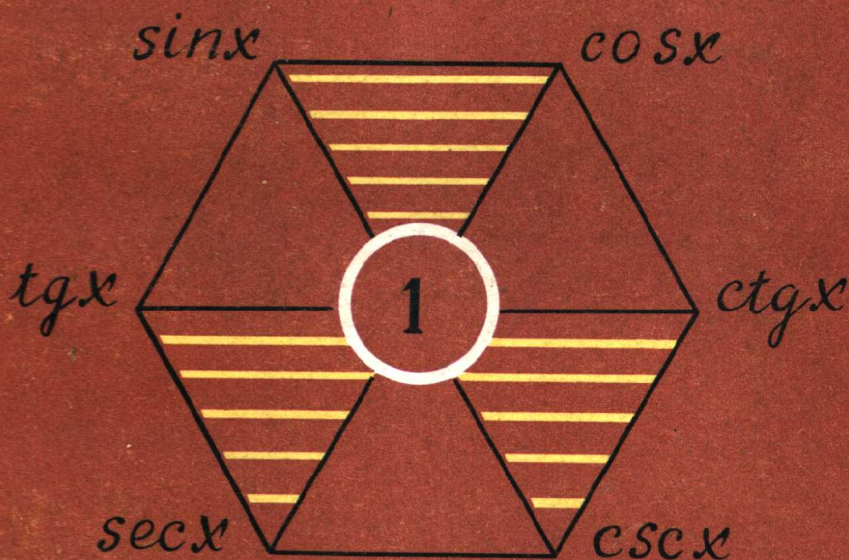


平面三角

教与学



李燕杰 编著
郭健



Pingmiansan-jiao
jiao-yu-xue

黑龙江科学技术出版社

平面三角教与学

李燕杰 郭 建 编著

黑龙江科学技术出版社

一九八二年·哈尔滨

封面设计：杨海燕

平面三角教与学

李燕杰 郭 建 编著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区分部街28号)

牡丹江印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32·印张 15 12/16·字数320千

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

印数：1—24,000

书号：13217·020

定价：1.40元

致 读 者

平面三角是初等数学的重要组成部分。它不仅在几何、代数、微积分中有着广泛的应用，而且也是学习物理（力学、电学、光学）和其他学科的基础知识。

平面三角的显著特点是，理论不难理解，但由于公式多，应用广，三角函数及反三角函数较其他基本初等函数复杂。这就给教与学两个方面带来一定的困难。

初学平面三角的人，常常不得学习要领。有的即使能背诵书中所列出的定义、公式，但一遇三角习题，还是找不到解题办法、无从下手。因此，解题常耗时过多，久而久之，有的学生对平面三角产生畏难情绪。刚刚从事平面三角教学的青年教师，由于对教材理解不深，对学生学习上的困难认识不足，加上教学不甚得法，以致教学时不能居高临下指导学生抓住要点，迅速入门、打好基础。对于有些准备报考大学或中专的学生，综合运用三角、代数、几何知识解题的能力也较弱。本书就是针对平面三角“教”与“学”过程中存在的上述实际困难而编写的。在编写时注意了以下几点：

1. 通过正面阐述和举反例，讲清平面三角中的基本概念、性质、公式的本质特征，及各公式间的内在联系，特别注意阐明这些概念、性质、公式应用的要点，以便从心理上到技术上扫清学习中的障碍，激发学生学好三角的兴趣和信心。

2. 力求对平面三角的重要习题加以分类，结合典型例题，讲清解题的基本思路与基本方法、技巧，以使读者读后

能举一反三、触类旁通、抓住要点、迅速入门、打好基础。本书着重阐述解题思路、方法，以及如何掌握它们。因此，交叉使用“一解多题”与“一题多解”，是本书编写上的一个明显特点。阅读本书要特别注意琢磨与领会每一单元之前的解题分析和解题后的附注。这是学会解答各种平面三角习题的钥匙。

3. 全书自始至终注意自觉运用代数的观点和方法处理三角问题。一般初学者对此往往认识不足，而这种将代数与三角割裂开来的学习和教学方法，恰恰是导致学习平面三角感到困难的一个重要原因。

