中学数学解题方法

换元法

刘志国

四川教育出版社

中 学 数 学 解 题 方 法

换 元 法

刘 志 国

四 川 教 育 出 版 社

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　换元法

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　成都印刷一厂印刷

开本787×960毫米 1/32　印张 3.625　字数 53 千
1989年12月第一版　1991年8月第二次印刷
印数：4851—12550 册

ISBN7—5408—1195—1/G·1166　定价：0.97元

前言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的“钥匙”。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以方法为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数

学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1.以方法成书。每册书全面系统地介绍了一种方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2.方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3.例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

1988.10.

目　　录

什么是换元法？

我们知道，初中代数第三册第120页“例2解方程$x^4-6x^2+5=0$”，是用换元法来求解的，即设$x^2=y$，则原方程变为$y^2-6y+5=0$，解这个一元二次方程，求出y值后，代回原设，就可以求出原方程的根。之后，教材中应用换元法来求解的题目反复出现，贯穿于代数、三角、平几、立几、解几、微积分等各部分内容之中。可见，学习换元法是十分必要的。

什么是换元法呢？我们说，如果用新的未知量或变量替换原来的未知量或变量，求出新的未知量或变量后，再利用替换关系式求出原来的未知量或变量的方法，叫做辅助元素法，简称换元法。其中新的未知量或变量叫做辅助元素，简称辅助元。

设辅助元的思想在整个数学中是非常重要的。

常用的辅助元有：几何中的辅助线、辅助平面、辅助体；三角中的辅助角；代数和微积分中的辅助未知量、辅助变量、辅助数列、辅助函数；解析几何中的参数，等等。通过引进辅助元，可以把分散的条件联系起来，或者把隐含的条件显示出来，或者把条件和结论联系起来，或者把繁难的计算和推证简化，从而达到化难为易，化繁为简，化未知为已知的目的。具体来说，通过换元，可以化高次式为低次式，化分式为整式，化多元式为一元式，化无理式为有理式（有时也化为超越式），化超越式为代数式（有时也化代数式为超越式），等等。

换元法的实质是施行未知量或变量替换，因此，施行换元法的关键在于确定未知量或变量的替换关系式；由于替换关系式是一个等式，利用它把原来的未知量或变量转化为新的未知量或变量的根据是“等量代换”，而求出新的未知量或变量后，再利用它求出原来的未知量或变量的根据也是“等量代换”。由此可知，换元法的理论根据是等量代换。

换元法是一种重要的解题方法，它不仅在中学数学中有广泛应用，而且在高等数学中也有广泛应用。下面，我们着重探讨它在中学数学中的应用。

换元法的应用

在中学数学中，换元法常用于分解因式、解方程、证明等式和不等式、求函数的定义域和值域、求函数的极值和最值、解化简求值问题、解几何问题、求动点的轨迹方程、求函数的极限、求导数和积分，等等．下面我们分别举例说明．

一、分解因式

要把一个多项式进行因式分解，如果这个多项式中有相同的代数式重复出现，就可把这个代数式视为一个整体，用另外一个字母去替换这个“整体”，原式中隐含的关系也就显露出来．这样，分解的方法便可确定．

例1 分解因式 x^6-7x^3-8．

分析： 由于原式中$x^6=(x^3)^2$，故可设其相同的整体$x^3=y$。于是原式变为关于y的二次三项式y^2-7y-8。用十字相乘法易分解因式，得$(y-8)(y+1)$，即$(x^3-8)(x^3+1)$。只须再应用乘法公式，即可分解完毕。

解： 设$x^3=y$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= y^2-7y-8 \\
&= (y-8)(y+1) \\
&= (x^3-8)(x^3+1) \\
&= (x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1).
\end{aligned}
$$

