精编2005年教辅书　考场竞技必备掌中宝

诊断超越三级跳

高二数学

本册主编　陶运湘　陈为毅　袁　金

名校名师精心打造

分类诊断　夯实基础知能

思维教学　把握思考方法

超越课堂　提升综合能力

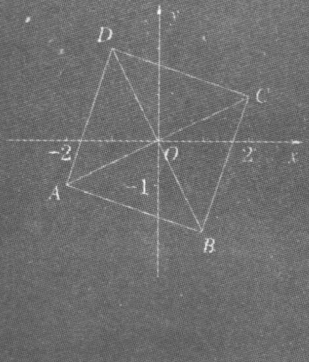
金盾出版社
JINDUN CHUBANSHE

诊断超越

三级跳

ZhenDuanChaoYue

高二数学



本册主编 陶运湘 陈为毅 袁金

金盾出版社

图书在版编目(CIP)数据

诊断超越三级跳丛书．高二数学/陶运湘等主编．—北京：金盾出版社，2003.6
ISBN 7-5082-2502-3

Ⅰ．诊…　Ⅱ．陶…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 028065 号

金盾出版社出版、总发行
北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)
邮政编码：100036　电话：68214039　66882412
传真：68276683　电挂：0234
封面印刷：国防工业出版社印刷厂
正文印刷：北京金盾印刷厂
各地新华书店经销
开本：850×1168 1/16　印张：16.75　字数：537 千字
2004 年 4 月第 1 版第 2 次印刷
印数：25001—27000 册　定价：18.50 元

前 言

科学诊断　成功超越

诊断既是一种针对性很强的检测方式，又是一种快速有效的突破方式。一年多来，我们和几位教育专家一起研究、构思了这套《诊断超越三级跳》系列丛书，试图在精心创建的特效诊断平台上，让学生自我诊断知识、能力达到的程度、层次和水平，并实现成功的超越。实际上，这种从诊断到检测的过程，就是一种知识能力的攀升和超越教材、超越课堂、超越自我，实现“三级跳”的飞跃过程。

这套丛书，科学地抓住打基础，讲方法，重能力，看过程四个方面，立意深刻，内涵丰富，方法实用。这套丛书的特色集中表现在以下几个方面：

分类诊断，切入创新。以分类诊断为切入点，以练带讲，环环相扣，紧紧把握综合知识能力的脉搏，在传授典型解题技巧的同时，精心检测学习和应试中容易出现的差错、失误。“病症”诊断，“病因”探源。通过做题，对基础知识、思维方法和综合应用能力等，进行精心点拨。

把握核心，纵横迁移。通过做题，深刻揭示教材中的主干知识和核心内容，归纳中考、高考的常考知识点以及失分率较高的知识点。“基础知识诊断”，是汇聚知识的聚焦镜，涵盖了全部核心知识，并把离散的知识归纳出清晰的脉络。“知识迁移诊断”，脉络分明，巧妙延伸。通过做题，实现由知识迁移、知识整合向能力发展和升级的转化。

注重方法，激发潜能。方法是知识和能力之间的纽带。正确的思维方法是跨向成功的桥梁。通过对学生进行多方位、主体式引导，在知识、方法、能力的结合上形成鲜明亮点。领略众多方法，激发学生思维潜能，铸就正确的思维取向。以命题目的、技巧评析、误点矫正等作为激活思维的触点，并精辟点拨在做题中如何避开曲折、错误的思维过程，这样可使学生真正做到举一反三，触类旁通。

理念新颖，超越教材。突出新大纲和新课标的要求、新考纲的范围、新教材的内容。结合中考、高考的要求，将考点渗透和凝聚到知识、方法、能力的诊断中，更好地实现由知识、能力诊断到知识、能力飞跃。丛书还采用了互动教学和交互讲练的新颖形式。

参加本套丛书编写的作者，都是国内知名中学的优秀特级、高级教师，丛书中凝集着他们多年的教学经验。

本册的编著者，还有郑国平、唐保珍、夏慧汉、夏慧异、石贵松、王立春、张林芳、陈义忠、何兴海、罗涛、张辉、张强、赵平、李刚、成文兵、李文静、毛丽、陶钢、张国风、袁梦婷等。

我们深信，这套丛书一定会为中学生朋友的学习撑起一片希望无限的蓝天。在这片美好的蓝天下，希望广大中学生朋友们挑战自我，超越自我，能叩响成功的大门，奔向美好的未来。

丛书总策划： *卢祥之　方明*

CONTENTS

目　录

第六章　不等式 …… (1)
6.1　不等式的性质 …… (1)
基础知识诊断 …… (1)
知识迁移诊断 …… (2)
思维方法诊断 …… (3)
综合应用能力诊断 …… (4)
综合知识能力测试 …… (6)
6.2　算术平均数与几何平均数 …… (7)
基础知识诊断 …… (7)
知识迁移诊断 …… (9)
思维方法诊断 …… (10)
综合应用能力诊断 …… (13)
综合知识能力测试 …… (15)
6.3　不等式的证明 …… (17)
基础知识诊断 …… (17)
知识迁移诊断 …… (18)
思维方法诊断 …… (19)
综合应用能力诊断 …… (22)
综合知识能力测试 …… (25)
6.4　不等式的解法举例 …… (27)
基础知识诊断 …… (27)
知识迁移诊断 …… (29)
思维方法诊断 …… (31)
综合应用能力诊断 …… (33)
综合知识能力测试 …… (36)
6.5　含有绝对值的不等式 …… (38)
基础知识诊断 …… (38)
知识迁移诊断 …… (39)
思维方法诊断 …… (40)
综合应用能力诊断 …… (42)
综合知识能力测试 …… (45)
第七章　直线和圆的方程 …… (47)
7.1　直线的倾斜角和斜率 …… (47)
基础知识诊断 …… (47)
知识迁移诊断 …… (48)
思维方法诊断 …… (50)
综合应用能力诊断 …… (51)
综合知识能力测试 …… (54)
7.2　直线的方程 …… (56)
基础知识诊断 …… (56)
知识迁移诊断 …… (57)
思维方法诊断 …… (59)
综合应用能力诊断 …… (61)
综合知识能力测试 …… (64)
7.3　两条直线的位置关系 …… (66)
基础知识诊断 …… (66)
知识迁移诊断 …… (68)
思维方法诊断 …… (69)
综合应用能力诊断 …… (72)
综合知识能力测试 …… (75)
7.4　简单的线性规划 …… (76)
基础知识诊断 …… (76)
知识迁移诊断 …… (77)
思维方法诊断 …… (80)
综合应用能力诊断 …… (82)
综合知识能力测试 …… (85)
7.5　曲线和方程 …… (88)
基础知识诊断 …… (88)
知识迁移诊断 …… (89)
思维方法诊断 …… (91)

