普通工科高等院校教学辅导用书

高等数学自学辅导与习题选解（上册）

（配《高等数学》第三版）

刘浩荣　郭景德　编著

同济大学出版社

普通工科高等院校教学辅导用书

高等数学自学辅导与习题选解
（上册）

（配《高等数学》（第三版））

刘浩荣
郭景德
编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书根据同济大学出版社已出版的《高等数学》(第三版)及所配《高等数学习题集》编写的配套辅导参考书. 上册内容有函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与洛必达法则、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等10章,每章由内容提要、增补例题解析、各类习题的习题选解和综合练习题及解答参考等组成. 本书旨在帮助读者掌握原教材中各章的基本知识要点及有关的基本概念,拓宽解题的思路和方法,提高解题的能力. 特别是在学习中遇到完成习题作业有困难时,可随时查阅"习题选解",以便得到解题思路和方法的启迪或借鉴.

本书可供高等工科类专业的学生,特别是使用上述《高等数学》教材及所配习题集的读者作为学习高等数学课程的辅导用书,也可作为工程技术人员及各类"高等数学"自学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学辅导与习题选解. 上册/刘浩荣,郭景德编著.
—上海:同济大学出版社,2004.3
ISBN 7-5608-2623-7/O·247

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘…②郭… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 103544 号

高等数学自学辅导与习题选解(上册)

刘浩荣 郭景德 编著

责任编辑 李炳钊 责任校对 徐 栩 封面设计 李志云

出 版 发 行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	同济大学印刷厂印刷
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	27.75
字 数	555000
印 数	1—4000
版 次	2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-5608-2623-7/O·247
定 价	28.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前　言

为了便于使用由同济大学出版社已出版的高等工科类教材《高等数学》(第三版)及所配的《高等数学习题集》,我们特地编写了这套《高等数学自学辅导与习题选解》(上、下册),旨在帮助读者掌握教材中的各章知识要点及有关的基本概念,拓宽解题的思路和方法,着重于提高解题的能力.上册内有函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与洛必达法则、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等10章,各章由内容提要、例题解析、习题选解、综合练习题及解答参考四部分内容组成.为与原教材配套使用时查找方便,本书仍按原教材的章节序号编排,且亦分上、下册出版.

在编写本书时,编者除了对各章的内容加以精辟地归纳总结外,还精心地增补了若干例题加以解析.这些例题中,有的题型较新,更具有典型性及综合性;有些例题的解题方法,既有分析引导,又给出多于一种的解法,便于分析比较和总结,提高解题的能力.对于初学"高等数学"的读者,常会遇到完成习题作业中不会解题的困难.为了克服这类困难,只要查找有关章节的"习题选解",便可得到解题思路和方法的启迪或借鉴,困难便可迎刃而解.此外,本书的各章还配有少量的"综合练习题及解答参考",可供读者以巩固提高之用.

本书对于初学"高等教学"的读者,特别是使用同济大学出版社出版的上述《高等数学》教材及所配《高等数学习题集》的读者,更是一套不可缺少的学习辅导用书.

本书由同济大学数学系刘浩荣教授和郭景德副教授合作编写.在编写出版的过程中,曾参考或引用过原同济大学函授数学教研室所编著出版的函授高等数学教材及"高等数学自学及解题指导"等有关资料;也得到了同济大学出版社,特别是李炳钊副编审的大力支持.我们在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中缺点或错误难免,恳请读者或同行批评指正.

编者于同济

2003年9月

目　录

第一章 函 数

一、内容提要

（一）函数的概念

设 D 是某一实数集，若变量 x 在 D 中每取一个数值时，另一个变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这时，x 称为**自变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**.

在函数的定义中，定义域和对应法则是确定一个函数的两个要素，与自变量及函数所选的字母无关.

（二）函数的几种特性

1. **有界性** 设函数 $f(x)$ 在某一实数集 A 上有定义，若存在正数 M，对于一切 $x\in A$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在集合 A 上**有界**.

2. **奇偶性** 设函数 $f(x)$ 的定义域是实数集 D，对任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

3. **单调性** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**.

4. **周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为实数集 D，若存在一个正数 l，使得对任意的 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且满足关系式 $f(x\pm l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常所说的周期是指最小正周期.

