伯拉基斯著

中學數學教學法

第五冊　三角教學法

中學數學教學法

第五冊　三角教學法

伯拉基斯著

吳品三譯

人民教育出版社出版

中學數學教學法 第五冊 三角教學法

著　者：伯拉基斯
譯　者：吳品三
責任校對：黃清野
出版者：人民教育出版社
（營業許可證出字第二號）
發行者：新華書店
印刷者：（見正文最後頁）

書號：[illegible] 0147
字數：96,200
1—20,000
定價4,500元

1953年12月原版
1954年6月北京第一次印刷

中學數學教學法第五冊目次

第一章　中學三角課的一般內容 ………………………… 1
§ 1. 歷史知識，近代三角 ………………………… 1
§ 2. 在普通中學中作爲數學科目的三角 ………………………… 4
§ 3. 三角的直線式敍述和圓周式敍述 ………………………… 5
§ 4. 三角教科書 ………………………… 6
§ 5. 某些其他的三角教科書的教學參考書 ………………………… 7
§ 6. 三角習題 ………………………… 8
第二章　三角的開頭課 ………………………… 12
§ 7. 開頭課的各種方案 ………………………… 12
§ 8. 銳角三角函數的定義．三角函數的兩個主要課題 ………………………… 14
§ 9. 三角函數表 ………………………… 17
§ 10. 直角三角形解法 ………………………… 19
§ 11. 三角的開頭課 ………………………… 21
第三章　三角函數的一般定義 ………………………… 22
§ 12. 有向線段(向量)；射影 ………………………… 22
§ 13. 角及弧的概念的推廣．有向的角及弧 ………………………… 23
§ 14. 各個三角函數的定義 ………………………… 25
§ 15. 直接由定義導出的三角函數的一些性質 ………………………… 28
§ 16. 與函數的一般概念的聯繫 ………………………… 32
第四章　三角恆等式和三角不等式 ………………………… 33
§ 17. 化爲第一象限弧的誘導公式 ………………………… 33
§ 18. 同一變數的三角函數間的關係 ………………………… 37
§ 19. 加法公式和減法公式 ………………………… 38
§ 20. 乘法公式和除法公式 ………………………… 40
§ 21. 表三角函數和爲乘積的形式 ………………………… 42
§ 22. 某些著名的三角不等式 ………………………… 44
§ 23. 近似的三角公式 ………………………… 45
第五章　三角函數表和三角函數圖象 ………………………… 48

§24. 三角函數值的計算……………………………………………48
§25. 四位三角函數表的結構和使用……………………………………55
§26. 某些其他的表……………………………………………………59
§27. 三角函數的圖象…………………………………………………60
第六章 反三角函數、三角方程…………………………………………64
§28. 對應於已知三角函數值的變數值之一般表示法…………………64
§29. 反三角函數，它們的多值性和主值，反三角函數的圖象…………66
§30. 關於反三角函數的某些習題………………………………………69
§31. 在中學中學習反三角函數的種種困難……………………………71
§32. 三角方程。三角方程的分類及其解法……………………………72
§33. 歸結於代數方程和基本三角方程的三角方程解法的例子…………77
§34. 超越三角方程的例子………………………………………………81
第七章 三角的幾何應用以及其他的應用………………………………83
§35. 什麼時候以及以何種範圍討論三角形解法…………………………83
§36. 解直角三角形………………………………………………………84
§37. 斜三角形中邊與角之間的關係……………………………………86
§38. 基本情形的三角形解法……………………………………………88
§39. 特別情形的三角形解法……………………………………………92
§40. 三角在幾何上的其他應用…………………………………………95
§41. 三角和代數…………………………………………………………98
§42. 三角在力學和物理上的應用………………………………………99
§43. 三角學、測地學、天文學……………………………………………100
關於第五冊問題的書、文章的目錄……………………………………102

第一章 中學三角課的一般內容

§1. 歷史知識. 近代三角

整個三角課的內容是在十八世紀初奠立起基礎來的，但是，三角敍述的近代形式，首先是現在所公認的符號，僅僅是到了尤拉的時代，亦即在十八世紀的後半葉，才建立了起來。例如，讓我們取按照兩邊一對角求解三角形爲例，在韋達的著作'論各種數學問題'（1593年）中係作下面的形式（參考 V, 7）：