综合应用能力诊断 …………………… (93)
综合知识能力测试 …………………… (96)
7.6 圆的方程 …………………… (98)
基础知识诊断 …………………… (98)
知识迁移诊断 …………………… (100)
思维方法诊断 …………………… (103)
综合应用能力诊断 …………………… (105)
综合知识能力测试 …………………… (109)
第八章 圆锥曲线方程 …………………… (111)
8.1 椭圆 …………………… (111)
基础知识诊断 …………………… (111)
知识迁移诊断 …………………… (112)
思维方法诊断 …………………… (115)
综合应用能力诊断 …………………… (119)
综合知识能力测试 …………………… (123)
8.2 双曲线 …………………… (125)
基础知识诊断 …………………… (125)
知识迁移诊断 …………………… (126)
思维方法诊断 …………………… (128)
综合应用能力诊断 …………………… (132)
综合知识能力测试 …………………… (136)
8.3 抛物线 …………………… (138)
基础知识诊断 …………………… (138)
知识迁移诊断 …………………… (140)
思维方法诊断 …………………… (142)
综合应用能力诊断 …………………… (144)
综合知识能力测试 …………………… (147)
第九章 直线、平面、简单几何体 …… (150)
9.1 平面与空间直线 …………………… (150)
基础知识诊断 …………………… (150)
知识迁移诊断 …………………… (151)
思维方法诊断 …………………… (152)
综合应用能力诊断 …………………… (153)
综合知识能力测试 …………………… (154)
9.2 直线和平面 …………………… (156)
基础知识诊断 …………………… (156)
知识迁移诊断 …………………… (157)
思维方法诊断 …………………… (158)
综合应用能力诊断 …………………… (159)
综合知识能力测试 …………………… (161)
9.3 空间两个平面 …………………… (162)
基础知识诊断 …………………… (162)
知识迁移诊断 …………………… (163)
思维方法诊断 …………………… (165)
综合应用能力诊断 …………………… (166)
综合知识能力测试 …………………… (168)
9.4 简单多面体和球 …………………… (169)
基础知识诊断 …………………… (169)
知识迁移诊断 …………………… (170)
思维方法诊断 …………………… (171)
综合应用能力诊断 …………………… (173)
综合知识能力测试 …………………… (174)
9.5 空间向量 …………………… (176)
基础知识诊断 …………………… (176)
知识迁移诊断 …………………… (177)
思维方法诊断 …………………… (178)
综合应用能力诊断 …………………… (180)
综合知识能力测试 …………………… (183)
第十章 排列、组合和概率 …………………… (186)
10.1 两个原理及排列与组合 …… (186)
基础知识诊断 …………………… (186)
知识迁移诊断 …………………… (187)
思维方法诊断 …………………… (189)
综合应用能力诊断 …………………… (191)
综合知识能力测试 …………………… (193)
10.2 二项式定理 …………………… (194)
基础知识诊断 …………………… (194)
知识迁移诊断 …………………… (195)
思维方法诊断 …………………… (196)
综合应用能力诊断 …………………… (198)
综合知识能力测试 …………………… (202)
10.3 概率 …………………… (204)
基础知识诊断 …………………… (204)
知识迁移诊断 …………………… (205)
思维方法诊断 …………………… (207)
综合应用能力诊断 …………………… (208)
综合知识能力测试 …………………… (209)
第十一章 概率与统计 …………………… (211)
基础知识诊断 …………………… (211)
知识迁移诊断 …………………… (212)
思维方法诊断 …………………… (213)
综合应用能力诊断 …………………… (214)
综合知识能力测试 …………………… (215)
第十二章 极限 …………………… (217)
12.1 数学归纳法及其应用 ……… (217)
基础知识诊断 …………………… (217)
知识迁移诊断 …………………… (219)
思维方法诊断 …………………… (221)
综合应用能力诊断 …………………… (223)
综合知识能力测试 …………………… (225)

12.2 极限 …………………………… (227)
基础知识诊断 …………………… (227)
知识迁移诊断 …………………… (230)
思维方法诊断 …………………… (230)
综合应用能力诊断 ……………… (231)
综合知识能力测试 ……………… (233)
第十三章 导数与微分 ……………… (236)
基础知识诊断 …………………… (236)
知识迁移诊断 …………………… (237)
思维方法诊断 …………………… (238)
综合应用能力诊断 ……………… (239)
综合知识能力测试 ……………… (240)
第十四章 复数 ……………………… (242)
基础知识诊断 …………………… (242)
知识迁移诊断 …………………… (244)
思维方法诊断 …………………… (245)
综合应用能力诊断 ……………… (247)
综合知识能力测试 ……………… (249)
高二上学期期中测评及参考答案 …… (250)
高二上学期期末测评及参考答案 …… (253)
高二下学期期中测评及参考答案 …… (255)
高二下学期期末测评及参考答案 …… (258)

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

基础知识诊断

【例 1】 已知 $c>0,a<b<0$,试比较 $\frac{a}{c-b}$ 与 $\frac{b}{c-a}$ 的大小.

命题目的 掌握运用不等式的性质来比较两数(两式)大小的基本方法.

