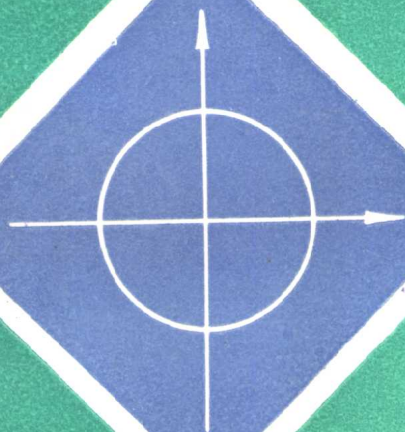


冯立本 蒋金生 编著

中学数学 解题技巧

(初中部分)



机械工业出版社

中学数学解题技巧

(初中部分)

冯立本 蒋金生 编著



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书是以国家教育委员会制定的数学教学大纲和统编教材为根据,结合北京几所市重点学校的教学资料编写而成。

本书主要介绍初、高中学生所能遇到的各种类型数学题目的解法。其中以中考和高考所涉及的类型为主。本书初、高中各一册。

本书的特点是以题目的类型划分归类,通过解一题而达到掌握解决一类题方法的作用。

本书的目的是帮助学生系统地复习中学的数学知识,以便升入高一级的学校。

学习本书,能锻炼思维能力,提高解题技巧,能从题海中解脱出来,成为高明的解题能手。

本书既是中学数学教师进行数学教学的参考用书,又是学生学习数学的辅导用书,特别适用于毕业班学生。

中学数学解题技巧

(初中部分)

冯立本 蒋金生 编著

*

责任编辑:贾 馨 责任校对:贾立萍

封面设计:肖 晴 版式设计:张世琴

责任印制:张俊民

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市房山区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ ·印张 $10^{5/8}$ ·字数233千字
1990年1月北京第1版·1992年4月北京第2次印刷

印数 20,101—36,500·定价:5.30元

ISBN 7-111-03175-X/G·170

前 言

本书是以国家教育委员会制定的数学教学大纲和统编教材为根据,结合北京几所市区重点学校的教学资料编写而成。

本书的目的在于帮助在校的中学生或自学青年系统地复习中学的数学知识,以便有更好的成绩升入高一级的学校。

本书的特点是以题目的类型划分归类,横向带动知识结构,从而达到解一题而掌握解决一类题方法的作用。本书基本上能覆盖住中高考的题目类型。

本书从一些市、区重点学校的题库中,从近年来各省市的考试题目中,精选了几百道例题或习题,供教师选用,供学生练习。

本书初、高中各一册,参加本书编写工作的有蒋金生(北京二十六中)、王汉华(北京四中)、冯立本(北京十一中)、白玉河(北京铁二中)、付作梅(北京师范学院分院)等同志;另外北京二十六中的汪德元、田云成、北京九十六中的李仲秋等同志也参加了一定的编写工作。

本书最后由蒋金生同志审编。

北京师范学院分院院长李世新为本书写了序,在此深表谢意。

对于本书的不当之处,恳请指正。

作者

序

数学教学是“数学活动”(思维活动)的教学,不仅是数学知识的教学,而且是解题技能的训练和思维能力的培养。并且应当把学生思维能力、智力活动的发展放在首位。当然,不掌握必要的数学基础知识,要提高解题技能和思维能力是无从谈起的。但是应当注意到,能力的发展并不能简单地看成是掌握知识的结果,装了一脑袋知识,不等于能力也得到了发展。解题技能和思维能力的发展,只能是特别设计的有目的教学的结果。本书中许多例题的讲解都是考虑到这种设计的范例。

作者在设计例题的讲解程序时,力图通过讲解一个或几个题目,达到让学生学会解决一类问题的目的。实现这一目的途径,不是用所谓模式法,让学生模仿甚至记忆各种解题模式,而是通过例题的讲解,使学生学会如何分析问题的特点,如何寻找解决问题的思路。也就是要设法让学生主动思考,发展学生的思维能力,以达到触类旁通的目的。

严格的逻辑思维能力,广博的数学知识和把数学应用于实践的本领是人的智能结构中最重要因素。而这些素质的形成和发展,要通过中学和高等学校的教学来实现。中学数学教学在这方面起主要的作用。

改进数学的教学内容和教学方法,注重教学效果,对全面提高中学教育质量具有十分重要的作用。开展对数学教育

学的研究，明确数学教学的目的，精选教材内容，探索有效的教学方法，是广大数学教育工作者共同的研究课题。本书是作者多年来对这些方面工作的总结，希望对读者的学习会有所帮助。