'如果在某個平面三角形中已知其兩個側邊和一個底角，那麽就可以求出另一底角。事實上，如果把已知角所對的邊認爲是第一側邊，那麽，第一側邊對第二側邊的比等於已知角的正弦對所求底角正弦的比。或者，第二側邊對第一側邊的比等於已知角的餘角的正割對所求角的餘角的正割的比。

但是，如果已知角是銳角，並且已知角所對的第一側邊小於第二側邊，那麽所求角有兩個值，亦即，如果第二側邊對第一側邊的比小於完全正弦（sinus totus）對已知角正弦的比，則所求角有兩個值。因此，在這種情形，可以按照法典取銳角，或者取與它互補的鈍角。僅由習題的條件，不能決定取這兩個角中的哪一個。'

從這個片斷裏，如果仔細地分析一下，那將是很有益處的，這裏所謂'側邊'，就是三角形的一邊，而正弦就是正弦線，完全正弦就是 90° 角的正弦線，'法典'就是表，此處所指的是正弦表。

正如我們看到的，韋達在這裏未利用公式，可是在他的另一本文集裏，他廣泛地應用了公式。以後，公式開始應用在三角中。並且用縮寫來代替寫三角函數線的完全名稱。

在尤拉（1707—1783）的著作中，我們已經看到 sin·A·z（弧 z 的正弦）的符號以及更簡短的寫法 sin·z；僅僅取消中間的點，就得到現在公認的寫法。在尤拉的著作中，尤其是他的'無窮小分析引論'，已經淸楚地分別開正弦線與正弦，後者是當作正弦線對半徑的比的（同時，也分別開其他函數與函數線）。

轉向把三角函數當作線段的比這個新的觀點，使得三角學在理論方

面以及其實際應用方面前進了一大步。這個過程的完成是非常慢的，僅僅到了十九世紀中葉才完成。

三角函數的變數，尤拉將其表成度數，同時也將其表成弧度：有時寫 $\sin\frac{m}{n}\cdot 90^{\circ}$，也有時寫 $\sin\left(\frac{1}{2}\pi+z\right)$，同時指出，$z$ 是某個圓的圓弧，這個圓的半徑通常認爲是單位長（'分析引論' 第八章）。用弧度表示三角函數的變數，表示着從研究解三角形的三角學變成研究分析的一個分枝的三角函數的進一步轉變。在尤拉這本書中，我們第一次看到了對三角學的分析的敍述，而以前都是幾何的敍述，是因爲過去把三角學當作關於研究解三角形的理論的，尤拉已經知道一般定義的三角函數以及對於任何變數值的和與差的正弦和餘弦公式；所有這些公式，都是用純粹分析的方法得來。尤拉又基於這些公式，亦即用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 表示 $\sin nz$ 和 $\cos nz$ 的公式，導出著名的級數

$$\sin v=v-\frac{v^3}{3!}+\frac{v^5}{5!}-\cdots\cdots \text{ 和 } \cos v=1-\frac{v^2}{2!}+\frac{v^4}{4!}-\cdots\cdots$$

（這兩個式子的嚴格的初等證明，可以在〔III, 30 a〕的書中找到）；並導出公式 $(\cos z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin z)^n=\cos nz\pm\sqrt{-1}\cdot\sin nz$，這時還沒有利用符號 i 表示 $\sqrt{-1}$（他用 i 這個字母表示無窮大），更由這個公式得出 $e^{v\sqrt{-1}}=\cos v+\sqrt{-1}\cdot\sin v$。讓我們指出，尤拉已經應用字母 a, b, c 表示三角形內 A, B, C 角的對邊，即我們現在公認的表示法。

三角學在現在是被認爲討論三角函數及其應用的一個數學科目。它在幾何上的應用是特別重要的，但絕不是僅限於在幾何上的應用。讓我們回憶三角函數在學習複變數函數論上、在解方程上、在學習振動運動上、在學習更一般形式的函數（福利埃級數）上等所扮演的重要角色。