解法 1 $\because a<b<0,\therefore -a>-b>0$

$\because c>0,\therefore c-a>c-b>c>0$ (1) $\therefore \frac{1}{c-b}>\frac{1}{c-a}>0$ (2) $\because -a>-b>0$ (3)

(2)和(3)两式相乘得 $\frac{-a}{c-b}>\frac{-b}{c-a}$ (4) $\therefore \frac{a}{c-b}<\frac{b}{c-a}$

解法 2 $\frac{a}{c-b}-\frac{b}{c-a}=\frac{a(c-a)-b(c-b)}{(c-b)(c-a)}=\frac{(a-b)(c-a-b)}{(c-b)(c-a)}$

$\because c>0,a<b<0,\therefore a-b<0,c-a-b>0,c-b>0,c-a>0$

得 $\frac{(a-b)(c-a-b)}{(c-b)(c-a)}<0$ 从而 $\frac{a}{c-b}-\frac{b}{c-a}<0$,故 $\frac{a}{c-b}<\frac{b}{c-a}$

技巧评析 解法 1 是从题设条件出发,利用不等式的性质,推导出反映两式大小关系的不等式.在运用不等式性质的基本定理和推论求解或证题时,应注意它们的适用条件.在解法 1 中,由(1)式推出(2)式的条件是 $c-b$ 与 $c-a$ 同号,而(2),(3)两式都是两边均为正数的同向不等式,所以才能施行相乘的运算得到(4)式.

解法 2 采用的是作差法,通过判断差式的符号比较两式的大小.两种解法相比较,解法 2 较简单,但解法 1 更有助于理解和掌握不等式的性质.

思维发散 对于三个数比较大小,应注意先判断它们的符号,再比较同号的数的大小.

例如,已知 $a<0,-1<b<0$,试比较 ab^2,ab,a 这三个数的大小.

【解】 $\because -1<b<0,\therefore 0<-b<1,0<b^2<1$

$\because a<0,\therefore a<ab^2<0$ 又 $\because b<0,a<0,\therefore ab>0$ 故 $a<ab^2<ab$

【例 2】 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,比较 $2a^2-2ab+b^2$ 与 $4a-2b-3$ 的大小.

命题目的 考查不等式的性质、配方法、二次函数的性质等基本知识.

【解】 $2a^2-2ab+b^2-(4a-2b-3)=2a^2-2ab+b^2-4a+2b+3$

$=a^2-2ab+b^2-2a+2b+a^2-2a+3=(a-b)^2-2(a-b)+a^2-2a+3$

$=[(a-b)^2-2(a-b)+1]+(a^2-2a+1)+1=(a-b+1)^2+(a-1)^2+1$

$\because (a-b+1)^2\geqslant 0,(a-1)^2\geqslant 0,1>0$ $\therefore (a-b+1)^2+(a-1)^2+1>0$

故 $2a^2-2ab+b^2>4a-2b-3$

技巧评析 用作差法比较大小,一般都采用因式分解或配方法把差式化为几个因式的乘积或平方和的形式.

思维发散 若将差式看成关于 a(也可关于 b)的二次三项式,利用二次函数恒正(或恒负)的充要条件,很容易判断差式的符号.

【解】 令 $f(a)=2a^2-2ab+b^2-(4a-2b-3)$

$$=2a^2-(2b+4)a+b^2+2b+3$$

$\because \Delta=(2b+4)^2-8(b^2+2b+3)=-4b^2-8<0$

又 $\because$ 二次项系数为正,$\therefore f(a)>0$ 恒成立

$\therefore 2a^2-2ab+b^2>4a-2b-3$

【例 3】 已知 $a\geqslant 1$,试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 与 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小.

命题目的 掌握作差法或作商法比较无理式的大小的常用技巧.

解法 1 $M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}$$

$\because \sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}<0,\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>0,\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>0$

$\therefore M-N<0,M<N$,即 $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

解法 2 $\dfrac{M}{N}=\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}$

$$=\frac{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

$\because \sqrt{a}+\sqrt{a-1}<\sqrt{a}+\sqrt{a+1},\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>0,\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}<1$,即 $\dfrac{M}{N}<1$

$\because N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}>0 \quad \therefore M<N$

技巧评析 用作差法或作商法比较两个无理式的大小,基本技巧是分母有理化或分子有理化.

思维发散 以分式指数幂形式表示的代数式比较大小,宜先转换为根式的形式再行比较.

例如,该 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$,试比较 $a^{-\frac{1}{2}}b+ab^{-\frac{1}{2}}$ 与 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ 的大小.

【解】 $a^{-\frac{1}{2}}b+ab^{-\frac{1}{2}}-(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\left(\dfrac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)+\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)$

$$=\frac{b-a}{\sqrt{a}}+\frac{a-b}{\sqrt{b}}=\frac{(b-a)(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{ab}}$$

$\because a\neq b \quad \therefore \dfrac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{ab}}>0 \qquad \therefore a^{-\frac{1}{2}}b+ab^{-\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

知识迁移诊断

【例 4】 已知角 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,角 $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,求 $2\alpha-\dfrac{\beta}{3}$ 的取值范围.

命题目的 运用不等式性质,求线性代数式的取值范围.

【解】

$$\because 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \therefore 0<2\alpha\leqslant\pi \qquad (1)$$

$$\because 0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2},\therefore -\frac{\pi}{6}\leqslant-\frac{\beta}{3}<0 \qquad (2)$$

(1)和(2)两式相加得 $-\dfrac{\pi}{6}<2\alpha-\dfrac{\beta}{3}<\pi$

技巧评析 本例是已知 α,β 的取值范围,求关于 α,β 的线性表达式 $2\alpha-\dfrac{\beta}{3}$ 的取值范围.方法是先求出各项取值范围,再利用同向不等式相加的性质求出 $2\alpha-\dfrac{\beta}{3}$ 的范围.要注意同向不等式相加后,所得不等

式中等号是否成立.

思维发散　仔细解读下例,注意它的题设条件与例 4 有何不同.

