



# 初等微分積分學

楊德隅編

(修訂本)

商務印書館



# 初等微分積分學

楊德隅編

---

★版權所有★

商務印書館出版

上海河南中路二一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館北京廠印刷

(53827)

---

1934年2月初版 1953年12月19版(修訂本)

印數 30,501—34,500 定價 ¥ 8.400

# 目 次

|            |       |
|------------|-------|
| 第一章 變數及函數  | 1—3   |
| 1. 變數及常數   | 1     |
| 2. 函數      | 1     |
| 3. 增函數及減函數 | 2     |
| 4. 函數之分類   | 2     |
| 5. 函數之記法   | 2     |
| 第二章 極限     | 4—10  |
| 6. 極限      | 4     |
| 7. 無窮大     | 5     |
| 8. 無窮小     | 5     |
| 9. 極限之定理   | 6     |
| 10. 函數之極限  | 8     |
| 11. 函數之連續性 | 8     |
| 第三章 增量及微係數 | 11—15 |
| 12. 增量     | 11    |
| 13. 增量之比   | 11    |
| 14. 微係數    | 12    |
| 15. 微係數之記法 | 12    |

---

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| 16. 微分法 .....           | 12    |
| 第四章 微分法之範式 .....        | 16—46 |
| 17. 微分法之範式 .....        | 16    |
| 18. 常數之微分法 .....        | 19    |
| 19. 函數等於其自變數時之微係數 ..... | 19    |
| 20. 函數和之微分法 .....       | 19    |
| 21. 常數與函數積之微分法 .....    | 20    |
| 22. 函數積之微分法 .....       | 20    |
| 23. 函數含有常數指數之微分法 .....  | 21    |
| 24. 函數商之微分法 .....       | 21    |
| 25. 複函數之微分法 .....       | 22    |
| 26. 反函數之微分法 .....       | 23    |
| 27. 對數函數之微分法 .....      | 26    |
| 28. 簡單指數函數之微分法 .....    | 27    |
| 29. 普通指數函數之微分法 .....    | 27    |
| 30. 正弦之微分法 .....        | 31    |
| 31. 餘弦之微分法 .....        | 31    |
| 32. 正切之微分法 .....        | 32    |
| 33. 餘切之微分法 .....        | 32    |
| 34. 正割之微分法 .....        | 33    |
| 35. 餘割之微分法 .....        | 33    |

---

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 36. 反正弦之微分法.....   | 35    |
| 37. 反餘弦之微分法.....   | 36    |
| 38. 反正切之微分法.....   | 37    |
| 39. 反餘切之微分法.....   | 38    |
| 40. 反正割之微分法.....   | 38    |
| 41. 反餘割之微分法.....   | 39    |
| 42. 反正矢之微分法.....   | 40    |
| 43. 高次微係數 .....    | 42    |
| 44. 高次微係數之記法 ..... | 43    |
| 45. 高次微分法 .....    | 44    |
| 第五章 微分及積分 .....    | 47—50 |
| 46. 微分 .....       | 47    |
| 47. 圖解 .....       | 48    |
| 48. 求微分法.....      | 48    |
| 49. 高次微分.....      | 48    |
| 50. 積分 .....       | 49    |
| 51. 積分法之常數 .....   | 50    |
| 第六章 積分法之範式.....    | 51—60 |
| 52. 積分法之初等範式 ..... | 51    |
| 第七章 積分雜法 .....     | 61—76 |
| 53. 代入積分法 .....    | 61    |