關於近代分析的三角學的結構，可以從〔V, 16〕書中看到，這本書的第四章專有一節討論這個問題。任意複變數值的函數 $\sin z$ 和 $\cos z$ 是用對於所有 z 收斂的冪級數的方法來定義的。於此首先應該知道，這在實際上是新的函數，而不歸結爲以前所學過的有理函數，因爲有理整函數總可表成有限項的多項式，有理分式函數可以表成收斂於有限半徑的圓內的點的無窮級數。其次很容易證明 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$。繼此之後，建立起對

於任何 z_1、z_2 的值的加法定理 $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$ 和 $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$ (完全不用幾何的概念)。證明了在區間 $(0;2)$ 內 $\cos z$ 有唯一的根等於實數 1.5707963……並把它表成 ξ 以後，我們就可以引出歸結為以下各式的乘積的公式(n 是任意整數)：

$$\sin(z+4n\xi)=\sin z;\qquad \sin[z+(4n+1)\xi]=\cos z;$$
$$\sin[z+(4n+2)\xi]=-\sin z;\qquad \sin[z+(4n+3)\xi]=-\cos z;$$
$$\cos(z+4n\xi)=\cos z;\qquad \cos[z+(4n+1)\xi]=-\sin z;$$
$$\cos[z+(4n+2)\xi]=-\cos z;\qquad \cos[z+(4n+3)\xi]=\sin z。$$

以 $\sin z/\cos z$ 的商定義新的函數 $\tan z$，我們確信 $\tan(z+2n\xi)=\tan z$。因此函數 $\sin z$ 和 $\cos z$ 是以 4ξ 爲週期的函數，$\tan z$ 是以 2ξ 爲週期的函數。

進一步發展這些見解，可以完全不依幾何意義地得到所引入函數 $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$ 的所有性質，而在特殊情形即變數 z 爲實數時函數的所有性質(即研究'它們在實數軸上的性質')，可以作出函數值的表，畫出函數的圖象。用式子 $\cot z=1/\tan z$, $\sec z=1/\cos z$, $\csc z=1/\sin z$ 引入其餘三個函數。

在討論函數 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在幾何（歐氏幾何）上的應用時，我們首先討論在直角座標上座標爲 $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ 的 M 點所描繪的曲線，這時，t 取得所有實數值(r 是任意正數)。我們確信這個曲線是圓，同時建立起這樣的事實：$\sin t$ 和 $\cos t$ 是 M 點的動徑在座標軸上的射影與半徑長的比。按照計算曲線長的公式 $l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{dx^2+dy^2}$，我們得到圓周長爲 $l=4r\xi$；與已知的幾何公式 $l=2\pi r$ 相對照，得出結論：

$$\xi=\frac{1}{2}\pi。$$

三角學的分析敍述的結論一望而知是簡短而清晰的。除此以外，最主要的是保證三角函數完全獨立於這種或者那種的幾何體系。例如，在羅氏幾何中，完全沒有相似形這個概念，三角學通常的敍述是不可能的，這是否意味着在羅氏幾何內就不可以談到角的三角函數呢？當利用分析的敍述時，就完全闡明了。

當然，對於初步認識三角學來說，必須選擇以幾何爲基礎的通常途徑。但是科學的三角結構的正確理解，可以使得教師引導出改善這種通常的途徑。

§2. 在普通中學中作爲教學科目的三角

球面三角學討論邊爲球上大圓圓弧的三角形。它對於研究宇宙運動的天文學是必需的；如果討論地面上大範圍的地段，當忽略地面的彎曲已經實際影響對事物的實際情況曲解的時候，對於研究測地學也是必需的；對於需要計算地球表面的距離或者近似距離的水手和飛行員也是必需的。但是，畢竟這是人類較小範圍內的事，因而在普通教育的中學教學計劃內不包括球面三角這個學科，而僅在專科學校學習它。在中學學習平面三角，其基本任務是研究三角函數，它在數學本身的各方面都有廣泛的應用(幾何，代數以及其他數學科目乃至數論)，在力學上、在物理的各部分(關於天文方面自不用說)以及與此相聯繫的機械學的各部分領域內，也都如此。因此，學習平面三角，很久以來即已成爲普通中學數學教育的不可分離的一部分，一般都在中學高年級學習它，因爲，在這時學生已經擁有關於算術、代數、幾何的一般知識，而沒有這些知識是不可能學習三角的。在中學學習三角的目的是完全被確定了的：第一，使學生熟悉三角函數的基本概念，以便他們在中學以及高等學校的各種學科中遇見它們時毫無困難；第二，熟悉這些函數在幾何應用的理論方面和實際方面，首先是解三角形。在學校按照其以進行三角教學的教學大綱，半世紀以來有着各種不同的類型，但是，差別僅在於次要的細節。

