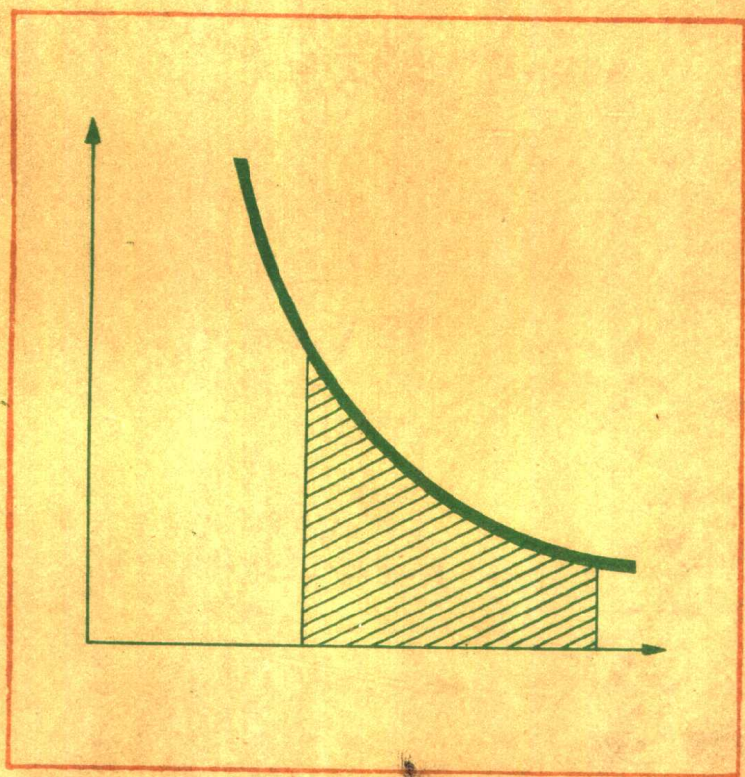


中央广播电视大学学习辅导用书

数 学

中央广播电视大学杂志编辑部 编



吉林人民出版社

中央广播电视大学学习辅导用书

SHU

数

XUE

学

中央电大杂志编辑部 编

微 积 分

线性代数

概 率

复变函数

富氏级数

场 论

逻辑代数

吉 林 人 民 出 版 社

中央广播电视大学学习辅导用书

数 学

中央广播电视大学杂志编辑部

※

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

通化市印刷厂印刷

※

787×1092毫米32开本 10印张 219,000字

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数：1—184,720册

统一书号：13091·181 定价：1.35元

前 言

为适应广播电视大学84级理工科教学的需要,我们将《电视大学》杂志历年来所刊载的各学科辅导教学的优秀文章分别汇编成六册,即:数学(包括微积分、线性代数、概率、复变函数、富氏级数、场论、逻辑代数),物理(包括普通物理、近代物理概论、理论力学、算法语言),化学(包括无机化学、有机化学),电学(包括电路分析基础、模拟电子技术基础、数字电子技术基础、电机与拖动),机械(包括画法几何、材料力学、机械原理、机械零件)及英语。

这套书的内容有各门课程介绍;学习方法;重点、难点、疑点的辅导;基本概念的阐述;错例分析和实际应用等等。这些文章的作者是:中央电大各学科的主讲教师和各教研组的老师、各地电大的辅导教师以及各高等院校的教师。这些文章曾对79级、80级、82级电大理工科学员的学习和复习起了很大的指导帮助作用;对84级理工科学员(包括自学收看者)也将是良师益友;对其它成人业余大学,如夜大、函大、职大的学员也是很有益的参考资料。

在编写过程中,除对原文逐一进行审订外,有的文章还请原作者进行修改、补充,有的文章由于过去杂志篇幅所限未能发表,这次也收集在汇编之中了。在此对入选文章的作者谨表谢意。

限于我们的编辑力量和水平，加上编辑时间较短，在书中可能有错误之处，望广大读者给予批评指正。

中央电大杂志编辑部

1984. 6

目 录

师生对话解疑难	(1)
分部积分法浅谈	(9)
多元函数求导和重积分计算的常见错误	(19)
怎样计算二重积分	(29)
关于三重积分的计算	(38)
曲线积分的计算	(46)
关于无穷积分收敛的必要条件	(54)
一元微积分与数项级数复习要点	(62)
高等数学(一)第二学期期末复习要点	(72)
怎样学习线性代数	(91)
关于行列式的计算方法	(105)
线性方程组的理论	(116)
线性方程组理论的应用举例	(126)
线性代数的复习要点	(134)
线性代数的复习方法	(147)
随机事件与概率中的几个概念	(154)
随机变量的分布函数与函数的分布	(162)
概率统计的复习辅导	(171)
高等数学(三)课程简介	(183)
复变函数入门	(189)
关于复变函数及解析函数	(197)

