初等微分積分學

楊德隅編

（修訂本）

商務印書館

初等微分積分學

楊德隅編

★版權所有★
商務印書館出版
上海河南中路二一一號
中國圖書發行公司總經售
商務印書館北京廠印刷
(53827)
1934年2月初版　1953年12月19版(修訂本)
印數30,501—34,500　定價¥8,400

目　次

初等微分積分學

第一章

變數及函數

1. **變數及常數**(**Variables and Constants**). 凡一數於某問題中,雖遇其他數量變更而常不隨從變更者,此數謂之常數.某數之值在其問題之程序中時有變更,則謂之變數.如直線方程式

$$ax+by=c$$

之中,a, b, c 三者之值常不改變,故謂之常數.而 x 與 y 之值,則可任意變更,故謂之變數.

2. **函數**(**Function**). 在上述之方程式中,x 之值與 y 之值有關,知其此數之值,即可求得他數之值,則後者謂之前者之函數,前者謂之自變數(Independent Variable). 後者謂之因變數(Dependent Variable). 至於以何數爲自變數,何數爲因變數,則視其計算時之便利與否而決定,初無一定之法則也.

因變數常爲二或二以上自變數之函數. 如三角形之面積, 可爲其底與高二自變數之函數. 又如平行長方體可爲三不同邊自變數之函數等是也.

3. **增函數及減函數** (Increasing and Decreasing Functions). 若變數之值漸增而函數之值亦漸增,或變數之值漸減而函數之值亦漸減, 則此函數謂之增函數. 若變數之值漸增而函數之值漸減, 或變數之值漸減而函數之值漸增, 則此函數謂之減函數.

4. **函數之分類.** 本書所及,祇以初等函數爲限, 即代數函數(Algebraic Function), 超越函數 (Transcendental Function).超越函數包含三角函數(Trigonometric Function),反三角函數(Inverse Trigonometric Function), 指數函數(Exponential Function), 及對數函數(Logarithmic Function)四種.

5. **函數之記法.** 若y爲x之函數,通常記作$y=f(x)$. 設以一定値a代其中之x,則當記作$f(a)$.

例如 $$f(x)=x^3-3x+2$$

則 $$f(1)=1^3-3\cdot1+2=0$$

$$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$$

$$f(a)=a^3-3a+2$$

習 題

1. $f(x)=x^4-3x^2+7x-1$ 求 $f(0), f(3), f(a)$

2. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ 求 $f(0), f(3), f(a), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

3. $f(x)=2^x$ 求 $f(0), f(-3), f(\frac{1}{3}), f(-1)$

4. $f(\phi)=\cos\phi$ 證明 $f(\phi)=f(-\phi)=-f(\pi-\phi)$

5. $f(x)=a^x$ 證明 $f(y)\cdot f(z)=f(y+z)$

6. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 證明 $f(a)\cdot f(-a)=1$

第二章

極限

6. 極限(Limit). 一個常數a稱爲變量x之極限,倘若具有以下之特性:當任意給定一個正數ε時,此變量x,從某值以後所有的值,皆滿足不等式$|a-x|<\varepsilon$.

表示一變量之極限時,其記號爲$\operatorname{Lim}x=a$,卽變量x趨向a,而以a爲其極限.

下舉三例,卽可表明極限之意.

1. 內切於圓之正多邊形之面積,若其邊數無止境地增加時,則其面積之極限爲其所切圓之面積.在此種情形之下,變量常較其極限爲小.

2. 外切於圓之正多邊形之面積,其極限亦如上例爲圓之面積.在此情形之下,變量常較其極限爲大.

3. 下列無限級數,求其$2n$項及$(2n+1)$項之和.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

其 $2n$ 項之和為

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n-1}}$$

其 $(2n+1)$ 項之和為

$$S_{2n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n}}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{2n}}$$

若 n 無止境地增大時（通常記作 $n\to\infty$）

則
$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3\cdot 2^{2n-1}}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(+\frac{1}{3\cdot 2^{2n}}\right)=0$$

故
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}$$

7. **無窮大**(Infinity). 在變量 x 依序改變時，若從其值以後，$|x|$ 永遠大於任意給定的一個大數 M，則謂變量 x 趨向無窮大. 此種情形以 $x\to\infty$ 記之. 無窮大與「很大」在意義上完全不同，不能混用.

8. **無窮小** (Infinitesimal). 在變量 x 依序改變時，若 $|x|$ 可以變到小於任意給定的小正數 ε，並且以後永遠小於 ε，則謂變量 x 趨向零，或稱為無窮小.

此種情形以 $x \to 0$ 或 $\lim x = 0$ 記之.

常數無論若何小,不得稱爲無窮小.無窮小與「很小」不同,「很小」是相對的概念.

