义。

定义 2.2 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $d^0(x,\ x_0)<\delta$（或 $d^1(x,\ x_0)<\delta$）时，总有 $|\Delta J|<\varepsilon$，则称泛函 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)$ 点处是连续或 0 阶连续的泛函（1 阶连续）。如果 $J(x(t))$ 在函数空间 U 中任意一点都是连续的，则称泛函 $J(x(t))$ 是 U 上的连续泛函。除此之外，如果对于任何常数 C_1，C_2 及任何 $x_1(t)\in U$，$x_2(t)\in U$，都有