李世新

目 录

第一章 代数部分	1
一、数的概念与计算	1
1. 实数的概念	2
2. 实数的计算	6
二、式的运算与变形	7
1. 整式的运算	7
2. 整式的变形——因式分解	9
3. 分式的运算	20
4. 繁分式的化简	27
5. 根式的运算	29
6. 根式化简与具有非负性式子的计算	34
练习题一	37
三、解方程或方程组	40
1. 一次方程和方程组的解法	40
2. 一元二次方程的解法	45
3. 高次方程、分式方程和无理方程的解法	50
4. 二元二次方程组的解法	63
5. 一元一次不等式的解法	75
练习题二	76
四、与韦达定理及判别式有关问题的解法	79
1. 韦达定理的应用	79
2. 判别式定理的使用	84
3. 综合题	89
五、列方程解应用题	94

1. 一般类型的应用题	97
2. 重要类型的应用题	99
练习题三	119
六、指数与对数问题	120
1. 指数概念与幂的运算	120
2. 简单的指数方程	124
3. 对数运算	125
4. 简单的对数方程	128
5. 常用对数的首数、尾数问题	130
七、三种代数函数	134
1. 求函数自变量的取值范围	134
2. 求函数解析式	136
3. 与函数有关的应用题	138
八、简单的三角函数问题	140
1. 几种角的三角函数关系	141
2. 解直角三角形	145
3. 解斜三角形	147
4. 利用三角函数解应用题	150
附：有关直角坐标系的两类问题	153
练习题四	155
第二章 平面几何部分	159
一、证明题	159
1. 数量关系的证明	159
(1) 证明两条线段相等	159
练习题一	170
(2) 线段之和、差、倍、分的证明	172
练习题二	177
(3) 证明两个角相等	179
练习题三	190
附(1)证弧的相等	192

附(2)证四点共圆	195
附(3)证两角互余或互补	198
练习题	199
(4)证两个三角形全等	202
练习题四	206
(5)不等关系的证明	207
练习题五	212
(6)证线段成比例	213
练习题六	229
2. 位置关系的证明	233
(1)证两条直线平行	233
练习题七	239
(2)证两条直线垂直	241
练习题八	246
(3)证圆的切线	248
练习题九	253
附(4)证三点共线	255
练习题	257
二、计算题	258
1. 线段的计算	259
2. 角的计算	271
3. 面积的计算	274
练习题十	285
第三章 综合题	292
一、代数综合题	292
1. 对数与代数式、方程	292
2. 韦达定理的使用	298
3. 与分式方程有关的综合题	299
4. 代数函数两例	301
二、代数与几何综合题	303

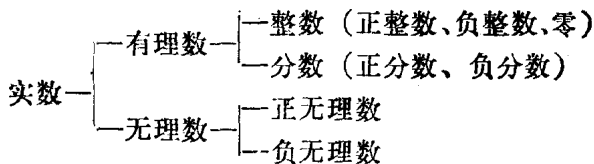
三、代数与三角函数综合题	305
1. 韦达定理与一般三角函数的综合使用	306
2. 韦达定理与同角平方关系的使用	308
3. 余弦定理的特殊用法	311
四、几何与三角函数综合题	320
1. 判断三角形的分类情况	320
2. 几何题中三角函数的应用	324
五、代数、几何与三角函数的综合题	328

第一章 代数部分

在初中阶段的代数课中，学习了数、式、方程和函数四部分内容。方程的学习中除有关概念和解法外，还包括应用题和一元二次方程的韦达定理与判别式；指数与对数虽没作为函数给出，但一些基本性质都已包括；代数函数和三角函数的学习都开了个头。因此这一部分的练习题种类较多，解法也各异，但较多的还是概念题与运算题，证明题则鲜见。本书不按课本中学习的顺序，而是按上述四部分内容对所涉及的问题分别介绍求解方法，对其中重点、难点部分有所侧重，安排的例题相应的也多些，对于一般易于掌握的方法就略作介绍。后面的两章也作同样处理，不另说明。有一点要提醒读者，本书不是习题集，而是方法的讲解，因此在阅读时不要满足对一例求解过程的理解，而要着重体会解这一类问题时方法的使用。

一、数的概念与计算

初中的数已扩展到实数范围，它包括：



有理数中的分数都可以化为有限小数或无限循环小数；无理数由定义可知为无限不循环小数，但有时也以根式、对数值或三角函数值的形式给出，如 $\sqrt{5}$ 、 $\lg 3$ 、 $\sin 15^\circ$ 等。没

有一个数既是有理数又是无理数。

1. 实数的概念

数轴是研究实数的工具图形，其上的点与实数有一一对应关系，借助它可以比较实数的大小、表示方程的解及不等式的解集。相反数和倒数描绘的是两个实数间的数量关系，若两实数之和为零，则两数互为相反数，因此零的相反数还是零；若两数之积等于1，则两数互为倒数，因此仅有零这一个数没有倒数。任何实数都包括性质符号和绝对值两个内容，正数和零的绝对值就是它本身，负数的绝对值为它的相反数。其实零的绝对值也可看作是它的相反数。与上述概念有关的问题有：