4. 注意三角与代数、几何综合运用能力的培养。如“三角法证几何题”、“解三角形及其应用”、“解三角方程及其应用”、“三角函数极值的求法及应用”、“用三角法解代数方程、证代数不等式”、“用代数法解三角方程”……初学者可按书中指示去选读。对准备报考大学的学生来说，则应重点阅读和演算全部练习题。教学实践表明，这样做后，可以很快提高综合应用三角、代数、几何知识的能力，从而适应高一级学校的要求。

5. 为了使读者把平面三角的主要内容真正学到手，每单元之后都配备了一定数量的练习题，供教与学时选用。对较难的习题，虽然都给了解答和提示，但希望读者还是尽量自己去独立完成它。因为解题遇到困难，表明你对书中所介绍的理论和方法还没有真正掌握。这时再带着问题翻阅已读过的章节，仔细阅读、思考之后，常常会豁然开朗，信手推算出结果来。

关于学习的方法，大致应遵循这样的程序：读书——做题——总结。这里深入思考、反复琢磨所学内容的要点是大前

提，但理解与掌握理论、方法、应用的最好方法是解答适量的习题，特别是应用题。而要想对书中内容做到透彻理解，并能在解题时思路明晰，运用自如，还必须抓住总结这一环节。忽视这一点，恰是一些看过很多题解书后仍然不会解题的根本原因。为此，希望读者每在读完本书的某单元或某章，并认真地做完练习之后，一定要花些时间就这一单元或这一章的概念本质、问题分类、解法的依据与分析、解法的要点、常用方法及技巧等，加以认真总结，使自己得到的感性认识产生飞跃，以形成规律性的认识。这就是人们常说的，将书“由薄念厚，再由厚念薄”的过程。

本书主要根据笔者近二十年从事数学教学的体会，并注意吸收了国内这方面经验的精华，以及参考日本、法国、苏联等有关资料编写而成。本书初稿由特级教师李戈侯老师审阅，在编写中承蒙哈尔滨师专领导及数学科同志们的大力支持、帮助，在此深表谢意。书中的缺点、错误，尚希读者指正。

编 著 者

目 录

致读者

第一章 解三角形 (1)

一、教材分析与教法建议 (1)

二、关于正弦定理、余弦定理、射影定理的关系及 证明方法 (13)

三、解三角形及其应用 (23)

(一) 解直角三角形 (23)

(二) 解斜三角形 (27)

(三) 解三角形的应用 (38)

四、应用正弦定理、余弦定理、射影定理判定三角形 的形状 (57)

五、应用正弦定理、余弦定理、射影定理证明三角形 边角等式及不等式 (64)

(一) 证明三角形边角关系式的基本公式及应用 要点 (65)

(二) 几种类型的三角形边角关系式的证法 (69)

(三) 带有“附加条件”的三角形边角关系式的证 法 (83)

六、应用三角法证明几何题 (90)

(一) 应用三角函数定义证平面几何题 (96)

(二) 应用正弦定理、余弦定理等三角形边角关 系式证明平面几何题 (104)

第二章 三角函数的图象及性质	(138)
一、教材分析与教法建议	(138)
(一) 关于弧度制的教学	(139)
(二) 关于三角函数周期性的教学	(144)
(三) 关于三角公式及其综合应用的教学	(150)
(四) 关于三角式求值问题中的符号讨论	(158)
二、关于三角函数计算	(163)
(一) 根据定义求值	(163)
(二) 根据特殊角三角函数值计算	(164)
(三) 根据同名三角函数关系式求值	(165)
(四) 根据诱导公式求值	(169)
三、关于三角式的恒等变形	(172)
(一) 三角式的化简	(172)
(二) 在定义域内恒等式证明	(175)
(三) “条件等式”的证明	(179)
四、关于简单三角不等式的求解与证明	(188)
(一) 关于三角不等式的证明	(188)
(二) 关于三角不等式(组)解法	(200)
五、关于三角函数的性质和图象	(207)
第三章 两角和与差的三角函数	(236)
一、教材分析与教法建议	(236)
二、关于三角函数值的计算	(258)
(一) 求已知角的三角函数值	(259)
(二) 求几个三角函数式的和或积或和、积混合式的值	(261)
(三) 已知某角(或某几个角)的三角函数值, 求两角和、差或倍、半角的三角函数值	(270)