评注： 对形如$a[f(x)]^6+b[f(x)]^3+c$的多项式，若设其替换关系式为$[f(x)]^3=y$，则原式可化为关于y的二次三项式ay^2+by+c。对其分解因式后，还需利用替换关系式代回继续进行分解，以便得到原式的结果。本例中取相同的整体进行换元，这种换元技巧在解题中应用十分广泛。

例2 分解因式 $(x^2-x-3)(x^2-x-5)-3$。

分析： 注意到原式中有相同的整体x^2-x，可设$x^2-x=y$。

解： 设$x^2-x=y$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (y-3)(y-5)-3 \\
&= y^2-8y+12
\end{aligned}
$$

$$=(y-2)(y-6)$$
$$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$$
$$=(x+1)(x-2)(x-3)(x+2).$$

又解：设$\frac{1}{2}\left[(x^2-x-3)+(x^2-x-5)\right]$

$$=x^2-x-4=y, \text{ 则}$$

$$原式=(y+1)(y-1)-3=y^2-1-3$$
$$=y^2-4=(y+2)(y-2)$$
$$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$$
$$=(x+1)(x-2)(x-3)(x+2).$$

评注：对形如$(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+d)+k$的多项式，若设$ax^2+bx=y$或平均值$\frac{1}{2}\left[(ax^2+bx+c)+(ax^2+bx+d)\right]=ax^2+bx+\frac{c+d}{2}=y$，则原式可化为关于$y$的二次三项式，即可进行因式分解。显然，后一种换元技巧（实质上也是取相同的整体进行换元）较为简便。

例3 分解因式 $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

分析：易见原式不便直接进行分解。注意到完全平方式中x^3的平方为x^6，在与$-x^3$提取公因式x^3后，出现立方差x^3-1，将其分解，就有相同的整体x^2+x+1，故可考虑设$1+x+x^2=y$.

解：设$1+x+x^2=y$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (y+x^3)^2 - x^3 \\
&= y^2 + 2yx^3 + x^6 - x^3 \\
&= y^2 + 2yx^3 + x^3(x-1)(x^2+x+1) \\
&= y^2 + 2yx^3 + x^3(x-1)y \\
&= y^2 + 2yx^3 + yx^4 - yx^3 \\
&= y^2 + yx^3 + yx^4 \\
&= y(y + x^3 + x^4) \\
&= (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4).
\end{aligned}
$$

评注：切不可随意将原式中相同的整体视为应作替换的“整体”（这样做事实上仍无法求解），必须在对原式作全面分析，找出其中隐含的关系后，才能确定应作替换的“整体”。

例4 分解因式 $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$。

分析：注意到原式中有相同的整体$x+y$与xy，不妨设$x+y=u$，$xy=v$。

解：设$x+y=u$，$xy=v$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (u-2v)(u-2)+(1-v)^2 \\
&= u^2 - 2u - 2uv + 4v + 1 - 2v + v^2 \\
&= (u^2 - 2uv + v^2) - (2u - 2v) + 1 \\
&= (u-v)^2 - 2(u-v) + 1 \\
&= (u-v-1)^2 \\
&= (x+y-xy-1)^2.
\end{aligned}
$$

评注：本例中x和y的位置互换，原式不变，这种多项式叫做对称式。对于对称式的问题，一般都用换元法来解。

二、解方程（组）

用换元法解某些特殊的分式方程、高次方程、无理方程、指数方程与对数方程、三角方程等，关键在于利用未知量替换，将分式方程化为整式方程，高次方程化为低次（一次或二次）方程，无理方程化为有理方程（或简单的三角方程），指数方程与对数方程化为代数方程，三角方程化为代数方程，等等。通过求出转化后方程（组）的解，来达到求出原方程（组）的解的目的。

例1 解方程 $\dfrac{4x^2+2x}{x^2+6}+\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}-3=0$。

分析：注意到方程左边两个分式中所含的式子$\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}$与$\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}$互为倒数，若设$\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}=y$，则$\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}=\dfrac{1}{y}$。于是原方程可化为关于$y$的一元二次方程来求解。

解：设 $\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}=y$，则 $\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}=\dfrac{1}{y}$。

于是原方程变为 $2y+\frac{1}{y}-3=0$.