（三）反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是实数集 D，值域是实数集 W. 若对于任意的 $y\in W$，通过关系式 $y=f(x)$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，则称这样确定的函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 习惯上，将反函数 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$. $y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

(四) 复合函数

给定两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$,如果当 $u=\varphi(x)$ 的值域或值域的一部分在 $y=f(u)$ 的定义域内,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**.

(五) 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^\mu$(μ 是实数,$\mu\neq0$).

(2) 指数函数 $y=a^x$(a 是实数,$a>0$ 且 $a\neq1$),定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,函数是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,函数是单调减少的.

(3) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)是 $y=a^x$ 的反函数,定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,函数是单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数是单调减少. 特别地,以 e(e=2.718 281…)为底的对数称为**自然对数**,记作 $y=\ln x$.

(4) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$.

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

2. **初等函数** 由基本初等函数及常数,经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的,且用一个数学式子表示的函数. 分段函数一般不是初等函数.

二、例题解析

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{\ln(x+2)}$; (2) $y=\arcsin\dfrac{x+3}{7}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 (1) 要使函数 y 有定义,x 必须满足不等式组:

$$\begin{cases}12-x-x^2\geqslant0,\\ x+2>0,\\ \ln(x+2)\neq0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}(4+x)(3-x)\geqslant0,\\ x>-2,\\ x+2\neq1,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant3,\\ x>-2,\\ x\neq-1,\end{cases}$$

所以定义域为$(-2,-1)\cup(-1,3]$.

(2) x 必须满足不等式组:$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x+3}{7}\leqslant 1,\\ x^2-1>0,\end{cases}$ 化简后,得$\begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 4,\\ x<-1 \text{ 或 } x>1,\end{cases}$

所以定义域为$[-10,-1)\cup(1,4]$.

一般,讨论函数的定义域,可以从以下几方面考虑:分母的算式不能等于零;开偶次方被开方的算式要大于等于零;对数函数中,真数部分要大于零;反正弦 $\arcsin\varphi(x)$或反余弦 $\arccos\varphi(x)$中,要求$|\varphi(x)|\leqslant 1$;对于实际问题,还应考虑要使实际问题有意义.

例 2 设函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,求函数 $\varphi(x)=f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$的定义域.

解 $f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$是由 $f(u)$与 $u=x+\dfrac{1}{4}$复合而成. $f(u)$和 $f(x)$只是自变量选择的字母不同,它们是同一个函数,故 $f(u)$的定义域也是$[0,1]$,即 $0\leqslant u\leqslant 1$,由 $u=x+\dfrac{1}{4}$,得 $0\leqslant x+\dfrac{1}{4}\leqslant 1$,所以 $f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$的定义域是$-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{4}$.

同理,$f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$的定义域为$\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}$.

因此,$\varphi(x)$的定义域为$\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]\cap\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}\right]=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$.

例 3 确定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=|x\sin x|\tan x$;

(2) $F(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)f(x)$,其中 $f(x)$是奇函数;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\cos x$.

解 (1) $f(-x)=|(-x)\sin(-x)|\tan(-x)=-|x\sin x|\tan x=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数;

(2) $F(-x)=\left(\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}\right)f(-x)=\dfrac{1-e^{-x}}{2(e^{-x}+1)}[-f(x)]$

$$=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)}[-f(x)]=\frac{1-e^x}{2(e^x+1)}f(x)=F(x).$$

所以 $F(x)$ 是偶函数；

(3) $f(-x)=\sqrt[3]{-x}+\cos(-x)=-\sqrt[3]{x}+\cos x$，由于 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既不是偶函数，又不是奇函数.

例 4　函数 $y=\ln(x-1)$ 在下列区间是否有界？

(1) 定义域；　(2) $(1,2]$；　(3) $(2,3)$.

解　(1) 函数的定义域为 $(1,+\infty)$. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y=\ln(x-1)$ 是增函数，随着 x 无限增大，对应函数值也无限增大，所以无界；

(2) $x\in(1,2]$，x 无限接近 1 时，对应的函数值的绝对值 $|\ln(x-1)|$ 也无限增大，所以无界；

(3) 函数 $y=\ln(x-1)$ 在区间 $(2,3)$ 内是单调增加的，故 $0=\ln 1<\ln(x-1)<\ln 2$，取 $M=\ln 2$，则对一切 $x\in(2,3)$，恒有 $|\ln(x-1)|<\ln 2$，所以函数 $y=\ln(x-1)$ 在区间 $(2,3)$ 内有界.