复变函数 $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ 的奇点的讨论.....	(207)
分式线性映射性质的应用.....	(210)
复变函数的复习要点.....	(220)
谈谈富氏级数.....	(232)
场论中三个重要概念.....	(242)
高斯公式的应用.....	(248)
富氏级数、场论、数理方程部分复习提纲.....	(256)
高等数学(三)复习要点.....	(261)
无限小及其意义.....	(275)
超实数系.....	(281)
超实数与连续函数.....	(291)
无限小微积分理论.....	(301)

师生对话解疑难

北京广播电视大学 翟连林

学生：老师，我利用开学前的一段时间，预习了高等数学（一）的前三章内容，有几个问题不清楚，向您请教。

老师：学习高等数学听讲前的预习是很重要的。通过预习才能使听课有针对性，对自己不明白的地方要特别注意老师的讲解，这样学习才有主动性。你这种做法很好，要坚持下去。

学生：在第一章函数及其图形中，我感到“反函数概念”不好理解。比如，反函数的对应法则“ φ ”与直接函数的对应法则“ f ”，它们的相互关系是什么？您能给我说一说吗？

老师：好！我们先从反函数的定义说起。反函数定义是从大量的物理学规律中抽象出来的。它的定义可以这样来叙述：给定函数 $y = f(x)$ ，它的值域为 Y 。如果对于 Y 中的每一个 y 的值，都可以从方程 $y = f(x)$ （ y 是已知数，故可将 $y = f(x)$ 看成含未知量 x 的方程）确定唯一的一个 x 值，则得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量， x 为因变量的新函数 $x = \varphi(y)$ 。我们称 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数，这时 $y = f(x)$ 叫做直接函数。当然，我们也可以把 $y = f(x)$ 叫做 $x = \varphi(y)$ 的反函数。它们互为反函数。

例如，已知函数 $y = 2x + 3$ ，它的值域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

对于 $(-\infty, +\infty)$ 中的每一个 y 的值, 从方程 $y = 2x + 3$ 中解得 $x = \frac{y-3}{2}$. 我们称 $x = \frac{y-3}{2}$ 为函数 $y = 2x + 3$ 的反函数.

从上述例子我们看到, 直接函数 $y = 2x + 3$ 的对应法则“ f ”是: 自变量先乘以 2, 再加上 3, 即先做二级运算“ $\times$ ”, 再作一级运算“ $+$ ”; 而反函数 $x = \frac{y-3}{2}$ 的对应法则“ φ ”是: 自变量先减去 3, 再除以 2, 即先作一级运算“ $-$ ”, 再作二级运算“ $\div$ ”. 它们的运算顺序恰好相反. 因此, 把正运算改成逆运算就是反函数的运算顺序. 可见, 由直接函数求其反函数的步骤, 通常也就是由方程 $y = f(x)$ 解出 x 的步骤.

学生: 在求函数 $y = f(x)$ 的反函数时, 对给定的 y 解出多个 x 怎么办?

老师: 由于使用反函数时必须是单值函数, 因此, 当由 $y = f(x)$ 求得的 x 是多值时, 可用取单值分支的方法来确定反函数. 比如, 求函数 $y = x^2 + x + 1$ 的反函数. 由 $y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 可知, 这个函数的值域是 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

对于 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 中的每一个 y , 从方程 $y = x^2 + x + 1$ 解得 $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{y - \frac{3}{4}}$. 这就是说, 对于每一个 y 的值, 有两个确定的 x 值与之对应. 在这种情况下, 我们不能说反函数不存在, 而是应认为反函数是一个双值函数(多值函数), 只要写成 $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$ 和 $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{y - \frac{3}{4}}$ 就可知道有

两个反函数存在。从这个例子我们看到，给定一个函数，往往有几个甚至无限多个反函数。我们熟悉的正弦函数 $y = \sin x$ ，由于单调区间有无限多个，因而反正弦函数也有无限多个。

学生： $y = f(x)$ 的反函数本应该写成 $x = \varphi(y)$ ，但又要求写成 $y = \varphi(x)$ 呢？

老师：这是习惯。因为我们在研究函数时，都是用字母 x 表示自变量，字母 y 表示因变量。因此我们往往把反函数 $x = \varphi(y)$ 里的 x 与 y 对调过来，写作 $y = \varphi(x)$ 。这时我们仍称它是 $y = f(x)$ 的反函数。为了区别，有的书上称 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的本义反函数， $y = \varphi(x)$ 是 $y = f(x)$ 的矫形反函数，当然一个单调函数的反函数只有一个，所谓本义反函数与矫形反函数仅仅是一个反函数的两种表示方法。