(1) 比较两个数的大小

两个负数中绝对值小的负数大；两个正分数比大小，要先化为同分母，通分后分子大的分数大，分子相同时则不必通分，此时分母小的分数大；小数比大小，自左至右比同位数；根式比大小，被开方数大的根式大，若有系数，则先把系数化入根号再比较，若为两项和可先分别平方再比较；常用对数真数大的对数值大；对于锐角，正弦值和正切值，当角大时值大，余弦值和余切值，当角小时值大。

例1 比大小

$$1) -38.2 \text{ 与 } -27.6$$

$$\because |-38.2| = 38.2 \quad |-27.6| = 27.6 \quad 38.2 > 27.6$$

$$\therefore -38.2 < -27.6$$

$$2) \frac{4}{7} \text{ 与 } \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{4}{7} = \frac{20}{35} \quad \frac{3}{5} = \frac{21}{35} \quad \frac{20}{35} < \frac{21}{35}$$

$$\therefore \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$$

$$3) \quad 1\frac{2}{9} \text{ 与 } 1\frac{4}{7}$$

$$\therefore 1\frac{2}{9} = \frac{11}{9} \quad 1\frac{4}{7} = \frac{11}{7} \quad \frac{11}{9} < \frac{11}{7}$$

$$\therefore 1\frac{2}{9} < 1\frac{4}{7}$$

$$4) \quad 3.1416 \text{ 与 } \pi$$

$$\therefore \pi = 3.14159 \quad 3.1416 > 3.14159$$

$$\therefore 3.1416 > \pi$$

$$5) \quad 3\sqrt{5} \text{ 与 } 2\sqrt{11}$$

$$\therefore 3\sqrt{5} = \sqrt{45} \quad 2\sqrt{11} = \sqrt{44} \quad \sqrt{45} > \sqrt{44}$$

$$\therefore 3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$$

$$6) \quad \sqrt{3} + \sqrt{6} \text{ 与 } 2 + \sqrt{5}$$

$$\therefore \text{两式都为正值}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{3} + \sqrt{6} &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2} = \sqrt{9 + 2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{9 + \sqrt{72}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{5} &= \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{9 + \sqrt{80}} \end{aligned}$$

$$\therefore 9 + \sqrt{72} < 9 + \sqrt{80}$$

$$\therefore \sqrt{3} + \sqrt{6} < 2 + \sqrt{5}$$

$$7) \quad \lg 5 + \lg 7 \text{ 与 } 2\lg 6$$

$$\therefore \lg 5 + \lg 7 = \lg 35 \quad 2\lg 6 = \lg 36 \quad \lg 35 < \lg 36$$

$$\therefore \lg 5 + \lg 7 < 2\lg 6$$

$$8) \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 与 } \sin 28.5^\circ$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \quad \sin 60^\circ > \sin 28.5^\circ$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} > \sin 28.5^\circ$$

$$9) \operatorname{tg} 42^\circ \text{ 与 } \operatorname{ctg} 43^\circ$$

$$\therefore \operatorname{tg} 42^\circ = \operatorname{ctg} 48^\circ \quad \operatorname{ctg} 48^\circ < \operatorname{ctg} 43^\circ$$

$$\therefore \operatorname{tg} 42^\circ < \operatorname{ctg} 43^\circ$$

(2) 相反数与倒数

涉及到相反数与倒数的题，若简单，可在数轴上讨论解决；若复杂可列出方程或不等式来求解。表示一对相反数的点分居在数轴的正、负半轴上，且两点到原点等距；由于零无倒数，1 与 -1 的倒数就是它们本身，因此数轴被表示这三个数的点分为四段，两个正数互为倒数，表示它们的点分居在数轴的正半轴被 1 分成的两段上；两个负数互为倒数，表示它们的点分居在负半轴被 -1 分成的两段上。

例2 一个数比它的倒数的相反数的 3 倍大 4，求此数。

解：设此数为 x ，根据题意可列方程

$$x = -\frac{3}{x} + 4$$

经整理，得 $x^2 - 4x + 3 = 0$

解之，得 $x_1 = 1, x_2 = 3$

答：此数为 1 或 3。

例3 一个负整数的相反数与 9 的差小于这个数的两倍，求此数。

解：设这个数为 x ，根据题意可列不等式

$$-x - 9 < 2x$$

解之，得

$$x > -3$$

$\because x$ 为负整数

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } x = -1$$

答：此数为 -1 或 -2 。

(3) 绝对值

给了一次二项式中字母的取值范围，计算它的绝对值，则答案唯一；若给出结果反求字母取值范围，就要特别注意把情况讨论全，此时特别容易忽视了代数式的值等于零的情况而丢解；若不给条件求代数式的绝对值，则要进行讨论，一般只研究含一次式的绝对值，当这样的绝对值只有一个时，令一次式为零求出所含字母的值。绝对值的结果分两种情况讨论：字母取大于、等于此值的情况和字母取小于此值的情况。如果是两个绝对值的和或差，则分别从两个代数式为零时求出两个值，讨论就要分三种情况：代数式所含字母值大于大值，在大小两值之间及小于小值的情况。