現行中學數學教學大綱對於學習三角這門學科，分配了共計 132 小時的時間，其中包括 12 小時的開頭課(三角的預備知識)，把它當作八年級幾何課的一章，以及在九、十年級的 120 小時的基本課(中學'數學'教學大綱，1949 年國立教育出版社出版)。除此以外，三角的某些應用也規定在其他數學科目中：複數的三角形式，應用三角解幾何習題，尤其是關於旋轉體，體的結合，體的截面的習題。

在學習三角時，教師可以對教學有很大幫助地利用學生所學習的鄰

接科目，首先是物理、天文、製圖。如果在三角課上利用學生已經在製圖課上熟悉的正弦線以及其他曲線的作圖，那末對於三角函數圖象的作圖，以及得到關於這些函數定義的鞏固知識，將是很有幫助的。用圖解的方法和分析的方法解答某些力的分解和合成的習題，也是很有益的。應用三角解答某些具體的天文的習題，將引起學生很大的興趣。

三角課對於邏輯技能的培養也是有巨大意義的：新概念的清晰的定義，新定理的嚴密的證明，在解答習題的過程中所有論斷的依據的要求——所有這些，都是在學習三角課時將促成的順利條件。但是能够實現這些條件，僅當教師不斷地注意對教材的科學性方面、教學法方面的敍述，以及對學生學習這門課的正確要求下才能完成。

§3. 三角的直線式敍述和圓周式敍述

在很多的三角教科書中，尤其是老的教科書中，我們看到材料大致地分配：在指出某些必要的預備知識以後（角和弧的一般概念，角的度量的各種方法，在笛卡兒座標軸上有向線段的符號）給出所有六個函數的一般定義，並且是最一般的，亦即對於從 $+\infty$ 到 $-\infty$ 的任意實數值，建立起按照同一變數值的這些函數值之間的基本關係。其次討論最小正變數的函數的性狀，然後討論加法定理及其推論。關於三角函數的這些知識可以用列表的辦法指出它們的值。以討論反三角函數和三角方程作爲學習三角的結束，其次討論三角在幾何上的應用，就解三角形這方面說，先解直角三角形，然後解斜角的，以先前討論過的邊與角之間的關係爲基礎。

與這種所謂‘循序增進的’，或者說‘直線式的’分配材料相反的，是所謂‘圓周式的’分配材料，前者對於在大綱的一個標題下的每一個問題，從開始一直討論到最終，而後者對於三角函數的定義，最先僅限定在變數的有限制的範圍內，然後就討論在幾何上的應用，繼此之後，再討論一般的：討論變數值在更廣範圍內的同樣問題。在現行中學教學大綱上對於三角課採取兩重循環，第一次是包括在八年級幾何課內，學習銳角的三角函數及其在解直角三角形上的應用（這種循環稱之爲‘預備知識’或者說三角的‘開頭課’，以後我們將保持後一個名稱），第二次是當作在九、十年級學

習的一個獨立的數學科目（'三角的基本課'）。本來，在基本課的範圍內，在教學大綱上也有先僅討論從 0° 到 360° 的變數值的趨向，但沒有鮮明地劃分爲循環。

引入循環，有自己的好的方面和不好的方面，關於這些已經在第一篇，§ 13 談論過。

三角的關於直線式和圓周式的敍述的優越性問題，不可認爲已最後解決了。把銳角三角函數及其在解直角三角形上的應用這一章放在八年級的幾何課內，經驗告訴我們，並不能由此減低學習基本課的困難。然而，有人認爲花費較多的時間，很慢的學習，可能鞏固地通曉三角的開頭知識，可以幫助在以後更好地掌握三角的基本課。至於將基本課劃分爲循環，是應該完全確定地認爲不正確的：如果對大綱上每一個問題馬上研究到最後，將有益於學生獲得精確的觀念，而且使得工作迅速。