去分母，得 $2y^2-3y+1=0$.

解得 $y_1=1$，$y_2=\frac{1}{2}$.

当$y=1$时，$\frac{2x^2+x}{x^2+6}=1$，去分母并整理，

得
$$x^2+x-6=0.$$

$\therefore$ $x_1=2$，$x_2=-3$.

当$y=\frac{1}{2}$时，$\frac{2x^2+x}{x^2+6}=\frac{1}{2}$，去分母并整理，

得
$$3x^2+2x-6=0.$$

$\therefore$ $x_3=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$，$x_4=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$.

检验：把$x=2$，$x=-3$，$x=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$，$x=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$分别代入原方程都适合，所以它们都是原方程的根。

因此原方程的根是

$$x_1=2，x_2=-3，x_3=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}，$$
$$x_4=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}.$$

评注：对形如$af(x)+\frac{b}{f(x)}+c=0$的方程，若设其替换关系式为$y=f(x)$，则原方程可化为关于y

的一元二次方程$ay^2+cy+b=0$，求出y后，还需代回替换关系式，以便求出原方程的解。

例2 解方程

$$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

分析： 由于方程中$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

故可设其相同的整体 $x+\frac{1}{x}=y$。

解： $\because$ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

$\therefore$ 原方程变为

$$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0.$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$，则 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$。

于是原方程变为$9y^2-24y-20=0$。

解得 $y_1=\frac{10}{3}$，$y_2=-\frac{2}{3}$。

当$y=\frac{10}{3}$时，$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$，去分母并整理，得

$$3x^2-10x+3=0.$$

$\therefore$ $x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$。

当$y=-\frac{2}{3}$时，$x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}$，此方程无实数根。

检验：把$x=3$，$x=\frac{1}{3}$分别代入原方程都适合，所以它们都是原方程的根。

因此原方程的根是$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$。

评注：解本例的关键在于对$x^2+\frac{1}{x^2}$进行配方，把原方程变为$a[f(x)]^2+bf(x)+c=0$的形式，并设$f(x)=y$。

例3 解方程$(6x+7)^4-(6x+7)^2-72=0$。

分析：这是一个双二次方程，只需设其相同的整体$(6x+7)^2=y$即可。

解：设$(6x+7)^2=y$，则$(6x+7)^4=y^2$。

于是原方程变为$y^2-y-72=0$。

解得　$y_1=9$，$y_2=-8$。

当$y=9$时，$(6x+7)^2=9$。

$\therefore\quad x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{5}{3}$。

当$y=-8$时，$(6x+7)^2=-8$，此方程无实数根。

因此原方程的根是$x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{5}{3}$。

评注：对形如$a[f(x)]^4+b[f(x)]^2+c=0$的方程，若设$[f(x)]^2=y$，则原方程可化为关于y的一元二次方程来求解。

例4 解方程$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$.

分析：本例直接求解较难．注意到与中间项等距的两项的系数相同，如果分别将其结合起来，就有$6(x^4+1)+5(x^3+x)-38x^2=0$．由于$x\neq0$，方程两边同除以$x^2$，得

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$$

故仿例3可解．

解：原方程可变为

$$6(x^4+1)+5(x^3+x)-38x^2=0.$$

由$x\neq0$，方程两边同除以x^2，得

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$，则$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ $=y^2-2$.

于是原方程变为$6(y^2-2)+5y-38=0$，

即 $6y^2+5y-50=0$.

解得 $y_1=\frac{5}{2}$，$y_2=-\frac{10}{3}$.

当$y=\frac{5}{2}$时，$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，整理，得

$$2x^2-5x+2=0.$$

$\therefore$ $x_1=2$， $x_2=\frac{1}{2}$.