1978—1981

全国高考试题解答

郑文　纪杰　编

内蒙古人民出版社

1978—1981
全国高考试题解答

郑文　　纪杰　编

内蒙古人民出版社

一九八一·呼和浩特

1978—1981
全国高考试题解答
郑文　纪杰编
内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　内蒙古新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：11.75 字数：251千
1981年12月第一版　1982年4月第1次印刷
印数：1—26,400册
统一书号：7089·211　　每册：1.20元

目　　录

1978年

1979年

1980年

1981年

一九七八年
数学试题解答

（本试卷中五、六题可选做一个，文科考生不作七题）

一、

1．分解因式：$x^2-4xy+4y^2-4z^2$

解：原式$=(x^2-4xy+4y^2)-4z^2$

$$=(x-2y)^2-(2z)^2$$

$$=(x-2y+2z)(x-2y-2z)$$

2．已知正方形的边长为 a，求侧面积等于这个正方形的面积、高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积。

解：设直圆柱体的底面半径为 r，则底圆周长 $2\pi r=a$

$(\because S_{侧}=2\pi r\cdot a=a^2)$

$$\therefore\quad r=\frac{a}{2\pi}$$

$$\therefore\quad 体积=\pi r^2\cdot a=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\cdot a=\frac{a^3}{4\pi}$$

3．求函数 $y=\sqrt{\lg(2+x)}$ 的定义域。

解：$\because\quad \lg(2+x)\geqslant 0$

$\therefore\quad 2+x\geqslant 1$

$\therefore\quad x\geqslant -1$ 即为所求的定义域。

4．不查表求 $\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\cos 55^\circ$ 的值。

解法（1）：

$$\text{原式}=\sin 10^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\sin 35^\circ$$
$$=\sin(10^\circ+35^\circ)$$
$$=\sin 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解法（2）：

$$\text{原式}=\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\sin 80^\circ\sin 35^\circ$$
$$=\cos(80^\circ-35^\circ)$$
$$=\cos 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5．化简：$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^{3}}{(0.1)^{-2}(a^{3}b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

解： $\text{原式}=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}\frac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}(a^{3}b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2\cdot 2^{3}}{10^{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$$

$$=\frac{4}{25}\cdot a^{0}\cdot b^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{25}b^{\frac{1}{2}}$$

二、已知方程 $Kx^2+y^2=4$，其中 K 为实数，对于不同范围的 K 值，分别指出方程所代表图形的类型，并画出显示其数量特征的草图。

解：（本题只要求考生作出全面、正确的分析）

1．当 $K>0$ 时，方程的图形是椭圆，中心在坐标原点，又分作几种情况：

（1） 当$K>1$时，长轴在 y 轴上，例$K=2$，长半轴$=2$，短半轴$=\frac{2}{\sqrt{K}}$.

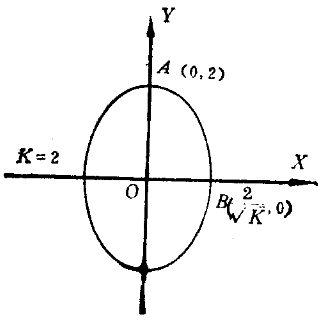
（2） 当$K=1$时，椭圆的特殊情况是一个圆，半径 $r=2$.

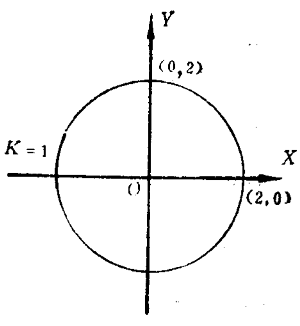
（3） 当 $K<1$ 时，长轴在 x 轴上，例 $K=\frac{1}{4}$，半长轴 $=\frac{2}{\sqrt{K}}$，半短轴$=2$.