§4. 三角教科書

一直到現在，蘇維埃中學的三角是按照 H. 雷布金的教科書學習的，這本書初版於 1894 年；到現在爲止，已經過若干次的修訂。在 1948 年國立教育出版社出版的是這本教科書的第 26 版。這本教科書並不是完全與教學大綱相適合的：'反三角函數'，'解三角方程'這兩節在教科書中沒有教學大綱所規定的詳細，而且有一些不是教學大綱所規定的（但是有益的），例如：'關於造三角函數表的概念'，'關於地面測量'。這本書的優點是非常簡練（共計 104 頁，而且包括最後 $2\frac{1}{2}$ 頁是應該記憶的有用公式），但是應該注意，在某些地方，由於過分簡練，已經成爲其缺點，例如，在 § 49，這裏談到關於反三角函數的主值，就發生這樣的缺點。這本書的敍述幾乎處處是清楚的，爲學生可接受的。理論方面問題的討論伴隨着解答習題的例子。可惜教科書未包含學生獨立解答的練習。

應用雷布金三角教科書的教師，應該注意除了敍述不完全的某些問題以外，還有不完全正確的斷言；應該以批評的態度對待教科書，例如，有某些不正確的史實：在第四頁談到：'紀元前 100 年學者米尼拉發現了球面三角學的原理（事實上米尼拉生於紀元 1 世紀的後半葉；他系統化了並

且補充了球面幾何和三角)；布特勞密所作的弦的表，不是像書上所說的半徑爲1的圓的，而是半徑爲60單位的，這個表並不是從1°角開始的，而是從$\frac{1}{2}^{\circ}$角開始的；又斷言三角具有現代形式開始於十六世紀也是不正確的。學生讀了§34的附註以後，將對於奇函數和偶函數得到不正確的觀念。這裏不應該談到類似的，而應該給出精確的定義：函數$f(x)$，對於所討論的所有變數值x，適合關係$f(x)=f(-x)$或者$f(x)=-f(-x)$，則分別稱之爲偶函數和奇函數；偶函數的例子有：x^2，$\cos x$，$\sec x$，奇函數的例子有：x^3，$\sin x$，$\tan x$；函數ax^2+bx+c既不是奇函數，也不是偶函數：這是一個偶函數(ax^2+c)和一個奇函數(bx)的和；在給與奇函數和偶函數的定義時，也可以不利用函數的符號。

雷布金教科書的較大缺點是完全忽略了所討論的計算的精確性問題。幾乎所有應用三角的計算方法解答的習題，可以用圖象的方法解答，而且要簡單得多。然而三角教科書有義務提出和解決用計算的方法所求得的得數的精確性的問題。但這本教科書完全忽略了這個問題，唯一提到的是在§85，這裏提到按照五位對數表確定角的精確性問題，而說的很難使人明白。已知數是精確值還是近似值都未區分開；未遵守近似數書寫的基本原則(不可靠的數碼僅留一位)。這樣在§115引進數值解答：已知$a=700$，$b=600$，$\angle A=40°25'$，用四位對數表求B角，按照公式$\lg\sin B=\lg b+\lg\sin A-\lg a$，得到$\lg\sin B=\bar{1}.7796$，$B=37°$；如果認爲已知數是精確的，那麼答案應該寫成$B=37°00'$，因爲$\lg\sin 37°00'=\bar{1}.7795$，$\lg\sin 37°01'=\bar{1}.7797$。

雷布金三角教科書的缺點，已被多次的提出，例如參考〔V, 14〕的文章。還是在1940年，國立教育出版社就開始了編著新教科書的工作。在1950年作爲試用的三角教科書出了第三版，這是А. Ф. 貝爾曼，Л. А. 劉斯皆爾尼克編的。第一次試驗版出版於1940年，在1947年出版了第二次修訂版。這本教科書得到中學教師以及科學工作者很高的評價。

