中 華 文 庫

初中第一集

代數方程式

張鵬飛編

中 華 書 局 印 行

民國三十七年二月發行
民國三十七年二月初版

中華文庫初中第一集 代數方程式（全一册）

◎ 定價國幣二元一角

（郵運匯費另加）

編者 張鵬飛
發行人 中華書局股份有限公司代表 李虞杰
印刷者 中華書局永寧印刷廠 上海澳門路八九號
發行處 各埠中華書局
（一三六二八）

先說的話

周易的繫辭上傳說：「乾以易知，坤以簡能；易則易知，簡則易從，……易簡而天下之理得矣.」人事紛紜，物情錯綜，千變萬化，繁難沒有止境，但是果能靜觀默察，尋着線索，識得途徑，沒有不是歸於易而簡的. 物理學的定律，化學的週期律，沒有就繁難，有了就簡易；其它[illegible]，也是這樣. 我們學習數學，更要把這易簡二字，念念不忘，才能使數學有進步.

用算術方法解應用問題，幾乎各題各樣，要想一個解法，大抵非常繁難；用代數方程式去解，祇要寫成方程式，都是應用一樣理性去化，簡而且易. 用算術方法說演算理性，往往做篇文章，都想說得清楚，也是非常繁難；用代數方程式去說，一看完全明白，簡而且易. 用算術方法解，演算和說明，大抵要分開，用代數方程式解，演算內卽含說明，不要費兩次事，這不是簡而又簡易而又易嗎！ 有代數，可以化算術的繁難成簡易；有代數方程式，可以有簡易的方法解許多應用問題.

一元一次方程式和二元一次聯立方程式，應用最廣，所以舉例很多，題目也多，說得很詳. 一元二次方程式和二元二次聯立方程式，應用較狹，所以說得稍簡略些. 分式方程式和無理方程式，應用更少，所以說得更加簡略. 其它恆等方程式、不等方程式等，不但應用少，並[illegible]中範圍之內，一概都不說了.

代數方程式目次

代數方程式

第一章　方程式的意義和種類

第一節　代數方程式的意義

一．代數是什麼

算術用數碼表示數目，代數用字母代替數目．已知數目，無論是整數，是分數或小數，是有理數，是無理數，是實數，是虛數，是任何正數或負數，無論是怎樣的大或是怎樣的小，都可拿一個在前的英文字母或希臘字母等去代替它．

希臘字母

字母		讀音	讀音	字母	
A	α	Alpha	Theta	Θ	θ
B	β	Beta	Iota	I	ι
Γ	γ	Gamma	Kappa	K	κ
Δ	δ	Delta	Lambda	V	λ
E	ϵ	Epsilon	mu	M	μ
Z	ζ	Zeta	Nu	N	ν
H	η	Eta	Xi	Ξ	ξ

O	o	Omicron	Upsilon	Υ	υ
Π	π	Pi	Phi	Φ	ϕ
P	ρ	Rho	Chi	X	χ
Σ	σ,ς	Sigma	Psi	Ψ	ψ
T	τ	Tau	Omega	Ω	ω

常用英文字母，希臘字母要用在有特別情形的地方.

未知數目，在算術裏，如一人借錢給人應得本利和的圓數，一船開往某地共計所走路的里數，說起來很累贅，重說一遍，就要重贅一遍，非常麻煩，並不清楚，我們在代數裏，拿一個在後的英文字母或希臘字母等去代替，一切都簡便了.

數學裏有兩種數；一種是不變動，可此而不可彼的，叫**常數**；一種是在一定範圍之內，可任意變動的，叫**變數**. 常數如：

π 代 3.1416……圓周率
ϵ 代 2.718 ……自然對數的底
μ 代 0.4343……常用對數對於自然對數的模
…………絕對常數

a 代 1 石米價的圓數6000
r 代 1 車速率的里數　60
………………普通常數

變數如：

$2n$　代偶數，可表0、2、4等的任一個數
$2n+1$ 代奇數，可表1、3、5等的任一個數
……變數

常數變數在代數裏，都能拿一字母去代；若用英文字母，拿在

前者代常數,在後者代變數,代數能有一切簡便式子,就是從這地方來的.