例 5　设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在数集 A 上均是单调减少的函数，证明：复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在数集 A 上是单调增加的函数.

证　设 $u=\varphi(x)$，$x_1,x_2\in A$，且 $x_1<x_2$. 因为函数 $\varphi(x)$ 在 A 上是单调减少的，故 $u_1=\varphi(x_1)>u_2=\varphi(x_2)$. 而 $f(u)$ 在 A 上是单调减少的，于是有 $f(u_1)<f(u_2)$，所以当 $x_1<x_2$ 时，$f[\varphi(x_1)]<f[\varphi(x_2)]$，因此复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 A 上是单调增加的.

例 6　下列函数是不是周期函数：

(1) $f(x)=|\sin x|+\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$；　　　(2) $f(x)=3\sin(2x+1)+4$.

解　(1) $|\sin x|$ 的周期为 $l_1=\pi$，$\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$ 的周期为 $l_2=2\pi$，l_1,l_2 的最小公倍数为 $l=2\pi$，所以 $f(x)$ 是周期 $l=2\pi$ 的周期函数；

(2) 因为

$$f(x+\pi)=3\sin[2(x+\pi)+1]+4=3\sin(2x+1)+4=f(x),$$

所以 $f(x)=3\sin(2x+1)+4$ 是周期 $l=\pi$ 的周期函数.

一般，若 $f(x)$ 的周期为 l，则 $f(ax+b)(a>0)$ 也是周期函数，且周期为 $T=\dfrac{l}{a}$.

例 7　求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2-1(x\leqslant 0)$；　　　(2) $y=2^{x+1}+3$.

解　(1) 由 $y=x^2-1(x\leqslant 0)$ 解得 $x=-\sqrt{y+1}$，所以反函数为

$$y=-\sqrt{x+1}\ (x\geqslant-1);$$

(2) 由 $y=2^{x+1}+3$ 解得 $x=\log_2(y-3)-1$,所以反函数为

$$y=\log_2(x-3)-1\ (x>3).$$

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x>0,\\ e^x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$,求:(1) $f^{-1}(x)$;(2) $f[g(x)]$.

解 (1) 求分段函数的反函数时,必须分段去求.

当 $x>0$ 时,$y=x^3+1(y>1)$,解得 $x=\sqrt[3]{y-1}\ (y>1)$;

当 $x\leqslant 0$ 时,$y=e^x(0<y\leqslant 1)$,解得 $x=\ln y\ (0<y\leqslant 1)$,所以反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}, & x>1,\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) 求分段函数的复合函数时,同样需要分段去复合. $f[g(x)]$是由

$$f(u)=\begin{cases}u^3+1, & u>0\\ e^u, & u\leqslant 0\end{cases},\text{和 } u=g(x)=\ln x(x>0)$$

复合而成. 当 $u>0$ 时,$f(u)=u^3+1$,而 $u=\ln x(x>1)$,故 $f[g(x)]=\ln^3 x+1(x>1)$;当 $u\leqslant 0$ 时,$f(u)=e^u$,而 $u=\ln x(x\leqslant 1)$,故 $f[g(x)]=e^{\ln x}=x(x\leqslant 1)$,所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}\ln^3 x+1, & x>1,\\ x, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

例 9 设 $f(\sec x)=3\tan^2 x+1$,求:$f\left(\dfrac{1}{x}+x\right)$.

解 先求 $f(x)$. 设 $u=\sec x$,因为 $f(\sec x)=3(\sec^2 x-1)+1=3\sec x^2-2$,故 $f(u)=3u^2-2$,即 $f(x)=3x^2-2$,所以

$$f\left(\frac{1}{x}+x\right)=3\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-2=\frac{1}{x^2}+x^2+4.$$

三、习题选解

习题(一)

习题 1-1

4. 证明不等式：$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

证 $|a-b|=|(a-c)+(c-b)|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

习题 1-2

1. 求下列各函数的定义域，分别用集合域区间记号表示：

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；　　(5) $y=\lg\frac{x}{x-2}+\sqrt{9-x^2}$.

