

大学数学学习丛书

微积分

复习指导

董莹 王寄鲁 靳明忠 主编

 山东大学出版社
Shandong University Press

大学数学学习丛书

微积分复习指导

董莹 王寄鲁 靳明忠 主编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分复习指导/董莹,王寄鲁,靳明忠主编. — 济南:山东大学出版社,2004.8
(大学数学学习丛书)
ISBN 7-5607-2824-3

- I. 微...
- II. ①董...②王...③靳...
- III. 微积分 - 高等学校 - 教学参考资料
- IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 076351 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

安丘市意中印务有限责任公司印刷

787×980 毫米 1/16 19 印张 359 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

印数:1-5000 册

定价:28.50 元

版权所有,盗印必究!

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换

内容提要

本书是以山东大学《微积分》和同济大学《高等数学》等教材为基础,结合编者多年来的教学实践经验体会,为适应数学教学面向 21 世纪改革的需要而编写的。按照全国统一命题的数学考研大纲的要求,对《微积分》的内容加深和拓宽,使知识更加丰富,方法更加灵活和多样,以适合学生复习和提高。

本书共分 20 讲,内容包括函数极限、连续、一元微积分、多元微积分、空间解析几何、级数、常微分方程和差分方程等。

本书可供高等院校理工类、经济类等非数学专业学生同步学习及考研复习使用,也可作为高校教师教学和自学人员学习的参考书。

序 言

市场经济的发展,科学技术的进步,计算机科学的影响等都使数学科学显得更加重要。“数学是打开一切自然科学大门的钥匙”。自从有了人类就有了数学,人类需要数数,这就是最初的数学。随着现代化程度的提高和数字化时代的到来,数学的应用也越来越广泛。数学知识是学习其他科学和技术所必须的,特别是高科技成果越来越多地依赖于现代数学方法的应用。数学高度的抽象性和严密的逻辑性对培养学生的综合分析能力及逻辑推理能力具有重要的作用。因此,高等院校,越来越多的非理工专业开设了数学课程,有些文科院系的学生主动要求选修数学课。特别是计算机科学的发展提出了许多新的数学问题,使数学的应用越来越显得重要。国家的繁荣富强在很大程度上依赖于高新技术的发展和高效率的经济管理,特别高新技术是保持国家繁荣富强的关键因素之一。高新技术的基础是应用科学,而应用科学的基础则是数学。当代高新技术的一个重要特点是量化分析,而这就必须用到数学。美国科学院院士 J. G. Glimm 称“数学对经济竞争力至为重要,数学是一种关键的、普遍适用的,并授予人能力的技术”。目前国内外越来越多的公司希望数学家参与他们的工作,工程技术中不断提出新的数学问题需要数学家来解决。数学给予人们的不仅是知识,而且是能力。这就需要我们数学教育工作者不仅要传授给学生一般的数学知识,而且要注重培养学生的数学素养,提高他们分析问题和解决问题的能力。

数学最吸引人的特色是它蕴含着大量有趣的思想、漂亮的图形和巧妙的论证。现实生活中处处潜藏着数学的难题。数学严格的逻辑性和复杂多变的方法使每个学习数学的人必须谨慎严肃地思考问题。一个看起来貌似简单的问题,往往要运用极其复杂的技巧才能解决。因此,大多数人感到数学非常难学,甚至望而生畏。但任何学科,任何事情都有其规律性,只要不畏困难,刻苦钻研,总能掌握其规律性,从而去掌握它、应用它。

由于数学的困难性和广泛的应用性,为了帮助大学学生学好数学,在方法上和思想上为学生学好数学提供有力的工具,我们山东大学威海分校数学系全体教师共同努力,编写了大学数学复习指导丛书:《微积分复习指导》、《线性代数复

习指导》和《概率论与数理统计复习指导》。编写这几本书的目的是为理工科和经济类专业的学生和自学者提供一套指导学习理论和解题方法的参考书,为报考研究生的有关人员提供一套复习考试的指导书;同时也为有关的数学教师提供一套教学参考书。参加这套丛书编写的有董莹、王寄鲁、靳明忠、于淑兰、赵华祥、陈伟等人,他们都是具有多年教学经验的教授或副教授。在编写过程中参考了国内外有关的著作,查阅了大量的文献资料。系副主任靳明忠,副主任王寄鲁策划并组织该套丛书的编写。陈绍著、刘桂真、郭新伟等教授主审了该套丛书。数学系的所有教师都对这套书的编写提出了一系列有益的建议并做了大量工作。在这里我们对山东大学威海分校的领导和有关部门的大力支持表示衷心的感谢。

由于水平所限,书中的错误和不足之处在所难免,希望广大读者批评指正。

本丛书出版之时,正值山东大学威海分校校庆 20 周年纪念日。数学系谨以此丛书作为向校庆的献礼,愿山东大学威海分校兴旺、发达!