|                                       |        |
|---------------------------------------|--------|
| 54. 分部積分法 .....                       | 66     |
| 55. 有理分數之積分法 .....                    | 68     |
| 56. 連續積分法 .....                       | 73     |
| 57. 重積分法 .....                        | 74     |
| 58. 積分常數之決定 .....                     | 75     |
| 第八章 定積分 .....                         | 77—84  |
| 59. 定積分之定義 .....                      | 77     |
| 60. 極限之變換 .....                       | 79     |
| 61. 重積分之定值 .....                      | 80     |
| 第九章 微分法之應用 .....                      | 85—125 |
| 62. 切線 .....                          | 85     |
| 63. 直角坐標上之切線法線次切線及次法線<br>之長之方程式 ..... | 86     |
| 64. 極坐標上之曲線方向 .....                   | 89     |
| 65. 曲線之交角 .....                       | 90     |
| 66. 極坐標上之次切線及次法線之長 .....              | 91     |
| 67. 極大與極小 .....                       | 93     |
| 68. 彎點 .....                          | 100    |
| 69. 直角坐標上之作圖法 .....                   | 102    |
| 70. 直角坐標上弧之微係數 .....                  | 105    |
| 71. 極坐標上弧之微係數 .....                   | 109    |

|                                   |         |
|-----------------------------------|---------|
| 72. 曲率 .....                      | 109     |
| 73. 曲率半徑 .....                    | 111     |
| 74. 曲率中心 .....                    | 115     |
| 75. 速度 .....                      | 117     |
| 76. 分速度 .....                     | 118     |
| 77. 加速度 .....                     | 119     |
| 78. 改變率 .....                     | 122     |
| 第十章 積分法之應用 .....                  | 126—159 |
| 79. 定積分之原素 .....                  | 126     |
| 80. 直角坐標上平面曲線所界之面積 .....          | 126     |
| 81. 極坐標上平面曲線所界之面積 .....           | 127     |
| 82. 直角坐標上平面曲線所界之面積 二重<br>積分 ..... | 130     |
| 83. 極坐標上平面曲線所界之面積 二重積<br>分 .....  | 130     |
| 84. 直角坐標上平面曲線之長 .....             | 133     |
| 85. 極坐標上平面曲線之長 .....              | 134     |
| 86. 曲線之特殊問題 .....                 | 136     |
| 87. 旋轉體之體積 .....                  | 138     |
| 88. 旋轉體之面積 .....                  | 141     |
| 89. 兩底平行之立體體積 .....               | 143     |

---

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 90. 運動.....             | 145 |
| 91. 液體壓力 .....          | 149 |
| 92. 重心.....             | 152 |
| 93. 平面曲線平面面積及立體之重心..... | 154 |
| 94. 平面面積之慣性矩 .....      | 157 |

# 初等微分積分學

## 第一章

### 變數及函數

1. 變數及常數 (Variables and Constants). 凡一數於某問題中, 雖遇其他數量變更而常不隨從變更者, 此數謂之常數. 某數之值在其問題之程序中時有變更, 則謂之變數. 如直線方程式

$$ax + by = c$$

之中,  $a, b, c$  三者之值常不改變, 故謂之常數. 而  $x$  與  $y$  之值, 則可任意變更, 故謂之變數.

2. 函數 (Function). 在上述之方程式中,  $x$  之值與  $y$  之值有關, 知其此數之值, 即可求得他數之值, 則後者謂之前者之函數, 前者謂之自變數 (Independent Variable). 後者謂之因變數 (Dependent Variable). 至於以何數爲自變數, 何數爲因變數, 則視其計算時之便利與否而決定, 初無一定之法則也.

因變數常爲二或二以上自變數之函數。如三角形之面積，可爲其底與高二自變數之函數。又如平行長方體可爲三不同邊自變數之函數等是也。

3. 增函數及減函數 (Increasing and Decreasing Functions). 若變數之值漸增而函數之值亦漸增，或變數之值漸減而函數之值亦漸減，則此函數謂之增函數。若變數之值漸增而函數之值漸減，或變數之值漸減而函數之值漸增，則此函數謂之減函數。

4. 函數之分類。本書所及，祇以初等函數爲限，即代數函數 (Algebraic Function)，超越函數 (Transcendental Function)。超越函數包含三角函數 (Trigonometric Function)，反三角函數 (Inverse Trigonometric Function)，指數函數 (Exponential Function)，及對數函數 (Logarithmic Function) 四種。

