高级中学课本
代数第一册
课堂教学参考书

（第三分册）

上海市教育局教学研究室编

新知識出版社

高級中学課本

代数第一册課堂教学参考書

（第三分册）

上海市教育局教学研究室編

*

新知識出版社出版

（上海湖南路9号）

上海市書刊出版业營业許可証出015号

上海国光印刷厂印刷　新华書店上海发行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：4　字数：91,000

1958年2月第1版　1958年2月第1次印刷

印数：1—17,000本

統一書号：7076·290

定　价：(6)0.34元

編者的話

本分册我們要講的話基本上与第一分册相同，这里不再重复.現在把主要的两点分述如下：

一、本分册包括課本第二章第Ⅱ节§42、§43,第三章和第四章.关于第二章第Ⅱ节§41双二次方程的課时計划已見第二分册.

二、本書由我室数学科同志主持,本分册由教师陈爱琴、廖开矗两同志执笔編写,并經黃公安、楊荣祥两同志校訂和作了修正.但由于时間匆促,并限于水平，一定还存在着不少缺点与錯誤,希望教师們在参考时随时提出指正的意見.

上海市教育局教学研究室

1957年12月

目　录

第二章　二次方程和可以化成二次方程的方程

II　可以化成二次方程的方程(續)

（方程的同解变形及无理方程）

教学目的

（1）在同解方程的理論基础上，通过无理方程解法的討論使学生系統地了解同解方程的定理.

（2）使学生了解把无理方程化为有理方程时，方程的两边必須进行若干次乘方，因此有引进增根的可能，从而知道驗根是解无理方程的必要步驟.

（3）使学生能熟練各种无理方程的解法（可化为二次方程的），并能灵活掌握驗根手續.

教材分析

〔可参考初級中学課本代数下册（1956年1月新五版）§81—§87；数学通报1955年6月号第25頁“无理方程”一文及1955年9月号第48頁对于該文的更正〕

（一）学习无理方程的基础：

在学习无理方程前，学生已掌握了下面一些概念：

1．旧教材的基础：(1)根式的运算与方根的定义；(2)二次

方程的定义与解法；(3)分式方程的定义与解法。

2. 有关同解方程的定义和方程基本性质的定理，在初中代数中已講过，現在理論上再加以提高。

在講解过程中要注意：

1. 如果两个方程是同解方程，那末第一个方程所有的解都是第二个方程的解，而且第二个方程所有的解也都是第一个方程的解。因而在証明的过程中不能和有关等量的公理相混淆。

在有关等量的公理中，

若 $$A=B, \tag{1}$$

两边同加上 C，則得 $A+C=B+C$. (2)

即在等式(1)的两边加上等数 C，得等式(2)。对方程来説，就有

設方程 $f(x)=\phi(x)$, (1)

〔$f(x)$、$\phi(x)$表示含有 x 的代数式〕

两边同加上任意代数式 $g(x)$，

則得 $f(x)+g(x)=\phi(x)+g(x)$. (2)

这里若 x_1 是方程(1)的解，即以 x_1 代替方程(1)的 x，則它的左右两边的值相等。但是 x_1 却不一定是方程(2)的解。

例如方程 $$x+4=2x+1, \tag{1}$$

与 $$x+4+\frac{1}{x-3}=2x+1+\frac{1}{x-3}. \tag{2}$$

方程(2)是从方程(1)两边加上同一个代数式而成的。但是方程(1)的根是 3，而 3 不是方程(2)的根，因此这两个方程不是同解方程。

在把一个方程变形成为和它同解的方程的定理 1 中指出：在方程 $f(x)=\phi(x)$ 中若两边同加以一个数 m 或一个整式 $g(x)$ 所得到的方程为 $f(x)+m=\phi(x)+m$ 或 $f(x)+g(x)=\phi(x)+g(x)$

时，若 x_1 是 $f(x)=\phi(x)$ 的解，则 x_1 也必是后者的解；反之，若 x_2 不是 $f(x)=\phi(x)$ 的解，则 x_2 也必不是后者的解。也就是說这三个方程是同解方程，因此在証明过程中，若以 x_1 代 x 时，则以上三个方程就变成：$f(x_1)=\phi(x_1)$，$f(x_1)+m=\phi(x_1)+m$ 或 $f(x_1)+g(x_1)=\phi(x_1)+g(x_1)$。关于这一点必须牢固地掌握，否则就会把同解方程与有关等量的公理的意义相混淆。但是在对学生講解时，却不能搬用上面的式子，而必須举出具体的方程和数字解的例子，这样才能使学生容易理解和掌握。