§5. 某些其他的三角教科書和教學參考書

三角的教學參考書是非常多的，我們僅提出有價値的不多的幾本；較詳細的書目

給出在本篇末。

別爾騰瓦尼斯基，平面三角及三角習題，1880 年第一版，1923 年第 10 版。

這是革命前中學流行最廣的教科書之一，非常詳細地討論了用表計算的問題。含有大量的、具有發展性內容的習題。

格拉青拿柏，三角，第一冊——解直角三角形(1915)；第二冊——測角法(1916)。

這本書是寫作中學理科教科書的，並且給出考慮週到的兩重循環的三角敘述。

皮奧特羅夫斯基，三角，1925 年。

這本書假定了已有某些三角的預備知識，三角課的敘述是與此有關的。這本書對於所有細節都考慮週到沒有任何不清楚的敘述，逐步地引入自覺的、完全有根據的三角函數圖象的作圖，作爲學習三角函數的總結。這本書對於反三角函數以及解三角方程問題的敘述，比任何其他中學三角教科書都多，例如，某些超越方程（$x^2-\sin x=0$, $\frac{1}{x}-\sin x=0$, $x-\tan x=0$）的圖象解法。正弦函數和餘弦函數的定義是當作動徑射影和其長的比；幾何的應用放在第二步；佔首要地位的是研究三角函數。

貝爾格與維尼斯退。初等數學百科全書（由德文翻譯過來，編者是卡剛，第二卷第二冊和第三冊，1910 年）。

含有以下各章：'平面三角和平面幾何'，'球面三角和球面幾何'，僅限於討論較深的問題。

§6. 三角習題

如果說在中學的算術和代數課業中，經常是實踐（解答習題）較理論佔優勢，而在幾何課業中，則反轉過來，理論較實踐佔優勢，那麼，在三角課業中，經常是比較容易接近於標準的，學習三角，是比學習其他數學科目容易保證統一理論和實踐。但是，這裏仍然時常發生學生機械地解答習題而不過問理論的傾向，教師應該逐步地要求學生，對於解題的每一步，要求依據，要求引證某一定義或者某一定理，要求解答的詳盡無遺性。

作爲解答大多數三角習題的自我檢查的基本方法，是利用精確的製圖，亦即有着獨特價值的圖象解法。設已知 $\tan\alpha=-2$，要求計算 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$。花費幾分鐘來作圖，學生求出 $\sin\alpha\approx\pm0.9$, $\cos\alpha\approx\mp0.4$。二重符號是完全清楚和必要的（同時取上面的符號，或者同時取下面的符號），然後再利用公式求出精確的無理值（$\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\sqrt{0.8}$, $\cos\alpha=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\mp\sqrt{0.2}$)以及近似的有理值($\sin\alpha\approx\pm0.8944$ 和 $\cos\alpha\approx\mp0.4472$),因而看出用兩種方法求得的結果是一致的。

如果習題是以一般形狀給出的(已知數用字母表示),那麼得出用字母表示的答案以後,取某些合適的數値代替字母並作出圖象來核驗,是很有益的。

討論特殊情形和極限情形常常給出很好的核驗。例如,已知正四稜錐的底邊 a 以及正四稜錐的高與側稜之間的夾角 α,求通過底的一個頂點而垂直於對稜的截面面積 S,得到答案 $S=a^2\cdot\cos 2\alpha,\sec\alpha$ 以後,讓我們來核驗它,注意到,1)當 α 爲常數時,S 與 a 的平方成比例,這正是應該的;2)當 a 爲常數時,$\alpha\to0$,$S\to a^2$,這也是意料中的,因爲,當 $\alpha\to0$ 時,截面漸漸與底重合;3)當 a 爲常數、$\alpha\to45°$ 時,$S\to0$,這也是應該的,因爲,這時截面成爲稜。這樣的核驗指出所求的結果具有很大機率的正確性,而且通過這樣核驗,使得學生更好的考慮得到的結果,而絕不是形式主義的。