5. 函數之記法。若  $y$  爲  $x$  之函數，通常記作  $y=f(x)$ 。設以一定值  $a$  代其中之  $x$ ，則當記作  $f(a)$ 。

例如

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

則

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$$

$$f(a) = a^3 - 3a + 2$$

## 習 題

1.  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 1$  求  $f(0)$ ,  $f(3)$ ,  $f(a)$

2.  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$  求  $f(0)$ ,  $f(3)$ ,  $f(a)$ ,  $f\left(\frac{1}{a}\right)$

3.  $f(x) = 2^x$  求  $f(0)$ ,  $f(-3)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(-1)$

4.  $f(\phi) = \cos \phi$  證明  $f(\phi) = f(-\phi) = -f(\pi - \phi)$

5.  $f(x) = a^x$  證明  $f(y) \cdot f(z) = f(y+z)$

6.  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  證明  $f(a) \cdot f(-a) = 1$

## 第二章

### 極 限

6. 極限 (Limit). 一個常數  $a$  稱爲變量  $x$  之極限, 倘若具有以下之特性: 當任意給定一個正數  $\varepsilon$  時, 此變量  $x$ , 從某值以後所有的值, 皆滿足不等式  $|a-x| < \varepsilon$ .

表示一變量之極限時, 其記號爲  $\lim x = a$ , 即變量  $x$  趨向  $a$ , 而以  $a$  爲其極限.

下舉三例, 即可表明極限之意.

1. 內切於圓之正多邊形之面積, 若其邊數無止境地增加時, 則其面積之極限爲其所切圓之面積. 在此種情形之下, 變量常較其極限爲小.

2. 外切於圓之正多邊形之面積, 其極限亦如上例爲圓之面積. 在此情形之下, 變量常較其極限爲大.

3. 下列無限級數, 求其  $2n$  項及  $(2n+1)$  項之和.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

其  $2n$  項之和為

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}} \end{aligned}$$

其  $(2n+1)$  項之和為

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}} \end{aligned}$$

若  $n$  無止境地增大時 (通常記作  $n \rightarrow \infty$ )

則 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( +\frac{1}{3 \cdot 2^{2n}} \right) = 0$$

故 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

7. 無窮大 (Infinity). 在變量  $x$  依序改變時, 若從其值以後,  $|x|$  永遠大於任意給定的一個大數  $M$ , 則謂變量  $x$  趨向無窮大. 此種情形以  $x \rightarrow \infty$  記之. 無窮大與「很大」在意義上完全不同, 不能混用.

8. 無窮小 (Infinitesimal). 在變量  $x$  依序改變時, 若  $|x|$  可以變到小於任意給定的小正數  $\varepsilon$ , 並且以後永遠小於  $\varepsilon$ , 則謂變量  $x$  趨向零, 或稱為無窮小.

此種情形以  $x \rightarrow 0$  或  $\lim x = 0$  記之。

常數無論若何小，不得稱為無窮小。無窮小與「很小」不同，「很小」是相對的概念。

若  $a$  為變量  $x$  之極限（或  $x$  趨向  $a$ ），則  $x - a = \alpha$  為無窮小，可以寫成： $x = a + \alpha$ 。

9. 極限之定理。關於極限運算之定理，均須利用無窮小量之兩個性質，即

1. 幾個（有限數目的）無窮小量之和，仍為無窮小；
2. 常數與無窮小之積仍為無窮小。

極限運算之定理如下：

1. 若干變量之代數和之極限等於各變量之極限之代數和。

今取  $V_1, V_2, V_3$ ，三個變量，各自趨向極限  $l_1, l_2, l_3$ ，則得

$$V_1 = l_1 + c_1$$

$$V_2 = l_2 + c_2$$

$$V_3 = l_3 + c_3$$

$c_1, c_2, c_3$  皆為無窮小量。將上式加減，則得

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 - V_3 &= (l_1 + c_1) + (l_2 + c_2) - (l_3 + c_3) \\ &= (l_1 + l_2 - l_3) + (c_1 + c_2 - c_3) \end{aligned}$$

等式右端第一括號內是常數，第二括號內是無窮

小,故得

$$\text{Lim}(V_1 + V_2 - V_3) = l_1 + l_2 - l_3 = \text{Lim } V_1 + \text{Lim } V_2 - \text{Lim } V_3$$

2. 有限個變量之乘積之極限,等於各變量之極限之乘積.