若 a 爲變量 x 之極限(或 x 趨向 a),則 $x-a=\alpha$ 爲無窮小,可以寫成: $x=a+\alpha$.

9. **極限之定理.** 關於極限運算之定理,均須利用無窮小量之兩個性質,即

1. 幾個(有限數目的)無窮小量之和,仍爲無窮小;
2. 常數與無窮小之積仍爲無窮小.

極限運算之定理如下:

1. 若干變量之代數和之極限等於各變量之極限之代數和.

今取 V_1, V_2, V_3, 三個變量,各自趨向極限 l_1, l_2, l_3, 則得

$$V_1 = l_1 + c_1$$

$$V_2 = l_2 + c_2$$

$$V_3 = l_3 + c_3$$

c_1, c_2, c_3 皆爲無窮小量.將上式加減,則得

$$V_1 + V_2 - V_3 = (l_1 + c_1) + (l_2 + c_2) - (l_3 + c_3)$$

$$= (l_1 + l_2 - l_3) + (c_1 + c_2 - c_3)$$

等式右端第一括號內是常數;第二括號內是無窮

小,故得

$$\operatorname{Lim}(V_1+V_2-V_3)=l_1+l_2-l_3=\operatorname{Lim} V_1+\operatorname{Lim} V_2-\operatorname{Lim} V_3$$

2. 有限個變量之乘積之極限,等於各變量之極限之乘積.

取V_1, V_2二個變量,各自趨向極限l_1, l_2.又設c_1, c_2爲無窮小量,

則得
$$V_1=l_1+c_1$$
$$V_2=l_2+c_2$$

相乘
$$V_1V_2=(l_1+c_1)(l_2+c_2)$$
$$=l_1l_2+(l_1c_2+l_2c_1+c_1c_2)$$

根據無窮小量之兩個性質,等號右端括號內是無窮小量,因此得

$$\operatorname{Lim}(V_1V_2)=l_1l_2=\operatorname{Lim} V_1\cdot\operatorname{Lim} V_2$$

3. 二變量之商之極限,等於其極限之商,惟當以「除數之極限不等於零」爲條件.

所用記號同前,而$l_2\neq 0$,則得

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{l_1+c_1}{l_2+c_2}=\frac{l_1}{l_2}+\left(\frac{l_2+c_1}{l_2+c_2}-\frac{l_1}{l_2}\right)$$

或
$$\frac{V_1}{V_2}-\frac{l_1}{l_2}=\frac{l_2c_1-l_1c_2}{l_2(l_2+c_2)}$$

等式右端分式分母爲兩個因子之乘積,其值趨

向l_2^2,而分子$l_2c_1-l_1c_2$爲一無窮小量,則整個分式趨向零.故得

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)=\frac{l_1}{l_2}=\frac{\mathrm{Lim}\,V_1}{\mathrm{Lim}\,V_2}$$

10. **函數之極限.** 考慮兩個變量x與y,繫於函數關係$y=f(x)$.若當任意給定一個正數ε時,則有一個正數η存在,使得

$$當\ |a-x|<\eta\ 而\ x\neq a\ 時,\ |A-f(x)|<\varepsilon.$$

於是在x趨向a時,函數$y=f(x)$趨向其極限A.以式表之,即

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{x\to a} y=\mathop{\mathrm{Lim}}_{x\to a} f(x)=A.$$

11. **函數之連續性**(Continuity). 若當$x\to a$時,函數$f(x)$之極限存在,且此極限等於$f(a)$,即

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{x\to a} f(x)=f(a),$$

則謂"在$x=a$時,函數$f(x)$是連續的."上述條件又可改述如下:

當任意給定一個正數ε時,若有一個正數η存在,使得

$$當\ |a-x|<\eta\ 時,\ |f(a)-f(x)|<\varepsilon,$$

則謂"函數$f(x)$在點$x=a$是連續的."x的多項式與有理函數(兩多項式之商),當x取任意一個數值

時,皆爲連續函數,但使有理函數之分母等於零之值須除外.

例如 $y=ax^2$. 將一對一對的 x 與 y 之值,在坐標紙上繪成曲線. 此曲線上任何點, x 之值逐漸改變, y 之值亦逐漸改變. 故此函數在 x 取任何值時皆爲連續.

又取一三角函數 $y=\tan x$ 爲例. 如圖所示,在 $x=$ $=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 時(n 爲任何整數),顯現其爲不連續. 由於

$$\text{當 } x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \text{ 時}, \tan x\to\infty,$$ 大于90°

即在此等點,無極限值之存在. 除此等點外, x 取其他數值, $\tan x$ 皆爲連續函數.

習　題

求下列各式之證

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=1$

〔解〕 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(1)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=1$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=4$

〔解〕 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right]=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$