我们熟悉的反三角函数、对数函数等就是用矫形反函数表示的。但有时也要用到本义反函数，比如你们学到后面 § 46 反函数的导数时就需要用到本义反函数的表示方法。

学生：您这么一讲，使我对反函数的概念清楚多了。在第二章数列的极限及函数的极限中，我最感到困难的是极限的概念，看了几遍教材都似懂非懂、模模糊糊的。特别是所谓“ $\varepsilon - N$ ”、“ $\varepsilon - \delta$ ”定义，更感到抽象、难懂。您能给我讲一讲吗？

老师：可以。首先说明：你的感觉是正常的，初学者几乎都有一个似懂非懂、若明若暗的过程。

要掌握极限的概念需要有一个从直观的理解到精确的描述的过程。

关于数列的极限，我们可以直观地从求圆的周长谈起。

怎样求圆的周长呢？你还记得吗？

学生：记得。做圆的内接正多边形，当边数越来越增加时，正多边形的周长 a_n 就越来越接近圆的周长 a 。

老师：对！这是我们过去在中学对于求圆周长的粗浅认识。“接近”、“越来越接近”这是含糊的说法，怎样用数学语言来描述呢？

学生：“接近”是否可以用 $|a_n - a|$ 越来越小来刻画？

老师：是的。换句话说，就是用 $|a_n - a|$ 的大小来表达 a_n 和 a 的靠近程度。“越来越接近”怎样来刻画呢？

学生：……那就是 n 越来越大， $|a_n - a|$ 越来越小。

老师：对。上面这段话在数学上常用“当 n 充分大的时候， $|a_n - a|$ 充分小”来表达。那么“ n 充分大”和“ $|a_n - a|$ 充分小”怎样用数学语言来表达？你弄清楚了吗？

学生：我不清楚。

老师：“ n 充分大”这句话就是说，只要 N 很大，则 $n > N$ 以后，就表明变量 n 充分大了。“ $|a_n - a|$ 充分小”就是 $|a_n - a| < \varepsilon$ ，只要 ε 任意小， $|a_n - a|$ 就充分小。

通过上面的分析，再来看教材中关于数列极限的定义（ $\varepsilon - N$ 定义）是否就清楚一些了？

学生：是的。

老师：对“ $\varepsilon - N$ ”定义理解清楚了，再理解“ $\varepsilon - \delta$ ”定义困难就不大了。你再考虑一下：在“ $\varepsilon - N$ ”定义中， N 与 ε 有什么关系？

学生： ε 越小， a_n 与 a 越接近，对应的项数 N 也就越大。因此， N 是可以由 ε 确定的。这样可以把 N 看成是 ε 的一个函数，即 $N(\varepsilon)$ 。

老师：你回答得很好。下面请你看这样一个题目：

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

证 方法一:

$$|a_n - a| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2(2n-1)}$$

为了使 $|a_n - a|$ 小于所任给的正数 ε , 只要 $\frac{5}{2(2n-1)} <$

ε 能成立, 由此解出 $n > \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2\varepsilon} + 1 \right)$. 取 $N \geq \left[\frac{1}{2} \left(\frac{5}{2\varepsilon} + 1 \right) \right]^*$,

则当 $n > N$ 时就有

$$\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

方法二: 放大法.

$$|a_n - a| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2(2n-1)}$$

为了使 $|a_n - a|$ 小于所给的正数 ε , 只要 $\frac{5}{2(2n-1)} \leq$

$\frac{5}{2(2n-n)} = \frac{5}{2n} < \frac{3}{n} < \varepsilon$ 能成立, 由此解出 $n > \frac{3}{\varepsilon}$. 取 $N \geq$

$\left[\frac{3}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时就有

$$\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

* “[] ” 表示取某数的整数部分.

在这两种方法中，对同一个 ε ，用方法二的 N 要比用方法一的 N 大。比如， $\varepsilon = 0.1$ ，方法一中的 $N \geq 13$ ，而方法二中的 $N \geq 30$ 。这两种方法哪个好？

学生：我认为方法一好。取 N 不大也不小。方法二取 N 太大，不精确。

老师：就证明不等式成立而言，方法一和方法二无优劣之分。两种方法是一样的。方法一是从第14项起不等式成立，当然，方法二是从第31项起不等式就成立了。

对于直接解不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 有困难或不能直接解的时候，常常采用“放大法”（如方法二）。我们要掌握这个方法，在以后的学习中是很有用处的。

学生：老师，您能再把第三章函数的连续性中关于间断点的分类给我讲一讲吗？

老师：可以。为了清楚起见，我们把间断点 x_0 的几种常见类型列表如下：

第一类间断点	可去间断点	$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ ，但 $f(x_0)$ 不确定 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$
	不可去间断点	$f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 都存在，但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$
第二类间断点	无穷间断点	$f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 至少有一个趋向 ∞
	振荡间断点	在 $x = x_0$ 处函数极限不存在，永远振荡

下面我们举个例子，请你试找出函数。

“ () ”