取  $V_1, V_2$  二個變量,各自趨向極限  $l_1, l_2$ . 又設  $c_1, c_2$  為無窮小量,

則得

$$V_1 = l_1 + c_1$$

$$V_2 = l_2 + c_2$$

相乘

$$\begin{aligned} V_1 V_2 &= (l_1 + c_1)(l_2 + c_2) \\ &= l_1 l_2 + (l_1 c_2 + l_2 c_1 + c_1 c_2) \end{aligned}$$

根據無窮小量之兩個性質,等號右端括號內是無窮小量,因此得

$$\text{Lim}(V_1 V_2) = l_1 l_2 = \text{Lim } V_1 \cdot \text{Lim } V_2$$

3. 二變量之商之極限,等於其極限之商,惟當以「除數之極限不等於零」為條件.

所用記號同前,而  $l_2 \neq 0$ , 則得

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1 + c_1}{l_2 + c_2} = \frac{l_1}{l_2} + \left( \frac{l_2 + c_1}{l_2 + c_2} - \frac{l_1}{l_2} \right)$$

或

$$\frac{V_1}{V_2} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_2 c_1 - l_1 c_2}{l_2 (l_2 + c_2)}$$

等式右端分式分母為兩個因子之乘積,其值趨

向  $l_2^2$ , 而分子  $l_2 c_1 - l_1 c_2$  爲一無窮小量, 則整個分式趨向零. 故得

$$\lim \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = \frac{l_1}{l_2} = \lim V_1$$

10. 函數之極限. 考慮兩個變量  $x$  與  $y$ , 繫於函數關係  $y = f(x)$ . 若當任意給定一個正數  $\epsilon$  時, 則有一個正數  $\eta$  存在, 使得

$$\text{當 } |a-x| < \eta \text{ 而 } x \neq a \text{ 時, } |A - f(x)| < \epsilon.$$

於是在  $x$  趨向  $a$  時, 函數  $y = f(x)$  趨向其極限  $A$ . 以式表之, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

11. 函數之連續性 (Continuity). 若當  $x \rightarrow a$  時, 函數  $f(x)$  之極限存在, 且此極限等於  $f(a)$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

則謂“在  $x=a$  時, 函數  $f(x)$  是連續的.” 上述條件又可改述如下:

當任意給定一個正數  $\epsilon$  時, 若有一個正數  $\eta$  存在, 使得

$$\text{當 } |a-x| < \eta \text{ 時, } |f(a) - f(x)| < \epsilon,$$

則謂“函數  $f(x)$  在點  $x=a$  是連續的.”  $x$  的多項式與有理函數 (兩多項式之商), 當  $x$  取任意一個數值

## 第二章 極 限

時,皆爲連續函數,但使有理函數之分母等於零之值須除外。

例如  $y = ax^2$ . 將一對一對的  $x$  與  $y$  之值,在坐標紙上繪成曲線. 此曲線上任何點,  $x$  之值逐漸改變,  $y$  之值亦逐漸改變. 故此函數在  $x$  取任何值時皆爲連續。

又取一三角函數  $y = \tan x$  爲例. 如圖所示, 在  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  時 ( $n$  爲任何整數), 顯現其爲不連續. 由於

$$\text{當 } x \rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ 時, } \tan x \rightarrow \infty, \text{ 如 } 90^\circ$$

即在此等點,無極限值之存在. 除此等點外,  $x$  取其他數值,  $\tan x$  皆爲連續函數。

### 習 題

求下列各式之證

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

[解]  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 1$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4$

[解]  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$