2. 乙方程是甲方程的結果是指适合甲方程的解一定适合乙方程，而适合乙方程的解不一定适合甲方程。也就是說不适合乙方程的解一定不适合甲方程，而不适合甲方程的解却有的是适合乙方程的。有关这方面的定理 3 和定理 4 必須反复地講透，因为它是解无理方程的根据和产生增根的根源。

（二）方程的解法：

在解任何一个方程时，都必須把它变形。在这种变形的过程中，順次地用比較簡单的方程代替已知的比較复杂的方程，直到得出最簡单的形式为止。但在变形过程中必須使所得的方程与原方程同解或是原方程的結果，否则就必須充分考虑到可能减少根的情况并及时地加以补救。

无理方程的解法：先把无理方程化为有理方程后再求解，而有理方程目前以二次方程和可以化成二次方程的方程为限。

1. 整式无理方程的解法：主要的是消去根号，一般是用两边同时乘方的方法来解。但有的无理方程如果应用两边同时乘方的方法时，运算过程比較复杂，或所得的有理方程为一高次方程，那末应用这种方法，将会遇到很大的困难，或不可能求出解答。这里就应考虑能否引入适当的补助未知数。

例如解方程 $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$

与 $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x^2+5}}+\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{2x-3}}=3\dfrac{1}{3}$ 时，就应引入补助未知数来解。

2. 分式无理方程的解法：

一般的是应用先消去原方程的分母使变为整式无理方程，然后再消去根号的方法，有时也应用把分母有理化或合分比定理的方法以求出解答。

例如：解方程 $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=2-x$ 时，就用有理化分母的方法較方便。

又如：解方程 $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-3b}}=\dfrac{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-3b}}$ 时，用更比定理与合分比定理消去分母的方法比較方便。（但这里須注意增根或遺根的情况，可参考“数学教学”1957 年 7 月号“用比例变形来解分式方程时，引进增根和失去应有根的問題”。）

（三）增根的来源：

在解无理方程时，必須通过方程两边的乘方，或去分母而变形成一个有理整方程，再求新方程的根。由于所得的新方程是原方程的結果，因此可能带进增根，而驗根就成为解无理方程的必要过程。現在把增根的来源分述于下：

1. 方程 $f(x)=g(x)$ (1)。如方程的两边同乘以含 x 的整式 $\phi(x)$，則可能引进 $\phi(x)=0$ 的根。如方程 $x+3=0$ 的根为 -3，两边同乘以 $x-2$ 則得 $(x+3)(x-2)=0$，因而增加了 $x-2=0$ 的根 2。至于把方程两边乘方而得到新方程的情况实际上与方程两边同乘以一个因式的情况相同。如：$f^2(x)=g^2(x)$ 可写成 $[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]=0$。这就是把 (1) 变为 $f(x)-g(x)=0$ 后，两边再乘以 $f(x)+g(x)$ 的結果，所以方程(1)的两边乘方后就可能增加方程 $f(x)+g(x)=0$ 的根。

2. 在解分式方程时，常常要經过消去分母，或利用合分比定理簡化分式方程再求解，这时也会产生增根(或遺根)，因为原方程 x 的允許值与新方程的 x 的允許值是不同的。

如解方程 $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$，应用合分比定理变形成 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x-2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$. 两边乘方后，再去分母得

$$2x^2-5x-3=0, \qquad \therefore \quad x_1=-\frac{1}{2}, \qquad x_2=3.$$

很明显 $x_2=3$ 不适合原方程，因在原方程中 x 的值不允許等于 3. 但是利用合分比定理后，所产生的新方程中 x 的允許值有了改变，因此产生了增根 3.

又如解方程 $x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}=4+\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$, (1)

两端各减去 $\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$，得 $x^2=4$, (2)

于是得根 $x=\pm 2$，而 $x=-2$ 是不适合于原方程的.

又如: $\dfrac{(x-1)^2\cdot x}{x-1}=0$, (1)

分子和分母約去公因式后得 $(x-1)\cdot x=0$, (2)

于是得根 $x=0, x=1$；而 $x=1$ 是不适合原方程的. 这些增根的产生是因为把方程(1)变形成方程(2)时，就改变了 x 的允許值.

(四) 驗根方法: 一般用代入法驗算，但是有时把 x 的值代入原方程后运算很复杂，那末可以在某一个可能产生增根步驟的前一步进行驗算. 有时也可以从观察看出. 在驗根时一般要注意以下几个方面:

1．使分母为零的根必为增根，如解方程 $\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}=\dfrac{2}{5x}$，得 $x=0$，把 $x=0$ 代入这方程，因使分母为零，故 $x=0$ 不是这方程的根，而是增根。

2．根式定义的应用．例如解单根形的无理方程时，可以用观察法决定其有无解答，如方程 $\sqrt{x-3}=5$，一定有解；如方程 $\sqrt{x-3}=-2$ 便一定沒有解答．