二. 代數式是什麼

照字面看起來,**代數式**可以有兩個意思,一個是代表一個數目的式子,一個是代數裏一切的式子,但是現在代數書採取的,是第一個意思,我們不要誤認它是第二個意思.

代數式代表一個上面所舉的任何數目,極簡的可以是一個字母,或者是一個表正數的阿拉伯數字,繁的可以包含許多字母、許多阿拉伯數字、許多計算的記號.

$$\left.\begin{array}{l} a \\ 2 \\ -5 \\ a+b \\ (a+b+c)x \\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \end{array}\right\}\text{都是代數式}$$

一個代數式代表一個數目,所以這個代數式,也能拿別的代數式去代它,如:

$$PR^n\text{ 代 }P(1+r)^n\cdots\cdots\text{拿 }R\text{ 代 }1+r,$$

$$\frac{QA+R}{A}\text{代}\frac{B}{A}\quad\cdots\cdots\text{拿 }QA+R\text{ 代 }B.$$

這樣可以便於計算,便於說理,便於記憶,便於運用.代數的效用,深而且廣,就在這個地方.

三．方程是什麼

方程是我國古算學裏一個名詞，眞正知道它的意思的，在現在的初中學生裏，恐怕不多，我來把它詳細說說．

魏朝劉徽註九章算術，在方程二字下說：「程，理程也．羣物總雜，各列有數，總言其實．令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數．程之並列爲行，故謂之方程．」如這書方程章第一題：「今有上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉、中禾三秉、下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉、中禾二秉、下禾三秉，實二十六斗．問上、中、下禾實一秉各幾何．」上、中、下三種禾，各有秉數，有總實數，每種寫成一行，並列就成三行：

上禾一秉	上禾二秉	上禾三秉
中禾二秉	中禾三秉	中禾二秉
下禾三秉	下禾一秉	下禾一秉
實二十六斗	實三十四斗	實三十九斗

一行叫一程，這是三物三程，所以成爲方程．方程是指全部而言，並不是單指一行說的，所以我們把這個方程的全部，都改做代數的式子，全部或可叫做方程，分開大不對了．

四．方程式是什麽

兩個相等的代數式，用等號聯起來，就成一個代數等式：

$$a+b=b+a,$$

$$x+a=b.$$

前者叫**恒**等式，無論 a、b 代什麽數，左右總是相等，假如用加的交換律，可把左式變成右式，也可把右式變成左式；後者叫**條件等式**，就是代數的相等方程式，x 代某定數，左右才能相等，不能用計算的定律，把左式變成右式，或把右式變成左式．

兩個不相等的代數式，用不等號聯接起來，就成一個代數不等式：

$$a^2+b^2>2ab,$$

$$x+a>b.$$

前者在 a、b 不都表零的時候，叫**恒不等式**，或**絕對不等式**，無論 a、b 代什麽實數，總是左大於右；後者叫**條件不等式**，或**不等式**，就是代數的不等方程式，x 代某定數，才能左大於右．

現在拿**方程式**或**方程**指條件等式和條件不等式，或連恆等式和恆不等式都包在內，並稱前者爲方程式和不等方程式，後者爲恆等方程式和恆不等方程式，但是我都不贊成的．

第二節　代數方程式的種類

一　方程式的名稱

依左右式的關係說，是：

代數方程式
- 相等式
  - 恆等式⋯⋯恆等方程式⋯⋯絕對等式
  - 相等方程式⋯⋯方程式
- 不等式
  - 恆不等式⋯⋯恆不等方程式⋯⋯絕對不等式
  - 不等方程式