例如,已知 $\alpha\in(0,\pi]$,$\beta\in(0,\pi]$,且 $\alpha<\beta$,求 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

【错解】　$\because 0<\beta\leqslant\pi$,　$\therefore -\pi\leqslant-\beta<0$　　(1)

又 $\because 0<\alpha\leqslant\pi$　　(2)

(1)和(2)两式相加得 $-\pi<\alpha-\beta<\pi$

【正解】　$\because 0<\alpha<\beta\leqslant\pi$　　$\therefore \alpha-\beta<0$ 且 $\alpha-\beta>-\pi$,即 $-\pi<\alpha-\beta<0$

错解忽略了约束条件 $\alpha<\beta$,因而扩大了 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

【例 5】　已知 $f(x)=ax^2+bx$,$1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,$2\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$ 的取值范围.

命题目的　深入理解不等式性质,由此求较复杂的线性代数式的取值范围.

【解】　$\because 1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,　$\therefore 1\leqslant a-b\leqslant 2$　　$\because 2\leqslant f(1)\leqslant 4$,　$\therefore 2\leqslant a+b\leqslant 4$

$f(-2)=4a-2b=3(a-b)+(a+b)$

$\because 3\leqslant 3(a-b)\leqslant 6$,$2\leqslant a+b\leqslant 4$　　$\therefore 5\leqslant 3(a-b)+(a+b)\leqslant 10$

即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$

技巧评析　本例是已知 $a-b$ 及 $a+b$ 的取值范围,求关于 a,b 的线性表达式 $4a-2b$ 的取值范围.解题的关键是用 $a-b$,$a+b$ 来表示 $4a-2b$,进而求出 $4a-2b$ 的范围.

如果由 $1\leqslant a-b\leqslant 2$,$2\leqslant a+b\leqslant 4$,求得 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$,$0\leqslant b\leqslant\frac{3}{2}$,从而得出 $3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$,便会使所求范围扩大,即 $[5,10]\subset[3,12]$,因而得到的不是"最优"范围,实际上由不等式 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$,$0\leqslant b\leqslant\frac{3}{2}$ 只要取 $a=3$,$b=0$ 虽能满足 $3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$,但显然与题设条件 $a-b<2$ 矛盾.

思维发散　求线性代数式的取值范围问题,有时需要掌握更多的技巧.

例如,已知 $1\leqslant\lg\frac{x}{y}\leqslant 2$,$2\leqslant\lg\frac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant 3$,求 $\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}$ 的取值范围.

【解】　由已知 $1\leqslant\lg x-\lg y\leqslant 2$,$2\leqslant 2\lg x-\frac{1}{2}\lg y\leqslant 3$,$\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}=3\lg x-\frac{1}{3}\lg y$

设 $3\lg x-\frac{1}{3}\lg y=m(\lg x-\lg y)+n\left(2\lg x-\frac{1}{2}\lg y\right)$

用待定系数法求出 $m=-\frac{5}{9}$,$n=\frac{16}{9}$　　得 $\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}=-\frac{5}{9}(\lg x-\lg y)+\frac{16}{9}\left(2\lg x-\frac{1}{2}\lg y\right)$

$\because -\frac{10}{9}\leqslant-\frac{5}{9}(\lg x-\lg y)\leqslant-\frac{5}{9}$　　$\frac{32}{9}\leqslant\frac{16}{9}\left(2\lg x-\frac{1}{2}\lg y\right)\leqslant\frac{16}{3}$

$\therefore \frac{22}{9}\leqslant\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}\leqslant\frac{43}{9}$

思维方法诊断

【例 6】　设 $m>n>0$,$a>0$,试比较 a^m+a^{-m} 与 a^n+a^{-n} 的大小.

命题目的　考查不等式性质、指数函数的单调性等基本知识,以及分类讨论的数学思想在不等式问题中的运用.

【解】　$(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})$

$$=(a^m-a^n)+\left(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{a^n}\right)=(a^m-a^n)\left(1-\frac{1}{a^{m+n}}\right)=(a^m-a^n)\cdot\frac{a^{m+n}-1}{a^{m+n}}$$

当 $a>1$ 时,$\because m>n>0$,　$\therefore a^m>a^n$,$a^{m+n}>1$,　又 $\because a^{m+n}>0$,

$\therefore (a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})>0$,　则 $a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$;

当 $a=1$ 时,$\because a^m-a^n=0$,　$\therefore (a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})=0$,　则 $a^m+a^{-m}=a^n+a^{-n}$;

当 $0<a<1$ 时,$\because m>n>0$,　$\therefore a^m<a^n$,$a^{m+n}<1$,又 $\because a^{m+n}>0$

$\therefore (a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})>0$，则 $a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$

综上，当 $a=1$ 时，$a^m+a^{-m}=a^n+a^{-n}$； 当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，$a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$.

技巧评析 在用作差法比较大小时，如果因为差式中含有参数，不能确定差的符号，就应对参数进行分类讨论.

思维发散 分类讨论的关键是如何确定划分类别的标准，要做到既不重复又无遗漏，讨论的过程不但要清晰、简洁，还要注意对最后的结果作出归纳和小结.

例如，已知 $a>b,c>d,abcd\neq0$ 且 a,b,c,d 四个数中至少有三个同号，试比较 ac 与 bd 的大小.

【解】 1)当 a,b,c,d 均为正数时， $\because a>b>0,c>d>0,\therefore ac>bd$

2)当 a,b,c,d 均为负数时， $\because b<a<0,d<c<0$ $\therefore -b>-a>0,-d>-c>0$

$\therefore ac<bd$

3)当 a,b,c,d 中有3个正数，1个负数时， $\because a>b,c>d$， $\therefore a,c$ 均为正而 b,d 异号

$\therefore ac>0$ 而 $bd<0$ $\therefore ac>bd$

4)当 a,b,c,d 中有3个负数，1个正数时， $\because a>b,c>d$， $\therefore b,d$ 均为负而 a,c 异号

$\therefore ac<0$ 而 $bd>0$ $\therefore ac<bd$

综上，a,b,c,d 中至少有3个正数时，$ac>bd$；a,b,c,d 中至少有3个负数时，$ac<bd$.

【例7】 正数 a,b,c,d 满足 $a+d=b+c,|a-d|<|b-c|$，则 ad 与 bc 的大小关系是 ( )

A. $ad=bc$ B. $ad<bc$ C. $ad>bc$ D. ad 与 bc 大小关系不确定

命题目的 考查含绝对值的不等式的性质及运算能力.