常常有這樣情形,可用三角解答的問題,也可以不用三角來解答。應該盡可能地培養學生用各種方法解答同一問題的能力,闡明各個方法的優缺點。例如,取下面的題目爲例:作切於一已知直線 AB 於 A 點而以 r 爲半徑的圓的一些點。利用圓規直尺的作圖解法,七年級學生已經力能勝任,但這個方法僅在半徑不太大時才可實行。如果 r 相當大,譬如,$r=10$ 米,則利用圓規成爲不可能的,這時可以計算圓上的點與切線的距離:取切線上的任意點,只要其與切點的距離不大於半徑均可以計算($x=AP$,$y=PM$,$y=r-\sqrt{r^2-x^2}$,圖50),或者任取$\angle ACM=\alpha$,求 $x=r\sin\alpha$,$CN=r\cos\alpha$。實際動手的時候,很容易使我們相信利用三角函數來計算是比較方便的(例如,取 $r=100$ 厘米,$x=0, 10, 20, \cdots\cdots 90, 100$ 厘米,$\alpha=0°, 9°, 18°, \cdots\cdots, 81°, 90°$)。最後,應用圖規時,我們確信基於這些結果所得到的所有點,實際在圓的第一象限上;必須注意到這件事,即用幾何的方法求圓的第二象限上的點,需要應用另一個式子($y=$

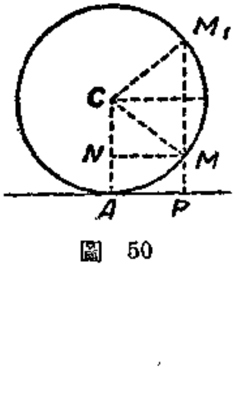

圖 50

$x+\sqrt{r^2-x^2}$)，而用三角的方法時，則仍然是同樣的式子($x=r\sin\alpha$, $y=r\cos\alpha$)。

中學所應用的 H. 雷布金的'三角習題彙編'，1948 年出版的是其 13 版，其中含有許多應用三角解答的幾何習題。這本習題中沒有特別困難的習題，對於比較困難的習題，大多數都給出提示。可以認爲：每一個中學畢業的學生，都應該有能力解答其中的任意題目。

從很多革命前的三角習題彙編中，我們僅提出較好的是由 H. 維列斯查金編著的習題彙編〔V, 13〕。對於每一本三角教科書都或多或少地供給練習的材料。

希望有較多的具有實踐性質的三角習題的教師，可以參考〔V, 13〕的教科書，〔V, 22〕的小書，以及〔III, 12〕的教科書，從其中可以有較多的選擇。

讓我們指出，有許多比較困難的，並非幾何性質的習題，含在〔III, 23〕的習題課本中。

在〔V, 35〕的書中，含有許多對於教師很有價值的材料，給出解答三角習題的方法和分類。

教師自己也應該構成一些新的習題，尤其是從已有的習題中經過變化很容易得到的新習題，亦即把某個已知數換成未知數，而把未知數變成已知數。例如，解答了已知三角形兩角 A, B 和周界 $2p$ 求其面積 S 的習題以後，可以提出兩個新的習題：按照 A、B、S 求 $2p$ 和按照 S、A、$2p$ 求 B 角。第二個習題較第一個習題有顯著的困難，應該預先建立起恆等式 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$。

新習題的另一個重要源泉是推廣已經有的習題，尤其是推廣已有的幾何習題。例如，取雷布金編的'中學九，十年級幾何習題' § 9，第 19 題(第二冊，立體幾何，1948 年版)來看，以一般的 $0<\alpha<90°$ 來代替給出的 $\alpha=30°$，我們得到一個計算稜錐截面積的很好習題，在前面(9 頁)已經指出。它的答案($S=a^2\cos 2\alpha\cdot\sec\alpha$)當 $\alpha=30°$ 時，變成 $S=\frac{1}{3}a^2\sqrt{3}$，正好就是書上的答案(又是一個驗證!)。

當注意到環繞我們周圍的實際事物時，就很容易列出具有實際性質

的各種內容以及各種困難程度的習題，這些問題也是學生自己能夠發現的，例如，在地面上有着一個圓柱形的桶。為了知道其中有多少燃料，拖拉機手用一根小棍豎到桶底，看一下桶裏的液體有多深。自然發生這樣問題：求底半徑為 r 而高為 h 的圓柱的體積。對於不同的 h 的 v 的值的表以及與之相應的圖象，是很有實用價值的。由學生自己測量而把得到的結果作為已知數的這樣習題，較比雷布金習題課本上 § 21，第 29 題所說的，有更好效果。首先，這樣習題能够牢固地記憶。