解 (4) x 须满足不等式组

$$\begin{cases}3-x\geqslant0,\\x\neq0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x\leqslant3,\\x\neq0,\end{cases}$$

所以定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$(或写成$\{x|-\infty<x<0$ 或 $0<x\leqslant3\}$).

(5) x 须满足不等式组

$$\begin{cases}\frac{x}{x-2}>0,\\9-x^2\geqslant0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x<0\text{ 或 }x>2,\\-3\leqslant x\leqslant3,\end{cases}$$

所以定义域为$[-3,0)\cup(2,3]$(或写成$\{x|-3\leqslant x<0$ 或 $2<x\leqslant3\}$).

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当}-1\leqslant x\leqslant2\text{ 时},\\\sin x, & \text{当 }2<x\leqslant4\text{ 时},\end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$的定义域，并指出它的分段点；(2) 求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(2),f(\pi)$.

解 (1) 定义域为$[-1,4]$，$x=2$ 是分段点.

(2) 因为 $x=\frac{\pi}{2}\in[-1,2]$，此时 $f(x)=x+1$，故 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$；因为 $x=2\in$

$[-1,2]$，此时 $f(x)=x+1$，故 $f(2)=3$；因为 $x=\pi\in(2,4]$，此时 $f(x)=\sin x$，故 $f(\pi)=\sin\pi=0$.

习题 1-3

1. 下列函数在其定义域内是否有界？为什么？

(3) $y=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sin\dfrac{x}{n}$（$n$ 是正整数）；　　　(4) $y=x\cos x$.

解　(3)因为

$$\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sin\frac{x}{n}\right|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant 1,$$

所以 $y=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sin\dfrac{x}{n}$ 有界；

(4) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，取 $x=2k\pi$（k 是正整数），则

$$y|_{x=2k\pi}=2k\pi\cos 2k\pi=2k\pi,$$

显然，随着 k 的增大，相应的函数值也在增大，故找不到正数 M，使得 $|f(x)|<M$（对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$），所以函数无界.

7. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 上的偶函数，证明：$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数.

解　记 $F(x)=f(x)\pm g(x)$，$\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$. 由于

$$F(-x)=f(-x)\pm g(-x)=f(x)\pm g(x)=F(x),$$

$$\Phi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=\Phi(x),$$

所以 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 都是偶函数.

8. 设

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$$

求 $\varphi(x)$，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是偶函数.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=\varphi(x)$，由于 $f(x)$ 是偶函数，故 $\varphi(x)=f(x)=f(-x)$，

而$-x>0$,于是 $f(-x)=-x-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}-x$,所以 $\varphi(x)=\frac{1}{x}-x$.

习题 1-4

1. 求下列函数的反函数,并指出它们的定义域和值域:

(2) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,故反函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $W=(-\infty,+\infty)$. 由 $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$得

$$x+\sqrt{1+x^2}=10^y,$$

两边同减 x,并两边平方,又得

$$1+x^2=(10^y)^2-2x\cdot 10^y+x^2.$$

化简后,求得

$$x=\frac{1}{2}(10^y-10^{-y}),$$

所以反函数为

$$y=\frac{1}{2}(10^x-10^{-x}).$$

2. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & x>4\end{cases}$的反函数及其定义域.

解 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,$y=x^2$,解得 $x=\sqrt{y}$ $(1\leqslant y\leqslant 16)$;当 $x>4$ 时,$y=2^x$,解得 $x=\log_2 y$ $(y>16)$,所以反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$$

反函数的定义域为 $D=[1,+\infty)$.

5. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,求下列复合函数的定义域:

(2) $f(\cos x)$;　　(3) $f(x^2-1)$.

解 (2) $f(\cos x)$是由 $f(u)$及 $u=\cos x$ 复合而成,而 $f(u)$与 $f(x)$是同一个函数,故 $f(u)$的定义域是$[0,1]$,于是 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$,解得

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm 1,\pm 2\cdots).$$

所以 $f(\cos x)$ 的定义域是 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k=0,\pm1,\cdots)$.