【解】 由 $|a-d|<|b-c|$ 两边平方得，$a^2-2ad+d^2<b^2-2bc+c^2$ (1)

由 $a+d=b+c$ 两边平方，得 $a^2+2ad+d^2=b^2+2bc+c^2$ (2)

(1)式两边减去(2)式两边得 $-4ad<-4bc$ $\therefore ad>bc$，$\therefore$ 选 C.

技巧评析 根据不等式性质，两边均为正的不等式的两边可同时平方，所以在含绝对值的不等式中采用两边平方的方法去掉绝对值符号，就可避免对绝对值符号内的数取正负号的讨论.

思维发散 对较复杂的含绝对值的不等式问题，往往需要借助逻辑推理的方法求解.

例如，若 a、b 为实数，且 $a|a+b|<|a|(a+b)$，则 ( )

A. $a>0$ 且 $b<0$ B. $a>0$ 且 $b>-a$ C. $a<0$ 且 $b>-a$ D. $a<0$ 且 $b<-a$

【解】 若 $a>0$，则 $|a|=a$，由 $a|a+b|<|a|(a+b)$， 得 $|a+b|<a+b$，与 $|a+b|\geqslant a+b$ 矛盾.

又显然 $a\neq0$，否则 $a|a+b|=|a|(a+b)$，与题设矛盾

所以 $a<0$，此时 $a|a+b|<-a(a+b)$，得 $|a+b|>-(a+b)$，此不等式只能在 $-(a+b)<0$ 时才成立，所以 $b>-a$，即应有 $a<0$ 且 $b>-a$，故选 C.

综合应用能力诊断

【例8】 已知 a、b、c 是三角形 ABC 的三条边，试判断 $(a+b+c)^2$ 与 $4(ab+bc+ca)$ 的大小.

命题目的 应用不等式性质解三角形中的不等量关系问题.

【解】 $(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2-c^2-b^2-a^2$

$=(a-b+c)(a-b-c)+(a-c+b)(a-c-b)+(b-c+a)(b-c-a)$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中 $a+c>b,a-b<c$ $\therefore (a-b+c)(a-b-c)<0$

同理，上述差式中各项均为负.

$\therefore (a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)<0$， 即 $(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

技巧评析 运用因式分解的技巧，构造三角形三边之间的和差关系，再运用不等式性质求解.

思维发散 解三角形中边或角的不等量关系问题，需要综合运用不等式性质、正弦定理、余弦定理等基础知识求解.

例如，在$\triangle ABC$中，$\angle A\geqslant 120°$，求$\angle A$所对的边a与最小边的比值范围.

【解】 $\because \angle A\geqslant 120°$，$\therefore \cos A\leqslant -\frac{1}{2}$　$\therefore -2bc\cos A\geqslant bc$

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant b^2+c^2+bc$

因为 b^2+c^2+bc 中 b、c 为对称式，所以不妨假设 c 为最小边，则

$b\geqslant c, b^2\geqslant c^2, bc\geqslant c^2$　$\therefore a^2\geqslant b^2+c^2+bc\geqslant 3c^2$　$\therefore \frac{a^2}{c^2}\geqslant 3$，得$\frac{a}{c}\geqslant\sqrt{3}$

故 a 与最小边比值范围是$[\sqrt{3},+\infty)$.

【例 9】 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，$p=\log_a(a^3+a^2+1)$，$q=\log_a(2a^2+1)$，则 p,q 的大小关系是　(　)

A. $p>q$　　B. $p=q$　　C. $p<q$　　D. 当 $a>1$ 时 $p>q$；当 $0<a<1$ 时，$p<q$

命题目的　考查综合应用对数函数的性质和不等式性质及分类讨论的数学方法解题的能力.

【解】 $\because a^3+a^2+1-(2a^2+1)=a^3+a^2+1-2a^2-1=a^2(a-1)$

若 $a>1$　则 $a^2(a-1)>0$　　$a^3+a^2+1>2a^2+1$

$\because$对数函数为增函数　$\therefore \log_a(a^3+a^2+1)>\log_a(2a^2+1)$

若 $0<a<1$　则 $a^2(a-1)<0$　　$a^3+a^2+1<2a^2+1$

$\because$对数函数为减函数　$\therefore \log_a(a^3+a^2+1)>\log_a(2a^2+1)$.

综上，当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，$p>q$，故选 A.

技巧评析　先将真数比较大小，再利用对数函数的单调性比较两个对数的大小，本题如果直接比较两个对数的大小，则难度较大.

思维发散　对数不等式与对数函数单调性密切相关，而对数函数的单调性由底的范围决定，要注意发掘题目中关于底数的隐含条件.

例如，已知 $a^2<x<a$，$M=\log_a x^2$，$N=\log_2(\log_a x)$，$P=\log_a x$，则 M,N,P 之间的大小关系是　(　)

A. $M>N>P$　　B. $P>M>N$　　C. $M>P>N$　　D. $N>M>P$

【解】 由 $a^2<x<a$，得 $a^2<a$，可知 $0<a<1$，以 a 为底的对数函数为减函数

$M=\log_a x^2=2\log_a x=2P$，$N=\log_2(\log_a x)=\log_2 P$　　$\because a^2<x<a$，$\therefore \log_a a^2>\log_a x>\log_a a$

即 $1<P<2$.　　$\because 2<2P<4$，$\therefore 2<M<4$

$\because \log_2 1<\log_2 P<\log_2 2$，$\therefore 0<N<1$　　故 $M>P>N$，应选 C.

【例 10】 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的定义域、值域，判断函数的奇偶性、单调性，并指出函数的单调区间.

命题目的　掌握运用不等式性质讨论函数单调性的基本方法，熟悉函数 $x+\frac{1}{x}$ 的性质.

【解】 函数的定义域为 $x\neq 0$ 的一切实数

$\because f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，　$\therefore f(x)$在定义域内为奇函数

只须在$(0,+\infty)$内讨论 $f(x)$ 的单调性，再利用奇函数性质，便可知 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$内的单调性

设 $0<x_1<x_2<+\infty$　　$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$

已知 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，以下讨论 x_1x_2-1 的符号，

1) 当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$0<x_1x_2<1$　$\therefore x_1x_2-1<0$　　$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，

故 $f(x)$ 在$(0,1)$上是单调减函数.