由圍繞於我們生活實踐中發生的，而且是學生眼見着(時常是他們自動發現的)的習題，經常能引起學生特別的興趣。應該盡量地使得對於這類習題得到數値解答，用試驗的方法來核驗解答。有特別多的具有測地性質的這類三角習題。這種時常被叫做地面測量的習題，首先是不可及的距離和高的間接測量的習題，任何一本三角教科書上，都或多或少的討論到。這類習題的巨大意義是無可懷疑的，然而被利用的却無比的少，部分原因是由於測量儀器的缺乏和組織工作的困難(這樣的工作應該在課外時間進行)；部分原因是由於教師自己不熟悉這些工作。這裏介紹以下兩點：1)在課堂時間內介紹給學生進行地面測量的工作，(雖然是不多的)並進行計算；2)在教室內組織'野外'測量，例如，決定教室的牆上不可及的兩點 M, N 的距離，這時，在地面上測量一'基線' AB，並且量出四個角 MAB, NAB, ABM, ABN(圖 51)。當有一

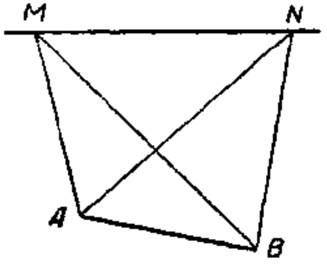

圖 51

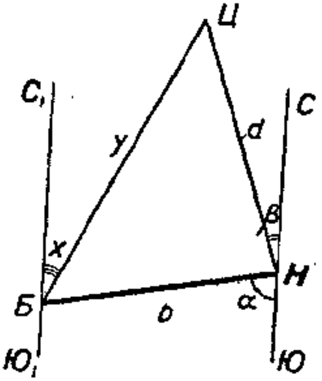

圖 52

架比較精確的量角的儀器時，這樣工作可以得到完全的效果。如果沒有這種儀器，可

以用大分度器來代替，教室用的一般的分度器，直徑爲 25—30 厘米，精確地測量，可以精確到 $\frac{1}{10}$ 度。

許多軍事性質的習題，也是有實際價值和興趣的，讓我們舉一個例子：

觀測者在 H 點測量得砲壘在他的西邊 Б，與北—南線所成角 $\alpha=13-20$ 密位，並知 НБ 的距離爲 $b=850$ 米，目標 Ц 位於 Н 點的西北，與南—北線所成角 $\beta=3-45$ 密位，並知 НЦ 的距離爲 $a=1100$ 米(圖 52)。爲了使得砲能擊中目標，求砲應指向的方向和與目標的距離，即求角 C_1 БЦ$=x$ 和線段 БЦ$=y$。

在軍事學上，特別是砲兵，對於角採取如下的度量單位：將圓周角等分爲 60 份，每份叫做一個'大密位'，一個大密位，再分成 100 份，每份叫做一個'小密位'；這樣，13—20 密位等於 $13\cdot\frac{360°}{60}+20\cdot\frac{360°}{60\cdot100}=78°+1°12'=79°12'$。對於這個習題，最好先用圖象解法，可取 1 厘米作爲 10 米的比例尺度，然後再用分析的解法。

關於這一類軍事性質的習題，對於三角教育是很有趣味的，可以在〔V, 8〕的書中找到許多。

第二章　三角的開頭課

§7. 開頭課的各種方案

關於獨立地學習三角的開頭課，或者說三角的初步知識，這是大多數現代的數學大綱和教科書的一般見解，但是，關於開頭課的詳細結構，却有着很大的差異。現行中學數學教學大綱規定從八年級的幾何課中分出 12 小時來學習銳角三角函數，這時，學生還不熟悉畢氏定理。基雪遼夫幾何教科書上含有特別的一章，給出教學大綱上規定的關於這些函數的知識，放在三角形的度量關係這一章之後。B. B. 雷別夫的三角教學法教科書主張分配給大約 15 小時的課以及 7—8 小時的家庭作業。

假定已經學完了三角形的度量關係，讓我們討論按照現行教學大綱(在八年級幾何課中的 12 小時)如何更好地進行三角開頭課的教學。