但是它含表未知數或變數的字母，叫**元**，合左右式共含幾元，分別叫幾元方程式：

$ax=b$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯一元方程式

$ax+by=c$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯二元方程式

$(x+y)^2\equiv x^2+2xy+y^2$ ⋯⋯⋯⋯⋯二元恆等式

$(ax+by)^2\equiv a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ ⋯⋯二元恆等式

左右式都是整式的，叫**整式方程式**；不都是的，叫**分式方程式**．整式方程式裏，看某項含元字若干個，這項就是幾次，合左右式去看，最高次項是幾次，分別叫幾次方程式；分式方程式不說次數．

$ax=b$ ……………………整式方程式

$\dfrac{x}{a}=b$ ……………………整式方程式

$\dfrac{a}{x}+by=c$ ……………分式方程式

$\dfrac{a}{x}=c-\dfrac{b}{y}$……………分式方程式

左右式都是有理式的，叫**有理方程式**；不都是的，叫**無理方程式**．無理方程式，也是不能說次數的．

$ax=b$ ……………………有理方程式

$\sqrt{a}x=b$ ………………有理方程式

$a\sqrt{x}=b$ ………………無理方程式

$a\sqrt{x}=c-b\sqrt{y}$ ………無理方程式

二．方程式的種類

依左右式的關係分類，就是上面的表，但也可依計算分類，如：

代數方程式

有理方程式　　無理方程式

整式方程式　分式方程式　一元、二元、多元方程式

一次方程式　二次方程式　高次方程式

第三節 研究和測驗

一．研究

關於計算定律的式子，都是恆等式，如：

$a+b\equiv b+a$……………………………………加的交換律

$(a+b)+c\equiv a+(b+c)$ ……………………加的結合律

$ab\equiv ba$…………………………………………乘的交換律

$(ab)c\equiv a(bc)$ ………………………………乘的結合律

$a(b+c+d)\equiv ab+ac+ad$ ……………………乘的分配律

$(b+c+d)\div a\equiv b\div a+c\div a+d\div a$………除的分配律

……………………………………………………………

關於乘除的公式，自然仍是恆等式，如：

$$(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2,$$

$$(x+a)(x+b)\equiv x^2+(a+b)x+ab,$$

$$(ax+b)(cx+d)\equiv acx^2+(bc+ad)x+bd,$$

$$(x+y)^2\equiv x^2+2xy+y^2,$$

$$(x+y)^3\equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)\equiv x^3+y^3,$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)\equiv x^3-y^3,$$

$$(x+y+z)^2\equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$

……………………………………………………………

算術裏一切計算公式，在代數裏，就成功一個方程式，如：

單利公式　　　　　　　　方程式

$$\text{利}=\text{本}\times\text{率}\times\text{期}\cdots\cdots\begin{cases} x=prt \\ i=x\times rt \\ i=px\times t \\ i=prx \end{cases}$$

幾何學裏一切求積公式,在代數裏,也成功一個方程式,如:

三角形面積公式　　　　　　　　方程式

$$\text{面積}=\tfrac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}\cdots\cdots\begin{cases} x=\frac{1}{2}bh \\ a=\frac{1}{2}x\times h \\ a=\frac{1}{2}bx \end{cases}$$

又算術裏一切應用問題,自然都可以寫成方程式,因爲這些應用問題,可用算術方法來解,沒有不能用代數方法來解的.

二. 測驗

1. 比例式是恆等式,還是方程式?
2. 正變式是方程式嗎? 是什麼方程式?
3. 反變式是方程式嗎? 是什麼方程式?
4. 合變式是什麼方程式?
5. 試說正反變式和比例式、方程式的關係!
6. 試說合變式和比例式、方程式的關係!
7. 試述減的交換律、加減交換律!
8. 試述除的交換律、乘除交換律!

9. 試述減的結合律、加減結合律!

10. 試述除的結合律、乘除結合律!