2) 当 $1<x_1<x_2<+\infty$ 时，$x_1x_2>1$　$\therefore x_1x_2-1>0$　　$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，则 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在$(1,+\infty)$上是单调增函数.

由 $f(x)$ 为奇函数，可知 $f(x)$ 在$(-\infty,-1)$上是增函数，在$(-1,0)$上是减函数.

由上述讨论，可知当 $x=1$ 时，函数有极小值 2；当 $x=-1$ 时，函数有极大值 -2.

故 $f(x)$ 的值域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

技巧评析　讨论函数单调性，实质上类似于不等式的作差比较法. 难点是确定函数的单调区间.

思维发散 无论是证明函数在某区间的单调性，还是求函数的单调区间，最终都归结为对差式$f(x_1)-f(x_2)$的符号的讨论与判断，因此解题的关键是对差式进行正确的合理的变形，与一般作差法比较大小有所不同的是，要注意考查自变量在区间端点附近取值时差式的符号变化的情况.

例如，证明函数 $y=x+\frac{1}{x^2}(x>0)$在$(0,\sqrt[3]{2})$内单调递减，在$(\sqrt[3]{2},+\infty)$内单调递增.

【解】 设$0<x_1<x_2<\sqrt[3]{2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1^2}-\left(x_2+\frac{1}{x_2^2}\right)=x_1-x_2-\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2x_2^2}=(x_1-x_2)\left(1-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}\right)$$

$$=\frac{x_1-x_2}{x_1^2x_2^2}[x_1^2x_2^2-(x_1+x_2)]$$

$\because x_1^2x_2^2-(x_1+x_2)<x_1x_2^3-2x_1=x_1(x_2^3-2)$，　$\because x_2<\sqrt[3]{2},\therefore x_2^3<2$

$\therefore x_1(x_2^3-2)<0,x_1^2x_2^2-(x_1+x_2)<0$，　又$\because x_1-x_2<0,x_1^2x_2^2>0,\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

故$f(x)$在$(0,\sqrt[3]{2})$内为单调递减，同理可证$f(x)$在$(\sqrt[3]{2},+\infty)$内为单调递增.

【例11】 已知$a>b>c>d,ad=bc$，且$a>0$，试比较$a+d$与$b+c$的大小.

命题目的 不等式性质与等式性质的综合运用.

【解】 $\because ad=bc,\therefore\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\therefore\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$，　$\therefore\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$　$\because a>b,c>d,\therefore\frac{a-b}{c-d}>0$，

故$\frac{b}{d}>0$，即b,d同号，$\because ad=bc,\therefore a,c$同号，$\because a>0,\therefore c>0,\because b>c>0,\therefore d>0$即$a,b,c,d$均为正数.$\because b>d>0$　$\therefore\frac{b}{d}>1$，得$\frac{a-b}{c-d}>1$　$\because c-d>0$　$\therefore a-b>c-d$

故$a+d>b+c$

技巧评析 本题如果采用作差比较法将十分困难，关键的技巧是运用了等式的合比定理，另外运用推理的方法得出$a、b、c、d$均为正数也是必不可少的步骤.

思维发散 有些不等式题目，如果从正面入手难以解决，不妨换一个角度思考，采取间接的解法.

例如，已知实数a,b,c满足$a+b+c>0,ab+bc+ca>0,abc>0$，求证a,b,c均为正数.

证明 假设$a<0,\because abc>0,\therefore bc<0$

$\because a+b+c>0$　$\therefore b+c>-a>0$　$ab+bc+ac=a(b+c)+bc$

$\because a<0,b+c>0,\therefore a(b+c)<0$　$\because bc<0,\therefore a(b+c)+bc<0$，即$ab+bc+ac<0$，与题设矛盾.

又由$abc>0$知$a\neq0,\therefore a>0$　　同理可证$b>0,c>0$

综合知识能力测试

一、选择题

1. 若$a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则　(　)

A. $a>0$且$b>0$　B. $a>0$且$b<0$　C. $a<0$且$b>0$　D. $a<0$且$b<0$

2. 已知$x>y>z,x+y+z=0$，则　(　)

A. $xy>yz$　B. $xz>yz$　C. $xy>xz$　D. $x|y|>z|y|$

3. 已知$P=\sqrt{n}+\sqrt{n-3},Q=\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}$，当$n>3$时，$P$与$Q$的大小关系是　(　)

A. $P<Q$　B. $P=Q$　C. $P>Q$　D. 大小关系随n改变

4. 已知$a=\log_{\frac{1}{3}}5,b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}},c=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$，则　(　)

A. $a<b<c$　B. $a<c<b$　C. $c<a<b$　D. $c<b<a$

5. 已知$a、b、c、d$四个数满足条件(1)$d>c$，(2)$a+b=c+d$，(3)$a+d<b+c$，则有　(　)

A. $b>c>d>a$　B. $a>d>c>b$　C. $d>b>a>c$　D. $b>d>c>a$

二、填空题

6. $x>1,-1<y<0$,则 $x,y,-x,-y,-xy$,由小到大的顺序是________.

7. $a>0$ 且 $a\neq 1$,则 $\log_a(1+a)$与 $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$的大小关系是________.

8. 已知 $1<a<2,1<b<2$,则 ab^{-2}的取值范围是________.

9. 若 $a<b<0$,则下列不等式①$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,②$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$,③$|a|>|b|$,④$a^2>b^2$,⑤$a^2b+ab^2>a^3+b^3$ 中不能成立的是________.

三、解答题

10. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,比较 a^2+b^2 与 $ab+a+b-1$ 的大小.

11. 若 $a>0,bc>a^2$,且满足 $a^2-2ab+c^2=0$,判断 a,b,c 的大小.

12. 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0,abc=2$,求证:a,b,c 中至少有一个不小于 2.

13. 设 $x>0,y>0$ 证明不等式$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$

14. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$且 $a+b>2$,求证$\frac{1+b}{a}$与$\frac{1+a}{b}$中至少有一个小于 2.