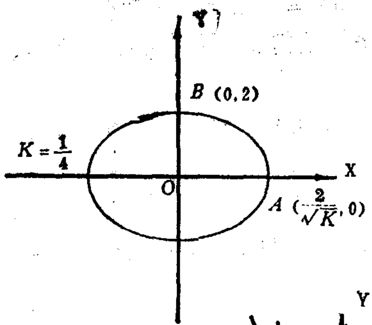
2．当 $K=0$ 时，方程为 $y^2=4$，图形是两条平行于 x 轴的直线，$y=\pm 2$.

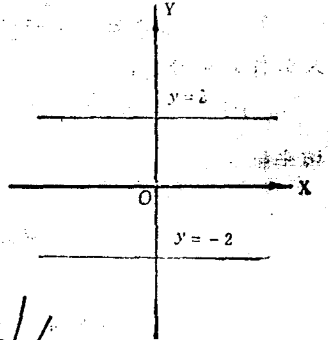
3．当 $K<0$ 时，方程为$-\frac{x^2}{\frac{4}{|K|}}+\frac{y^2}{4}=1$，图形是双曲线，中心在坐标原点上，实轴在 y 轴上。

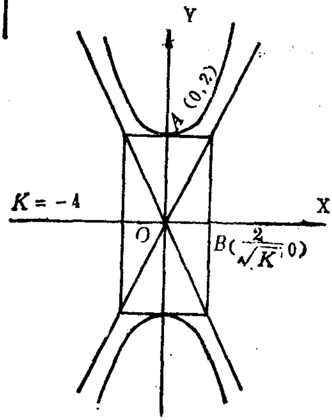
其特征草图各为



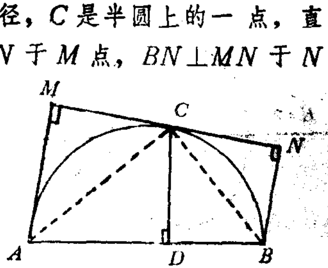








三、（如图）AB 是半圆的直径，C 是半圆上的一点，直线 MN 切半圆于 C 点，$AM\perp MN$ 于 M 点，$BN\perp MN$ 于 N 点，$CD\perp AB$ 于 D 点。



求证： 1. $CD=CM=CN$；

2. $CD^2=AM\cdot BN$.

证明： 1. 连接 AC、CB，

则 $\angle ACB=90°$

$\angle ACM=\angle ABC$ （弦切角等于同弧上的圆周角）

$\angle ACD=\angle ABC$ （同角的余角相等）

$\therefore\quad \angle ACM=\angle ACD$

$\therefore\quad \triangle AMC\cong\triangle ADC$

$\therefore\quad CM=CD$

同理 $CN=CD$

$\therefore\quad CD=CM=CN$.

2、$\because\quad CD\perp AB\qquad \angle ACB=90^\circ$

$\therefore\quad CD^2=AD\cdot DB$（比例中项定理）

由上面可知 $AM=AD$，$BN=BD$（全等三角形对应边相等）

$\therefore\quad CD^2=AM\cdot BN$.

四、已知 $\log_{18}9=a\ (a\neq 2)\qquad 18^b=5$.

求 $\log_{36}45$.

解法1：

$\because\quad \log_{18}9=a\qquad \therefore 18^a=9$

又$\because\quad 18^b=5$

$\therefore\quad 45=5\times 9=18^b\cdot 18^a=18^{a+b}$

设 $\log_{36}45=x$ 则 $36^x=45=18^{a+b}$

$\therefore\quad \log_{18}36^x=\log_{18}18^{a+b}$

$$x=\frac{a+b}{\log_{18}36}=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}$$

但 $36=2\times 18=4\times 9$

$\therefore\quad \log_{18}(2\times 18)=\log_{18}(2^2\times 9)$

即 $1+\log_{18}2=\log_{18}36=\log_{18}(2^2\times 9)$

$$=2\log_{18}2+\log_{18}9=2\log_{18}3+a$$

∴ $\log_{18}2=1-a$

∴ $x=\dfrac{a+b}{1+(1-a)}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

解法2：

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}36}{\log_{18}45}$$

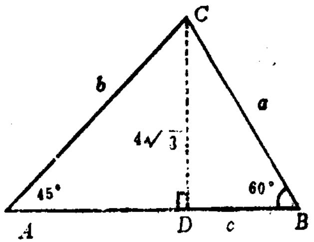
$$=\frac{\log_{18}18+\log_{18}2}{\log_{18}9+\log_{18}5}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}$$