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leq -1 \\ \frac{1}{x}, & |x| < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 < x \end{cases}$$

的间断点，并判断属于何种类型？如果是可去间断点，将其补成连续函数。

$$\text{学生：} f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-x-1) = 0,$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x} = -1.$$

$\therefore f(x)$ 在点 $x = -1$ 处左、右极限存在，但不相等，

$\therefore x = -1$ 是第一类不可去间断点。

老师：对。这是在点 $x = -1$ 处。那么，在点 $x = 0$ 处呢？

$$\text{学生：} \because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \therefore x = 0 \text{ 是第二类无穷}$$

型间断点。

老师：对。还有在点 $x = 1$ 处呢？

$$\text{学生：} \because f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x} = 1, f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{x} = 1,$$

则 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处左、右极限存在且相等，

$\therefore x = 1$ 是第一类可去间断点。

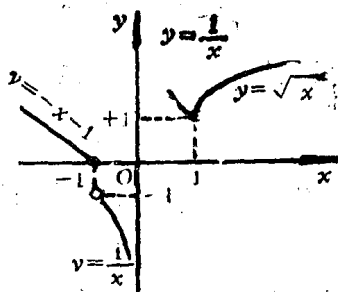
老师：怎样把它变成在该点的连续函数？

学生：补充定义。当 $x = 1$ 时， $f(x) = 1$ ，这时函数在点 $x = 1$ 处就是连续的了。

老师：这个题目我们可画如图。

学生：老师，把第一类可去间断点变为连续的点有几种方法？

老师：有两种方法。



(1) 补充函数在间断点 $x = x_0$ 处的定义, 使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 上面的例子我们已经见到了.

(2) 改变函数在间断点处的定义, 使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

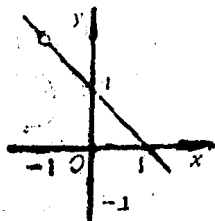
例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

在点 $x = -1$ 处间断如图, 且为第一类可去间断点.

$\because \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2, \therefore$ 改变函数 $f(x)$ 的定义, 使 $f(-1) = 2$. 即

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x}, & x \neq -1 \\ 2, & x = -1 \end{cases}$$



这样, 在点 $x = -1$ 处就连续了;

学生: 老师, 我预习前三章的疑难问题就这几个. 通过您的讲解清楚多了.

老师: 希望今后坚持预习, 不懂的地方多思、善问, 注意电视课上老师的讲解.

分部积分法浅谈

北京钢铁学院数学教研室 李宗元

分部积分法是一种重要的积分方法。首先，它与换元积分法相比，虽然所受的限制较多，应用范围也窄，但是，它能解决换元积分法难于解决的某些类型的积分问题（如 $\int e^x \cos x dx$, $\int x^2 \sin x dx$ 等）。其次，在许多情形下，如能灵活运用分部积分法，往往比换元积分法要简便。最后，一些递推关系的建立，也离不开这种积分方法。因此，使学员掌握好这种重要的积分方法是很必要的。

现将分部积分法的一般原则、若干标准类型、需灵活运用的类型以及有关的经验与技巧作一个简要的介绍。

一、分部积分法的一般原则

分部积分法是指：

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{不定积分}),$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (\text{定积分}).$$

现在我们以不定积分的分部积分法为主进行讨论。

一般说来，在积分 $\int f(x) dx$ 中，当被积函数 $f(x)$ 中包含

某些超越函数，并造成直接积分或变量代换均有困难时，往往采用分部积分法。

进行分部积分时，重要的是把被积表达式 $f(x)dx$ 改组成为 udv 的形式，于是

$$\int f(x)dx = \int u dv = uv - \int v du$$

这样， $\int f(x)dx$ 能否解决的关键就在于 $\int v du$ 是否较易于积分了。由此可见，分部积分法实际上是将原积分 $\int f(x)dx$ 分解成为两个积分，即：(1) 由 dv 积分得出 v ；(2) 计算 $\int v du$ 。

如果这两个积分都能够解决，较复杂的原积分 $\int f(x)dx$ 就解决了。这种化一个较难积分为两个较易积分的办法，就是分部积分法“分部”的含意。一般情况下，由 dv 得到 v 是一个简单积分（经常是凑微分），故关键在于计算 $\int v du$ 。

由前所述，我们可以得出分部积分法的一般原则，即将 $f(x)dx$ 改组为 udv 的原则。

(1) v 易于积出；

(2) $\int v du$ 与 $\int f(x)dx$ （ $\int u dv$ ）相比，或较为简单，或二者相当

〔以期建立包含原积分 $\int f(x)dx$ 的方程，从而解出 $\int u dv$ ，即解出原积分 $\int f(x)dx$ 〕。

二、分部积分法的标准类型

分部积分法的标准类型主要是指：