答案与特别提示

一、选择题

1.B　2.C　3.A　4.B　5.D

二、填空题

6. $-x<y<-y<-xy<x$;7. $>$;8. $\left(\frac{1}{4},2\right)$;9.②.

三、解答题

10. 解:$a^2+b^2-(ab+a+b-1)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2]\geqslant 0$

$\therefore a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$

11. 解:先判断 a、b、c 的符号:由 $a>0,bc>a^2,2ab=a^2+c^2$,得 $bc>0,ab>0$ 得 $a>0,b>0,c>0$;再比较 a、b、c 大小:由$a^2-2ab+c^2=0$得 $b^2-c^2=(a-b)^2\geqslant 0$,若 $a=b$,则 $a=b=c$ 与 $bc>a^2$ 矛盾,$\therefore b>c$,$\therefore b^2>bc>a^2$　$\therefore b>a$,$\because a^2+c^2=2ab>2a^2$　$\therefore c>a$,故 $b>c>a$.

12. 解:$\because abc=2>0$　$\therefore a,b,c$ 中至少有一个正数,不妨假设 $a>0$,则 $b+c=-a,bc=\frac{2}{a}$,b,c 是方程 $x^2+ax+\frac{2}{a}=0$ 的两根,利用 $\Delta\geqslant 0$,得 $a\geqslant 2$.

13. 解:只须证明$(x^2+y^2)^3-(x^3+y^3)^2=x^2y^2\left[3\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{8}{3}y^2\right]>0$

14. 假设$\frac{1+b}{a}\geqslant 2$,且$\frac{1+a}{b}\geqslant 2$　　$\because a>0,b>0,\therefore 1+b\geqslant 2a,1+a\geqslant 2b$

得 $2+a+b\geqslant 2(a+b)$,即 $a+b\leqslant 2$,与题设矛盾,$\therefore\frac{1+b}{a}$与$\frac{1+a}{b}$中至少有一个小于 2.

6.2　算术平均数与几何平均数

基础知识诊断

【例 1】 设 $x>0,y>0,x+y\leqslant 4$,则有　　(　)

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$　　C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

命题目的　掌握均值不等式的正向使用和逆向使用.

【解】 $\because x>0,y>0,x+y\leqslant 4,\therefore\frac{1}{x+y}\geqslant\frac{1}{4}$,　故 A 错

$\because \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \geqslant \frac{2}{\frac{x+y}{2}}=\frac{4}{x+y} \geqslant \frac{4}{4}=1$， 故选 B

技巧评析 题解中两次运用均值不等式实现了由和式到积式，再由积式到和式的转换. 在进行不等式的放缩过程中一定要正确运用不等式的性质，保证不等式的传递性，使不等号的方向前后一致.

思维发散 运用放缩法证明不等式，需要把握放大或缩小的尺度，不要"太过"也不能"不及".

在下例中，如果采用$(x+y)^2 \geqslant (2\sqrt{xy})^2=4xy$，则因为缩小的太多而无法证得结论. 但若采用$(x+y)^2 \geqslant (x+y) \cdot 2\sqrt{xy}$则能完成证明.

例如，已知 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 求证：$\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y) \geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$

证明 $\because \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)-(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})=\frac{1}{2}(x+y)\left(x+y+\frac{1}{2}\right)-(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})$

$=\sqrt{xy}\left(x+y+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{xy}\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}+y-\sqrt{y}+\frac{1}{4}\right)$

$=\sqrt{xy}\left[\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2\right] \geqslant 0$

$\therefore \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y) \geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$

【例 2】 若 $x+3y-1=0$，则 2^x+8^y 的最小值是________.

命题目的 利用均值不等式求极值.

【解】 已知 $x+3y-1=0$，即 $x+3y=1$. $2^x+8^y=2^x+2^{3y} \geqslant 2\sqrt{2^x \cdot 2^{3y}}=2\sqrt{2^{x+3y}}=2\sqrt{2}$.

当且仅当 $2^x=2^{3y}$，即 $x=3y=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{6}$时，$2^x+8^y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

技巧评析 凡求两正数和的最小值，必然要考查它们的积是否为定值，再决定是否选择运用均值不等式求解.

思维发散 利用均值不等式求极值关键是配凑两数的和或积为定值，但配凑可有多种方法.

例如，已知 $a>0, b>0, a+b=1$，求$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$的最大值.

解法 1 $\because \sqrt{a+\frac{1}{2}}=\sqrt{1 \cdot \left(a+\frac{1}{2}\right)} \leqslant \frac{1+a+\frac{1}{2}}{2}$ $\quad \sqrt{b+\frac{1}{2}}=\sqrt{1 \cdot \left(b+\frac{1}{2}\right)} \leqslant \frac{1+b+\frac{1}{2}}{2}$

两式相加得

$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}} \leqslant \frac{3+a+b}{2}=2$ 当且仅当 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$时原式取最大值 2

解法 2 利用公式$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$(即算术平均数不大于平方平均数).

$\because \sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{\frac{a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{2}}{2}}=2$ 故当 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$时原式取最大值 2.

【例 3】 设 $x, y \in \mathbf{R}^+$，且 $xy-(x+y)=1$，则 $x+y$ 的最小值是________.

命题目的 掌握在约束条件下利用均值不等式求极值的解题技巧.

【解】 $\because xy-(x+y)=1 \quad \therefore 1+(x+y)=xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$ 即$(x+y)^2-4(x+y)-4 \geqslant 0$

解此不等式得 $x+y \geqslant 2+2\sqrt{2}$ 或 $x+y \leqslant 2-2\sqrt{2}$(舍去)

故当 $x=y=1+\sqrt{2}$时，$x+y$ 取最小值 $2+2\sqrt{2}$.

技巧评析 利用均值不等式将题设条件中的等式构造成不等式，将 $x+y$ 作为一个整体未知量，通过解不等式求出其范围，从而求出最小值.

思维发散　构造法和整体法是一个重要的数学思想方法.

例如,已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$, $a\neq b$,且满足 $a^2+ab+b^2=a+b$,求证:$1<a+b<\frac{4}{3}$.