3．关于方程未知数的允許值的集合与根式定义相結合的应用．根据这一点可以用观察法简化驗根手續．如方程 $\sqrt{1-2x}=x-1$，这个方程的未知数的允許值的集合由关系式 $1-2x\geqslant0$ 来确定，即 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$；又根据根式的定义，$\sqrt{1-2x}$ 取非負值（即 $\sqrt{1-2x}$ 可以是任何正实数或者零），所以 $x-1$ 必大于或等于0，即 $x\geqslant1$，但 x 要符合这两个条件是不可能的，因此这方程无解．又如方程 $\sqrt{x-1}\sqrt{x-5}=4\sqrt{2}$，解得 $x=-3$．显然，以 $x=-3$ 代入原方程，则根号内产生了負数，故 $x=-3$ 为增根．〔是 $\sqrt{(x-1)(x-5)}=4\sqrt{2}$ 的根〕

說明：（1）无理方程教材和习題的內容較少，可适当补充各种类型的作业作为課內外的練习．

（2）在解无理方程时，要学生运用观察法观察此方程有沒有根，以培养他們的判别能力．

教 学 进 度

本单元教材可以用13个課时进行教学．

第 34 課

課題 关于方程的变形的几个定理（§42 定理1）

教学目的

使学生明了方程变形的定理1，并能理解在什么样的情况下，方程的变形才能保持同解性。

教学过程

（一）在講解前先复习同解方程的意义：

1．如果第一个方程所有的解都是第二个方程的解，而且第二个方程所有的解也都是第一个方程的解，则这两个方程叫做同解方程．

例如：方程 $x^2+2=3x$ 与 $3x-2=x^2$ 为同解方程，因为它們有相同的根1与2．

$7x=14$(1) 与 $x^2+2=3x$(2) 不是同解方程，因为方程(1)仅有一个根2，而方程(2)有两个根2与1．

2．为什么我們要討論同解方程呢？(可用实例加以說明)

解任何一个方程时，必須把已知方程逐步变形，直到得出最簡方程 $x=a$ 为止，这时数字 a 就是已知方程的根，但是在每次变形时，所得的方程都必須与原方程同解．

（二）解方程时所有的变化，是根据方程变形的几个定理．

定理1：

如果方程的两边都加上同一个数或者同一个整式，那末所得的方程和原方程是同解方程．

1．例如：

(i) 取方程 $x^2+2=3x$．

在这个方程两边各加上某数 m（正，負，或零），得出新方程 $x^2+2+m=3x+m$ 与原方程同解．

(ii) 取方程 $x^2+2=3x$．

在这个方程两边加上整式 $5x$，得出新方程 $x^2+2+5x=3x+5x$ 与原方程同解．

2．一般形式的証明：（可用以上实例对照說明）

設方程 $$A(x)=B(x), \tag{1}$$

它的根为 x_1，則 x_1 必能滿足方程(1)，即 $A(x_1)=B(x_1)$。

現在方程(1)两边同加上 $C(x)$，則得

$$A(x)+C(x)=B(x)+C(x). \tag{2}$$

这里要証明(1)与(2)是同解方程．首先証明以(1)的根 x_1 代入(2)是适合的：

因 $$A(x_1)=B(x_1),$$

又 $$C(x_1)=C(x_1).$$

根据有关等量的性質，$A(x_1)+C(x_1)=B(x_1)+C(x_1)$．就是方程(1)的根 x_1 能滿足方程(2)．

再証明方程(2)的根能适合方程(1)：

設方程(2)的根为 x_2，則 $A(x_2)+C(x_2)=B(x_2)+C(x_2)$，利用有关等量的性質，$A(x_2)=B(x_2)$．因此方程(2)的根 x_2 是滿足方程(1)的．

所以方程(1)与(2)是同解方程．

小結：方程两边都加上同一个数或同一个整式，則所得方程与原方程是同解方程．

注意：$A(x)$、$B(x)$、$C(x)$ 为代数式．

$A(x_1)$、$B(x_1)$、……等为以 x_1 代入 $A(x)$，$B(x)$ 后的代数式的值．

在这里要注意的，如果 $C(x)$是一个代数式，那末 $C(x)$必須是一个整式，也就是說这个式子对于未知数的許可値都有意义，这时所得新方程保持与原方程同解．如果 $C(x)$ 是一个分式，那末得出的新方程与原方程就可能不是同解．但必須說明，所不同的只是使分母为 0 的那个解，而其余各解是相同的．

例：(i) 方程 $x-5=3-3x$ (1)

与 $x-5+\frac{1}{x-2}=3-3x+\frac{1}{x-2}$　　(2)　　不是同解方程.

方程(1)的根 $x=2$, 但这个根不适合方程 (2), 因为在方程(2)中, x 的值不允許等于 2 .