以下解法同"解法1"。

五、已知$\triangle ABC$的三内角的大小成等差数列，$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$，求角$A$、$B$、$C$的大小；又知顶点$C$的对边$c$上的高等于$4\sqrt{3}$，求三角形各边$a$、$b$、$c$的长（提示：必要时可验证$(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$）。

解：根据题意作图$\triangle ABC$



∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

又 $2\angle B=\angle A+\angle C$

∴ $3\angle B=180°$ $\angle B=60°$

$\angle A+\angle C=120°$

∵ $\mathrm{tg}\angle A\cdot\mathrm{tg}\angle C=2+\sqrt{3}$ ①

而　$\operatorname{tg}(\angle A+\angle C)=\dfrac{\operatorname{tg}\angle A+\operatorname{tg}\angle C}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}C}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \operatorname{tg}\angle A+\operatorname{tg}\angle C&=(1-\operatorname{tg}\angle A\cdot\operatorname{tg}\angle C)\cdot\operatorname{tg}(\angle A+\angle C)\\&=[1-(2+\sqrt{3})]\cdot\operatorname{tg}120^\circ\\&=(-1+\sqrt{3})(-\sqrt{3})\\&=3+\sqrt{3}\qquad ②\end{aligned}$$

由①、②可知 $\operatorname{tg}\angle A$，$\operatorname{tg}\angle C$ 是 $x^2-(3+\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})=0$的二个根.

解这个方程得

$$(x-1)[x-(2+\sqrt{3})]=0$$

$\therefore$　$x_1=1$　　$x_2=2+\sqrt{3}$

设　$\angle A<\angle C$　则得 $\operatorname{tg}\angle A=1$，$\operatorname{tg}\angle C=2+\sqrt{3}$

$\therefore$　$\angle A=45^\circ$．$\angle C=120^\circ-45^\circ=75^\circ$

又知 C 边上的高等于 $4\sqrt{3}$，

$$\therefore\quad a=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$$

$$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned}C&=AD+DB\\&=b\cos 45^\circ+a\cos 60^\circ\\&=4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+8\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}+4\end{aligned}$$

所以 $\varDelta ABC$ 中角 A、B、C 分别为 45°，60°，75°；a、b、c边分别为 8，$4\sqrt{6}$，$4\sqrt{3}+4$.

六、已知α、β为锐角，且

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$$
$$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$$

求证：$\alpha+3\beta=\dfrac{\pi}{2}$

证法1： 由$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$ 得 $3\sin^2\alpha=\cos2\beta$

由 $3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$ 得 $\sin2\beta=\dfrac{3}{2}\sin2\alpha=3\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\therefore$ $\sin^22\beta+\cos^22\beta=9\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+9\sin^4\alpha$

$$1=9\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$
$$1=9\sin^2\alpha$$

$\therefore$ $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{9}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ （α为锐角）

$\therefore$ $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cdot\cos2\beta+\cos\alpha\cdot\sin2\beta$

$$=\sin\alpha(3\sin^2\alpha)+\cos\alpha(3\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$$
$$=3\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=3\sin\alpha$$
$$=1$$

$\therefore$ $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

证法2： 由 $3\sin2\alpha=2\sin2\beta$ 得

$3\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin\beta\cdot\cos\beta$

$\therefore$ $9\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=4\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta$

$9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)$

$\because$ $\sin^2\beta=\dfrac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)$ （根据已知）

$\therefore\quad 9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\cdot\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)[1-\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)]$

$=2\cdot(1-3\sin^2\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+3\sin^2\alpha)$