证明　由 $a^2+ab+b^2=a+b$,得 $(a+b)^2>a+b>0$

$\therefore a+b>1$　又由 $a+b=a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab>(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{3(a+b)^2}{4}$,

得 $a+b<\frac{4}{3}$　故 $1<a+b<\frac{4}{3}$

知识迁移诊断

【例 4】　已知 $x>\frac{3}{2}$,求函数 $y=x+\frac{1}{2x-3}$ 的最小值.

命题目的　运用均值不等式求函数的极值.

【解】　$\because x>\frac{3}{2}$　$\therefore 2x-3>0$

$y=x+\frac{1}{2x-3}=\frac{2x-3}{2}+\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}=\sqrt{2}+\frac{3}{2}$

当且仅当 $\frac{2x-3}{2}=\frac{1}{2x-3}$, $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ 时,取"="号.所以,当 $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ 时,函数最小值为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

技巧评析　利用均值不等式求两个数的和(或积)的极值时,必须满足三个必要条件:一是两数均为正数;二是两数积(或和)为定值;三是等号能成立.函数式变形的目标就是使之满足上述三个条件从而求出极值.

思维发散　求函数极值时,如何判断应将函数式看成和式还是看成积式,主要应根据题目的要求,若求最大值,一般将函数式看成积式;求最小值,一般将函数式看成和式.有些题目要先对函数式施行平方或其他运算后才能利用均值定理求解.

例如,求函数 $y=\sin\frac{x}{2}\sqrt{1+\cos x}\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的最大值.

【解】　$\because x\in[0,\pi]$,　$\therefore y\geqslant 0$

$y^2=\sin^2\frac{x}{2}(1+\cos x)=\frac{1}{2}(1-\cos x)(1+\cos x)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos x+1+\cos x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 当且仅当 $1-\cos x=1+\cos x$,即 $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $y^2=\frac{1}{2}$,从而 y 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 5】　若 $x>0,y>0$,且 $2x+y=1$,求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

命题目的　掌握利用均值不等式求极值时,适当运用题设条件的技巧.

【解】　$\because 2x+y=1$　$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=2+\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}+1\geqslant 3+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=3+2\sqrt{2}$

当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}$,即 $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $y=\sqrt{2}-1$ 时 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

技巧评析　如果由 $2x+y=1$ 解出 $y=1-2x$ 代入 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 得到一个分式函数 $z=\frac{x-1}{2x^2-x}$ 将其变形为关于 z 的一元二次方程. $2zx^2-(z+1)x+1=0$,利用 $\Delta\geqslant 0$ 得 $z\geqslant 3+2\sqrt{2}$,从而求得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.显然,选择均值不等式求解简捷得多.

思维发散　由于求函数极值有多种方法,往往是难以判断究竟选择何种方法适宜,如果注意发掘题目中的隐含条件,就能够使一些看似与均值不等式无关的题目转化为利用均值不等式求解.

例如,若 α 为锐角,求 $\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{8}{\cos^2\alpha}$ 的最小值.

【解】 $\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{8}{\cos^2\alpha}=\frac{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}+\frac{8(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$

$=2(1+\cot^2\alpha)+8(\tan^2\alpha+1)=10+2\cot^2\alpha+8\tan^2\alpha\geqslant10+8=18$

当且仅当 $\tan\alpha=\frac{\sqrt2}{2}$，即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{3}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt6}{3}$ 时，原式取最小值 18.

【例 6】 若 $x>0,y>0$，且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 成立，求 a 的最小值.

命题目的 考查不等式性质，均值不等式，函数的值域，集合等基础知识.

【解】 $\because x>0,y>0\quad\therefore a\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ (1)

$\because\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+2\sqrt{xy}+y}\leqslant\sqrt{2x+2y}\quad\therefore\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\leqslant\sqrt2$ (2)

由(1)，(2)知 $a\geqslant\sqrt2$，即 a 的最小值为 $\sqrt2$.

技巧评析 有的同学认为由 $a\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 及 $\sqrt2\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 并不能导出 $a\geqslant\sqrt2$. 这是对题意不明造成的误解. 题意是说，要使(1)式恒成立，实数 a 必须大于或等于代数式 $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 所取值的集合中的所有值，而(2)式表明该集合的最大值为 $\sqrt2$，故取 $a\geqslant\sqrt2$.

思维发散 有些求函数的极值的题目，不仅局限于使用某一种方法，在解题时如果能将利用均值不等式与利用其他方法(如利用二次函数求极值的方法)结合起来，就会使问题顺利解决.

例如，设函数 $f(x)=\log_3\left(x^2-4mx-4m^2+m+\frac{1}{m-1}\right)$，求证：当 $m>1$ 时，$f(x)$ 的最小值不小于 1.

【解】 $\because x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}=(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}$

当 $m>1$ 时，真数恒为正且最小值为 $m+\frac{1}{m-1}$ $\therefore$ 当 $x=2m$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$

$\because\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)=\log_3\left(m-1+\frac{1}{m-1}+1\right)\geqslant\log_3(2+1)=1$ $\therefore f(x)$ 的最小值不小于 1.

思维方法诊断

【例 7】 求函数 $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的值域.

命题目的 正确认识使用均值不等式求函数值域的必要条件.

【错解】 $\because y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant2$

$\therefore$ 函数值域为 $[2,+\infty)$

误点矫正 上述解答中，虽然运用了拆项的方法，使函数成为两数和的形式，但忽略了等号成立这一必要条件. 事实上当 $\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 时，得 $x^2=-1$，无实数解，故等号不成立.

【正解】 $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

$\geqslant2\sqrt2-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant2\sqrt2-\frac{1}{\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{2}$

当 $\sqrt{x^2+2}=\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}$，即 $x=0$ 时，第一个等号成立，$\sqrt{x^2+2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}$ 取得最小值 $2\sqrt2$. 又当 $x=0$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 取得最大值 $\frac{1}{\sqrt2}$，此时，第二个等号也成立，$2\sqrt2-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 取得最小值 $\frac{3\sqrt2}{2}$.