(四) 已知三角函数值, 求角	(280)
三、关于三角函数式的化简	(288)
四、关于三角恒等式的证明	(297)
五、关于带附加条件的三角等式的证明	(310)
(一) 约束条件是三角函数关系式	(311)
(二) 约束条件是角的关系式	(318)
六、关于三角不等式的证明	(329)
七、三角函数式极值求法与应用	(340)
(一) 可化为一次函数 $y=kx+b, c \leq x \leq d$ 的条件极值的三角函数极值求法	(341)
(二) 可化为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), $c \leq x \leq d$ 的条件极值的三角函数式的极值求法	(344)
(三) 可化为分式函数的条件极值的三角函数式的极值求法	(347)
(四) 利用不等式	

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

求极值, (其中 $a_i > 0, i=1, 2, \cdots, n$) (352)

(五) 对角有约束条件的三角函数极值求法 ... (354)

(六) 三角函数极值的应用

第四章 反三角函数

一、教材分析与教法建议

二、关于反三角函数的三角运算

三、关于三角函数的反三角运算

四、关于反三角恒等式的证明

五、关于反三角方程和不等式的解法

六、关于与反三角函数相关的函数的图象	(420)
第五章 三角方程	(425)
一、教材分析与教法建议	(425)
二、关于最简单的三角方程的解法	(429)
三、几种常见的简单三角方程之解法	(432)
(一) 可化为 $af^2(x)+bf(x)+c=0$ ($a \neq 0$) 型 三角方程之解法	(432)
(二) 因式分解法	(435)
(三) 关于 $\sin x, \cos x$ 的齐次方程的解法	(437)
(四) 和差化积法	(438)
(五) $A\sin x+B\cos x=C$ 型方程解法	(440)
(六) $f(ax)=f(bx)$ 型方程解法	(442)
(七) 可化为代数方程(组)的三角方程解法 ——换元法	(451)
四、关于三角方程不同形式的一般解的等价性 ...	(457)
五、关于三角方程的增根与减根	(465)
六、关于三角方程组的解法	(473)
七、解三角方程的应用	(480)

第一章 解三角形

一、教材分析与教法建议

作为传统数学的三角学的内容，按现行《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》（以后简称大纲）规定，共分四章讲授，其中“解三角形”一章放在初中三年级学习，另外三章，即“三角函数”、“两角和与差的三角函数”及“反三角函数和简单的三角方程”则安排在高中一年级学习。

在教材处理上新教材有以下几个明显的特点：

1. 从三角函数概念的建立到主要三角公式的推导，都采用的是“坐标法”。这样便于用代数的观点及方法对三角函数及其性质应用进行研究。只是在讨论三角函数的图象及性质时，才引进“单位圆及三角函数线”，辅之以“几何法”，使“数”、“形”结合而便于认识、研究三角函数的性质，从而免去不少关于三角函数性质的较复杂的解析论证。应用“坐标法”来导出三角形的边角关系主要定理——正弦定理与余弦定理，以及三角函数的和、差、倍、分、和差化积与积化和差等全部公式的基础——两角差的余弦公式等，都远比纯“几何法”的证明简捷得多，而且很容易得到这些定理的一般形式，从而免去冗长的论证。

2. 过去的课本总是把全部三角内容分作两个循环来学习，即先学习锐角三角函数——它是从直角三角形两边之比这个角度来定义的，然后再推广角的概念，再给出任意角的

三角函数的定义，继而研究三角函数及其性质与应用。新教材则恰恰相反，紧跟在学过“直角坐标系”以后，直接用“坐标法”给出了一般的三角函数定义。在这基础上，转而讨论当 α 为锐角、钝角情况下的函数性质，由此解决了直角三角形及斜三角形的边角计算问题。这种由一般到特殊的安排，学生在学习时不致引起很大困难。但是考虑到这时学生还没有学习函数概念，所以，教学时对概念的讲解既要注意渗透函数概念的思想，又要注意分寸。显然，学生对三角函数概念本身有较明晰、透彻认识与理解，则应在学习函数概念之后，这样要求才是妥当的。这阶段只要求学生能利用三角函数概念，导出直角三角形及斜三角形的边角主要关系式，并能用之解三角形就可以了。这种安排的优点在于初中毕业生也能完整地掌握三角形解法。