$=1-9\sin^4\alpha$

$\therefore\quad 9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$

以下证法同证法1。

七、（文科考生不要求作此题）

已知函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$　（m为实数）

1　m是什么数值时，y的极值是0？

2　求证：不论m是什么数值，函数图象（即抛物线）的顶点都在同一条直线l_1上。画出$m=-1$，0，1时的抛物线的草图，来检验这个结论。

3　平行于l_1的直线中，哪些与抛物线相交，哪些不相交？求证：任一条平行于l_1而与抛物线相交的直线，被各抛物线截出的线段都相等。

解： 1．用配方方法得

$$y=\left(x+\frac{2m+1}{2}\right)^2-\frac{4m+5}{4}$$

$\therefore$　y的极小值为$-\frac{4m+5}{4}$

$\therefore$　当极值为0时，$4m+5=0$　　$m=-\frac{5}{4}$．

2．函数图象抛物线的顶点坐标为

$$\left(-\frac{2m+1}{2},\ -\frac{4m+5}{4}\right)$$

即 $x=-\dfrac{2m+1}{2}=-m-\dfrac{1}{2}$

$$y=-\frac{4m+5}{4}=-m-\frac{5}{4}$$

二式相减得

$$x-y=\frac{3}{4}$$

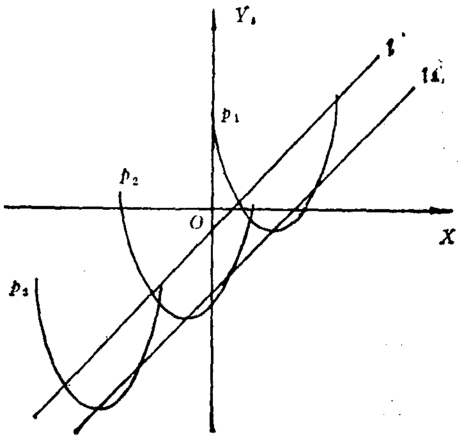
这就是各抛物线顶点坐标所满足的方程，它的图形是一条直线，方程中不含m。因此，不论m是什么数值，抛物线的顶点都在这条直线l_1上，即在$x-y=\dfrac{3}{4}$上。

当$m=-1$，0，1时，x、y之间的函数关系为

$$y+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$



分别作出它们的图象P_1、P_2、P_3；可见它们的顶点都在直线l_1上。

3. 设l为任一条平行于l_1的直线，其方程为

$$x-y=a$$

与抛物线 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ 方程联立求解，消去y，得

$$x^2+2mx+m^2-1+a=0$$

$\therefore\quad (x+m)^2=1-a$

因而 $1-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$ 时，直线 l 与抛物线相交，而 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，直线 l 与抛物线不相交。

当 $a\leqslant 1$ 时，$x=-m\pm\sqrt{1-a}$

即直线 l 与抛物线两交点横坐标为

$$-m-\sqrt{1-a},\quad -m+\sqrt{1-a}$$

因直线 l 的斜率为 1，它的倾斜角为 45°，所以直线 l 被抛物线截出的线段等于

$$[(-m+\sqrt{1-a})-(-m-\sqrt{1-a})]\sqrt{2}=2\sqrt{2(1-a)}$$

而这线段长度与 m 无关。

$\therefore$ 直线 l 被各抛物线截出的线段都相等。

一九七八年
物理试题解答

一、填空白

1. 当穿过一个线圈的（　　　　）发生变化时，线圈中产生感应电动势；感应电动势的大小，除与线圈的匝数成正比外，还与（　　　　）成正比。

〔磁通量；磁通量的变化率〕

2. 单摆在摆动过程中，其速度和加速度都是随时间变化的。从最大位移处向平衡位置运动过程中，速度越来越（　　　　），加速度越来越（　　　　）。

〔大；小〕

3. 在天然放射性元素的放射线中，已经查明，α射线是（　　　　　）；γ射线是（　　　　　）。

〔氦核流（或者${}_2^4He$流）；高频率电磁波（或者光子流）〕

4 在20℃的空气中，声音的传播速度是340米/秒。如果它的频率是100赫兹，那么它的波长是（　　　　　）。

〔3.4米（$\because \lambda=\frac{V}{f}=\frac{340}{100}=3.4m$）〕

5. 两个点电荷之间的距离为a，相互作用力为f；如果距离变为$2a$，则相互作用力变为（　　　　　）。