(3) 类似于(2)的解法，得 $0\leqslant x^2-1\leqslant1$，解得

$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant-1 \quad 或 \quad 1\leqslant x\leqslant\sqrt{2},$$

所以，函数 $f(x^2-1)$ 的定义域是 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

6. 设 $f(x)=3x^2+4x$，$\varphi(x)=\lg(1+x)$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$，并求它们的定义域.

解 $f[\varphi(x)]$ 是由 $f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成，而 $f(u)=3u^2+4u$，把 $u=\varphi(x)=\lg(1+x)$ 代入，得

$$f[\varphi(x)]=3\lg^2(1+x)+4\lg(1+x).$$

要使 $f[\varphi(x)]$ 有定义，须满足 $1+x>0$，即 $x>-1$，所以 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$.

类似地，把 $u=f(x)=3x^2+4x$ 代入 $\varphi(u)=\lg(1+u)$，得

$$\varphi[f(x)]=\lg(3x^2+4x+1).$$

x 应满足不等式 $3x^2+4x+1>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>-\frac{1}{3}$. 所以，$\varphi[f(x)]$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

把 $u=\varphi(x)=\lg(1+x)$ 代入 $\varphi(u)=\lg(1+u)$，得

$$\varphi[\varphi(x)]=\lg[1+\lg(1+x)].$$

x 应满足不等式组：$\begin{cases}1+\lg(1+x)>0,\\1+x>0,\end{cases}$ 解得 $x>-\frac{9}{10}$. 所以，$\varphi[\varphi(x)]$ 的定义域是 $\left(-\frac{9}{10},+\infty\right)$.

7. 根据下列所设，求 $f(x)$：

(1) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\sin x\ (x\neq0)$； (2) 设 $f(\sin x)=2\cos2x-1$.

解 (1) 令 $u=\frac{1}{x}$，解得 $x=\frac{1}{u}$，故 $f(u)=\frac{1}{u}(1+u)^2+\sin\frac{1}{u}$. 所以

$$f(x)=\frac{(1+x)^2}{x}+\sin\frac{1}{x}.$$

(2) 因为 $f(\sin x)=2(1-2\sin^2 x)-1=1-4\sin^2 x$，所以设 $u=\sin x$，得 $f(u)=1-4u^2$，即 $f(x)=1-4x^2$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 2, \\ \sqrt{1+x^2}, & 2<x\leqslant 4, \end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求：$f(x+1)$ 及 $f[g(x)]$.

解 当 $0<x+1\leqslant 2$，即 $-1<x\leqslant 1$ 时，$f(x+1)=x+1$；

当 $2<x+1\leqslant 4$，即 $1<x\leqslant 3$ 时，$f(x+1)=\sqrt{1+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x+x^2}$，

所以

$$f(x+1)=\begin{cases} x+1, & -1<x\leqslant 1; \\ \sqrt{2+2x+x^2}, & 1<x\leqslant 3. \end{cases}$$

类似地，当 $0<\ln x\leqslant 2$，即 $1<x\leqslant e^2$ 时，$f[g(x)]=\ln x$；
当 $2<\ln x\leqslant 4$，即 $e^2<x\leqslant e^4$ 时，$f[g(x)]=\sqrt{1+\ln^2 x}$，

所以

$$f[g(x)]=\begin{cases} \ln x, & 1<x\leqslant e^2; \\ \sqrt{1+\ln^2 x}, & e^2<x\leqslant e^4. \end{cases}$$

习题 1-5

2. 求下列各函数的定义域：

(4) $y=\sqrt{1-x^2}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　　(5) $y=\arccos\dfrac{x+3}{4}-\lg(1-2x)$.

解 (4) 解不等式组 $\begin{cases} 1-x^2\geqslant 0, \\ x\neq 0, \end{cases}$ 求得定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(5) 解不等式组 $\begin{cases} -1\leqslant\dfrac{x+3}{4}\leqslant 1, \\ 1-2x>0, \end{cases}$ 求得定义域为 $\left[-7,\dfrac{1}{2}\right)$.

习题 1-6

1. 一个正圆锥体内接于半径为 R 的球(即圆锥的顶点及底面圆周均在球面上)，