例4 当 $a > 2$ 时，计算 $|2a + 7|$

解： $\because a > 2$

$$\therefore 2a > 4, \text{ 必有 } 2a + 7 > 0$$

$$\therefore |2a + 7| = 2a + 7$$

例5 若 $|3x - 5| = 5 - 3x$ ，求 x 的取值范围

解： $\because |3x - 5| = 5 - 3x = -(3x - 5)$

$$\therefore 3x - 5 \leq 0$$

$$\therefore x \leq \frac{5}{3}$$

例6 $|2x - 9| = ?$

解：令 $2x - 9 = 0$

则 $x = 4.5$

$$\because x \geq 4.5 \text{ 时 } 2x - 9 \geq 0$$

$$x < 4.5 \text{ 时 } 2x - 9 < 0$$

$$\therefore |2x - 9| = \begin{cases} 2x - 9 & (\text{当 } x \geq 4.5 \text{ 时}) \\ -(2x - 9) = 9 - 2x & (\text{当 } x < 4.5 \text{ 时}) \end{cases}$$

例7 $|x + 2| + |2x - 3|$

解: 当 $x + 2 = 0$ 时 $x = -2$

当 $2x - 3 = 0$ 时 $x = 1.5$

$$|x + 2| + |2x - 3| = \begin{cases} (x + 2) + (2x - 3) \\ = 3x - 1 & (x > 1.5) \\ (x + 2) + (3 - 2x) \\ = 5 - x & (-2 \leq x \leq 1.5) \\ (-x - 2) + (3 - 2x) \\ = 1 - 3x & (x < -2) \end{cases}$$

其中 x 等于分界值, 可以放在相邻两段的任何一段中, 因此保持上述结果不变而后面的条件可以分别写为 $(x \geq 1.5)$ 、 $(-2 < x < 1.5)$ 和 $(x \leq -2)$ 。如果求三个一次式的绝对值的和, 而未给所含字母的取值范围, 那要分几种情况讨论呢?

2. 实数的计算

实数的运算法则基本上与有理数的运算法则相同, 要想计算结果正确, 当然必须要对运算法则十分清楚, 我们不在这里罗列各种运算法则的内容, 只提请注意以下几点:

(1) 仔细审题, 分清运算符号与性质符号;

(2) 遵照法则, 先确定符号, 再计算绝对值; 这是最重要的一点, 初学有理数的人常违背这一条而做错了题;

(3) 注意对去、添括号法则的使用, 其实这还是一个注

意符号的问题;

(4) 注意使用简便算法, 在有条件时尽量应用运算律和使用乘法公式, 以提高运算速度及准确程度;

(5) 注意运算顺序, 特别是出现乘方运算时, 计算 $\frac{3^2}{2}$ 就比计算 $3^2 \div 2$ 犯错误的机会多, 实质上就是运算顺序不清楚。此外搞清乘方运算的底数, 区别绝对值符号与括号的作用都是要很认真对待的, 如 -3^2 与 $(-3)^2$, $-|-3|$ 与 $-(-3)$, $-|-2|^3$ 与 $-(-2)^3$, $\frac{3^2}{2}$ 与 $(\frac{3}{2})^2$ 的结果绝不是同一个。

数的计算就不再举例了。

二、式的运算与变形

代数式中所含的字母也是表示数的, $\lg 7$ 和 $\sin 25^\circ$ 就不是代数式。代数式包括有理式中的整式和分式及无理式, 对于其中每一种式都有运算和变形的问题。

1. 整式的运算

整式包括单项式和多项式, 关于单项式的系数和次数, 多项式的项数、次数和按降幂排列等这些概念一定要搞清楚。无论是单项式还是多项式, 它们的加减法运算, 事实上都是在合并同类项, 若不明白什么是同类项, 加减运算就无法进行了。单项式的乘法、除法和乘方运算都遵照同底幂的运算法则进行, 这类运算的底没变, 只是指数在作降一级的运算, 即幂乘、除, 则指数加减, 幂乘方, 指数相乘。这里也有一个分辨乘方运算的底数的问题, 搞清诸如 $\frac{a^3}{b}$ 与 $(\frac{a}{b})^3$, $(ab)^2$ 与 ab^2 的不同。多项式的乘法其实是按照乘法