故方程(1)与(2)不是同解方程.

(ii) 方程 $x-5=3-3x$　　(1)

与 $x-5+\frac{1}{x-3}=3-3x+\frac{1}{x-3}$　　(2)　　是同解方程.

方程(1)的根 $x=2$ 也适合于方程(2),因为这个 x 的值对于所加上的分式也有意义.

(iii) 方程 $x-5=3-3x$　　(1)

与 $x-5+\frac{1}{x^2+1}=3-3x+\frac{1}{x^2+1}$　　(2)　　是同解方程.

因为所加上的分式中, x 的值可为任意实数.

(iv) 方程 $x^2=4$　　(1)

与 $x^2+\frac{1}{x-2}=4+\frac{1}{x-2}$　　(2)　　不是同解方程.

方程(1) 与 (2)所以不是同解方程, 因为方程 (1)有 $x=2$ 的根不适合方程 (2). 但是 $x=-2$ 的根却是这两个方程的公共根.

(三) 往往有些学生把同解方程的几个定理当做有关等量的公理看待,例如把第一定理看做等量加等量其和相等,这是不对的. 因此必須使学生分辨出同解方程的定理不就是有关等量的公理.

(四) 布置作业:习题十四: 1 (1)、(2)、(4).

第 35 課

課題　关于方程的变形的几个定理 (§ 42 定理 2、3)

教学目的

使学生明了方程的变形的定理 2、3，并能理解在什么样的情况下，方程的变形才能保持同解性.

教学过程

（一）在講解新課前先复习以下一些内容：下列各对方程是不是同解方程？为什么？

（1）方程 $x+8=2x-5$ 与 $x+8-3x^2=2x-5-3x^2$；

（2）方程 $2x+1=3x-5$ 与 $2x+1+\dfrac{1}{x-2}=3x-5+\dfrac{1}{x-2}$；

（3）方程 $2x+1=3x-5$ 与 $2x+1+\dfrac{1}{x-6}=3x-5+\dfrac{1}{x-6}$.

由上可知，在方程的两边各加上同一个整式，那末所得的方程，和原方程是同解方程；如在方程的两边各加上同一个分式，那末所得的方程和原方程就可能不是同解方程.

（二）若在方程的两边各乘以一数或一式，那末所得的方程与原方程有什么关系呢？

1．定理 2：

如果方程的两边都乘以不等于零的同一个数，那末所得的方程和原方程是同解方程.

例：方程 $x^2+2=3x$ （1），在此方程的两边乘以不等于零的数 C，得 $(x^2+2)C=3x\cdot C$ （2），则此两方程是同解方程.

若要証明这两个方程同解时，可用討論第一个定理时所用的方法，即証明：(i)方程(1)所有的根都适合于方程(2)；(ii)方程(2)所有的根都适合于方程(1)．先用特例来說明，再用一般形式的証明，有关一般形式的証明的証法与定理 1 的相同.

但必須注意，若所用的乘数 C 等于零时，則用零来乘方程 $x^2+2=3$ 的两边，得方程

$$(x^2+2)\cdot 0=3\cdot 0.$$

这时适合于此方程的 x 的数值将不仅是 1 与 2，而是任何数值.

因为零与任何数的乘积均为零，这就破坏了方程的同解性.

結論：若方程的两边同时乘以不等于零的同一个数时，則得出与原方程同解的新方程.

2．定理 3：

如果方程的两边都乘以同一个整式，那末所得的方程是原方程的結果.

設已知方程 $A=B$(A,B 是关于 x 的代数式，又設 C 是一个关于 x 的整式)，

两边各乘以同一整式 C，則得方程 $AC=BC$.

如果对于 x 的某一数值，代数式 A 和 B 相等，那末对于 x 的同一个数値，代数式 AC 和 BC 也一定相等．我們就称方程 $AC=BC$ 是方程 $A=B$ 的結果.

但必須注意：方程 $AC=BC$ 虽然包含了方程 $A=B$ 所有的根，但是它的根不一定是方程 $A=B$ 的根，这就是說，方程 $A=B$ 和 $AC=BC$ 不一定是同解方程．現分别說明如下：

(1) 若 C 是一个整式，那末变形以后所得的新方程是原方程的結果，但和原方程不一定是同解方程.

例 (i) 方程 $x+2=4$　　(1)　　的两边同乘以代数式 x (可等于零的)，

則得方程　　$x^2+2x=4x.$　　(2)

原方程的根只有 $x=2$，新方程的根是 $x=2$ 和 $x=0$.

方程(2)包含了方程(1)所有的根，而方程(2)是方程(1)的結果，但是这两个方程并不是同解方程.

例 (ii) 方程 $x+2=4$ 两边同乘以代数式 x^2+4 (永不为