3. 在一般关于平面三角的教科书中，总是把《解三角形》一章放在三角函数性质及主要公式导出之后。这样安排可以有充足的工具去定量或定性地研究三角形的边、角关系，以及讨论解斜三角形的主要工具——正弦定理、余弦定理的广泛应用，而现行教材的安排，势必使这些研究工作受到限制。这就要求教者对教材有通盘考虑，做到胸中有全局，对公式及定理之应用的展开，要在本章及以后章节中逐次引入、展开，既不可“毕其功于一役”，又不可顾此失彼，单打一，忽视知识的综合运用及教材必要的补充。

根据现行《大纲》关于“教学内容”的安排，要“有利于精简课程门类，有利于教学内容现代化，有利于学生学好基础知识和掌握基本技能，有利于数学知识的综合运用”的规定。我认为有一些内容应补充在本章教学之中，有一些则应在以后相应章节教学时逐次加以补充，从而使学生对解直角

三角形及解斜三角形的方法与理论有更深入的认识与理解，使学生在掌握基础知识与基本技能的同时，大大增强综合运用数学知识解题的能力。

第一、在解直角三角形部分，除现行教材中关于抽象的直角三角形的数值解法，及其在实际测量中的应用外，应加强运用解直角三角形方法，即“三角法”论证平面几何问题的能力之培养，及用解直角三角形的方法于实际测量的训练。

第二、关于正弦定理、余弦定理的应用，本章突出了它们在解任意三角形方面的应用，并在复习题二中，通过第14、19、20三题提出了用“三角法”证平面几何命题的问题。但限于学生没有掌握关于三角变换的公式，使得上述关于三角形边角关系的两个重要定理应用的教学不能不受到限制。为此，应在本章教学时注意以下几点：

1. 上好测量实习课，以培养学生实际运用所学三角知识的能力。

2. 加强“三角法”论证平面几何命题的训练。本章内先在直线形内展开，学完“圆”时，再做相应练习；待高中学完三角变换公式后，再练习一些更复杂的“三角法”证明题。

3. 加强对三角形形状的定性研究，即根据一定条件来判定三角形之形状。本章只能借助于正弦、余弦定理把问题转化为代数问题处理。而解决这类问题的另一重要方法——三角法，则在讲完三角变换公式之后引入为宜。

4. 应用正弦定理、余弦定理以及射影定理论证关于三角形的边角等式、不等式常常显得特别简便。这部分内容应在讲过三角变换公式之后作为其综合应用而加以练习是完全

必要的。

5. 与代数综合，将余弦定理作为建立二次函数或二次方程（组）的等量关系，从而为用代数方法解决三角形边角计算及边、角、面积的极值问题提供一个强有力的工具。在以后学习相应的章节（如二次函数）应注意引入，以培养学生综合运用所学知识解决实际问题的能力。

6. 应用正弦定理、余弦定理可以在原来学生熟悉的三角形面积公式基础上，逐次建立在不同的确定三角形的条件下，三角形面积计算的各种公式：

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C, \Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{其中 } p = \frac{1}{2}(a+b+c), \Delta = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin(B+C)}, \Delta = r \cdot p, \text{ 其中 } r$$

为三角形内切圆半径、 $\Delta = \frac{abc}{4R}$ 。其中 R 为三角形外接圆半径等。

在本章及以后相关章节注意讲解它们的应用。

7. 关于正弦定理、余弦定理及射影定理，本质上都是表现三角形边角关系的，只是表现的形式不同而已。所以它们之间必然可以相互转化。另一方面，每个定理都有多种证法，鉴于此，完全可以在适当的时候给学生作一次报告，以开拓学生思路和明确它们彼此之间的内在联系。

（一）三角函数

这一单元包括三个小节：三角函数的定义、特殊角（ 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° ）的三角函数值及三角函数值，这些都是学好第一章的基础。务必使学生初步理解三角函数的概念，

记住特殊角的三角函数值，掌握化钝角三角函数为锐角三角函数的诱导公式及学会查三角函数表。

关于三角函数定义的教学要注意强调 α 角一经确定， α 角的四个三角函数值也就依定义随之而定，而与 $P(x, y)$ 点在终边上的位置无关。根据相似三角形的知识，学生对此是不难理解的。