11. $(d+e-f)\div a\times b\div c\equiv?$

12. $(x+y+z+w)^2\equiv?$

13. $(x+y)^4\equiv?$　$(x+y)^5\equiv?$

14. $(x-y)^2\equiv?$　$(x-y)^3\equiv?$

15. $(x+a)(x+b)(x+c)\equiv?$

16. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\equiv?$

17. $(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)(c_0x+c_1)\equiv?$

18. $(x+a)^n\equiv?$　$(ax+b)^n\equiv?$　n表正整數

19. $(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\cdots+a^{n-1})\equiv?$ n表奇數

20. $(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots\cdots-a^{n-1})\equiv?$ n表偶數

21. $(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-1})\equiv?$ n表正整數

22. $(a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)\equiv?$

23. 試寫幾個算術裏的計算公式!

24. 試寫幾個幾何學裏的求積公式!

25. 試在算術書裏,找幾個應用問題,寫成代數方程式!

26. 試在代數書裏,找幾個應用問題,寫成代數方程式!

注意　研究和測驗,各人不必一樣,上面祇是一個樣子,可以自己向各方面研究,就各方面測驗.以後各章,都要照這樣看,若是限在所寫的範圍裏,那就不聰明了.

第二章　一次方程式

第一節　一元一次方程式

一．關於一個等式的定理

就一個等式說，有下各定理：

（一）**任取一式，加左右式，或左右式都加這式，仍成等式：**

假設 $a=b$，

那麼 $c+a=c+b$，　$a+c=b+c$.

（二）**任取一式，減左右式，或左右式都減這式，仍成等式：**

假設 $a=b$，

那麼 $c-a=c-b$，　$a-c=b-c$.

（三）**任取一式，乘左右式，或左右式都乘這式，仍成等式：**

假設 $a=b$，

那麼 $ac=bc$，　$ca=cb$.

（四）**任取一式，除左右式，或左右式都除這式，仍成等式：**

假設 $a=b$，

那麼 $a\div c=b\div c$，　$c\div a=c\div b$.

但除數不能爲零.

（五）**左右式各開同次方，仍成等式：**

假設 $a=b$，

那麼 $\sqrt{a}=\pm\sqrt{b}$，$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$，…………………

應用這些定理，可以隨意變化一個等式，使它合用，變化一個方程式，得到要求的未知數，就是求方程式的根．但這裏定理(五)，是求一次方程式根用不着的．

二．關於一個等式的變化

一個等式的變化，可以分做五種：

(一)整理左式或右式，或左右式各自整理：

假設 $ax+bx-c=d$，

那麼 $(a+b)x-c=d$．

假設 $ax+bx-c=dx+e-fx$，

那麼 $(a+b)x-c=(d-f)x+e$．

(二)在左式取一項，變號移到右式，或在右式取一項，變號移到左式：

假設 $(a+b)x-c=d$，

那麼 $(a+b)x=d+c$．

假設 $(a+b)x-c=(d-f)x+e$，

那麼 $(a+b)x-(d-f)x=e+c$．

(三)在左式取一因式除右式，或從右式取一因式除左式：

假設 $(a+b)x=c+d$，

那麼 $x=\dfrac{c+d}{a+b}$．

但 $a+b\neq 0$．

(四)取左式的分母乘右式，或取右式的分母乘左式：

假設 $\dfrac{x}{a+b}=c+d$,

那麼 $x=(c+d)(a+b)$.

(五)**左式或右式爲0,可取右式或左式的因式,使它等於0:**

假設 $(x+a)(x+b)=0$,

那麼 $x+a=0$ 或 $x+b=0$.

假設 $2(x+a)=0$,

那麼 $x+a=0$,但 $2\neq 0$.

從(二)到(五),是根據前面(一)到(四)的定理來的,並且前面的定理(五),可以包含在上面的第五變化之內.這裏的第五變化,也是求一次方程式根用不着的.

三. 解一元一次方程式

解一元一次方程式,就是求它的根,普通要分四個步驟:

(一)**整理左右式.**

(二)**移含元字項到一邊,並移不含元字項到另一邊.**

(三)**再整理左右式.**

(四)**拿含元字項裏元字的係數除它一邊.**

例一 解方程式 $8x+7=4x+27$!

解 $8x+7=4x+27$.

移項, $8x-4x=27-7$.

整理, $4x=20$.

4 除, $x=5$.