鉴于这一章中主要是以三角函数定义为工具解三角形，故对定义只要在 0° 到 180° 间讨论清楚就可以了。正因为解三角形的需要，在讲清三角函数定义后，可用角 α 的正弦即 $\sin\alpha$ 为例说明：当角 α 终边上一点 P 的坐标 (x, y) 、点 P 与坐标原点的距离 r 以及正弦值 $\sin\alpha$ ，这四个量已知其中任意两个，则可求另外两个。这里要特别着重引导学生练习：

1. 已知 α 角终边上任意异于坐标原点的 P 点坐标 (x, y) ，求 α 角的四个三角函数值；

2. 已知 α 角终边上任意异于坐标原点的 P 点到原点 O 的距离 r 及 $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ 来表示 P 点的坐标 (x, y) 即 $x = r\cos\alpha$ ， $y = r\sin\alpha$ 。

另外，要使学生正确掌握四个三角函数的读法及写法。

关于特殊角三角函数的教学，根据三角函数的定义，求出 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值并不困难。但学生在运算中常常搞错。教学时可以发动学生共同研究掌握这一基础知识的方法。为了从这些特殊角的函数值的联系中掌握它们，教学时，可将课本上 $P32$ 表改列如下：

角 度 函 数	30°	45°	60°
正 弦	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
余 弦	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
正 切	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{1}$

可编成口诀：“一二三，三二一，根三分之一，一根三”。记住了正切值，利用余切值与正切值的倒数关系也就相应解决了。

此外，如遇特殊角三角函数值，根据三角函数定义，看看三角板，问题也可解决而且不致出错。如图 1—1。

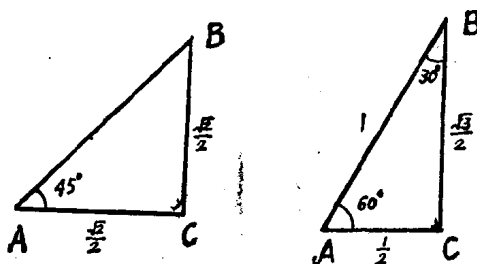


图 1—1

关于查三角函数表求 α 角的三角函数值，应向学生指出学习它的必要性。

尽管学生已会求特殊角的三角函数值，也会求 40° 角的三角函数值，但后面这种用作图及度量方法所求得近似值不仅不能很精确，误差也很难估计。事实上，在绝大多数情况下，三角函数值的计算已不能用初等方法（指加、减、

乘、除、乘方、开方的有限次运算)来解决。给定一个角,求三角函数值,通常是运用“三角函数表”解决的。

在进行“查表求值”的教学时,重点放在正弦函数表及余弦函数表的查法上。而这两种表的查法又将重点放在修正值的运用上。因为在这点上学生容易出错。

如:求 $\sin 37^\circ 26' = ?$

$$\begin{aligned}\text{写成: } \sin 37^\circ 26' &= \sin 37^\circ 24' + 2' \\ &= 0.6074 + 0.0005 = 0.6079.\end{aligned}$$

又如:已知 α 为锐角,且 $\sin \alpha = 0.6079$, 求 $\alpha = ?$ 学生常出现如下错误:

$$\sin \alpha = 0.6079 = 37^\circ 26'.$$

对这些由于概念不清而引起的写法上的、或实质性错误,应通过针对性讲解加以纠正。同时,课本上给出了最初学习时的书写格式,这是有助于克服上述错误的。

在应用修正值时,务必通过查表的练习使学生发现在 0° 到 90° 内,正弦函数是单调增函数即随角度增加,正弦函数值变大;而余弦函数则相反,随角度增加,余弦值反而减小。对正切函数、余切函数也应使学生认识到在 0° 到 90° 内,它们分别是单调增函数和单调减函数。否则,需用修正值时,必然搞错。(这里不必给出单调增、减函数的定义,但是它的性质完全可以从表上看出。而且必须使学生掌握)

在解决锐角三角函数查表求值后,准确掌握和熟练应用化钝角三角函数为锐角三角函数的诱导公式就成为钝角三角函数查表求值的关键了。

总之,掌握诱导公式及锐角三角函数查表计算是三角函数查表求值的关键所在。