刘桂真
2004 年 7 月

目 录

第一讲 函数与极限	(1)
习题一	(13)
第二讲 函数的连续性	(15)
习题二	(20)
第三讲 导数与微分的概念	(22)
习题三	(29)
第四讲 导数的计算	(31)
习题四	(40)
第五讲 微分中值定理	(42)
习题五	(54)
第六讲 罗必达法则与泰勒公式	(55)
习题六	(67)
第七讲 导数的应用	(69)
习题七	(84)
第八讲 不定积分	(86)
习题八	(96)
第九讲 定积分的概念与性质	(98)
习题九	(109)
第十讲 定积分的计算	(111)
习题十	(126)
第十一讲 定积分的应用	(127)
习题十一	(141)

第十二讲 向量代数与空间解析几何	(143)
习题十二	(153)
第十三讲 多元函数微分法	(154)
习题十三	(169)
第十四讲 多元函数微分法的应用	(170)
习题十四	(185)
第十五讲 二重积分	(187)
习题十五	(199)
第十六讲 三重积分	(202)
习题十六	(213)
第十七讲 曲线积分	(215)
习题十七	(227)
第十八讲 曲面积分	(229)
习题十八	(242)
第十九讲 无穷级数	(244)
习题十九	(266)
第二十讲 常微分方程与差分方程	(269)
习题二十	(282)
参考答案	(285)

第一讲 函数与极限

复习与考试要求

(一) 函数

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

(二) 极限

1. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
2. 掌握极限的性质及四则运算法则.
3. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
4. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

基本题型与解题方法

(一) 函数

1. 复合函数

(1) 复合函数的表达式

对于初等函数与初等函数之间的复合,一般地可采用代入法,即把一个函数的自变量用另一个函数的表达式来替代后构成复合函数.

对于初等函数与分段函数、分段函数与分段函数之间的复合,一般可采用分析法,即由最外层函数定义域的各区间,结合中间变量的表达式和定义域进行分析,从而构成复合函数.此类函数的复合有时也可以借助图形的直观性进行分析,因而称之为图示法.

例 1.1 设 $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, 求 $f_n(x) = \underbrace{f[f(\cdots f(x))]}_{n\text{次}}$.

解 用归纳法. 由

$$f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

设 $f_{n-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$, 则有

$$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)] = \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+f_{n-1}^2(x)}} = \frac{x/\sqrt{1-(n-1)x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+(n-1)x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 1.2 设 $f(u) = \begin{cases} u, & u < 1, \\ a, & u \geq 1; \end{cases} g(x) = \begin{cases} b, & x < 0, \\ x+2, & x \geq 0; \end{cases}$ 写出 $f[g(x)]$ 的表达式.

解 采用分析法进行函数的复合.

$$f[g(x)] = \begin{cases} g(x), & g(x) < 1, \\ a, & g(x) \geq 1. \end{cases}$$

注意当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = x+2 \geq 2$; 当 $x < 0$ 时, $g(x) = b$.

因此, 仅当 $b < 1$ 时, 对 $x < 0$ 有 $g(x) < 1$.

故若 $b < 1$, 则 $f[g(x)] = \begin{cases} b, & x < 0, \\ a, & x \geq 0. \end{cases}$

若 $b \geq 1$, 则 $f[g(x)] \equiv a$.

例 1.3 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0. \end{cases} \text{ 求 } g[f(x)].$$

解 用图示法对函数进行复合.

$$\text{令 } u = f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0. \end{cases}$$

1° 作 $u = f(x)$ 的图像, 见图 1-1.

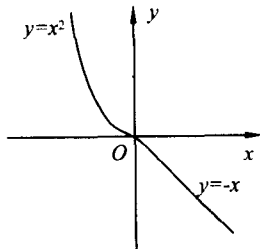


图 1-1

2° 函数 $y = g(u) = \begin{cases} 2-u, & u \leq 0 \\ u+2, & u > 0 \end{cases}$ 的分段定义的分界点是 $u=0$, 即 x 轴.

3° 从图 1-1 中看出, 当 $x \geq 0$ 时 $u \leq 0$, 此时 $u = -x$; 当 $x < 0$ 时 $u > 0$, 此时 $u = x^2$.

4° 将 3° 代入 $y = g(u)$, 得到:

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ x^2+2, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 由复合函数, 求因变量关于中间变量的函数

例如, 在 $f[\varphi(x)] = h(x)$ 中, 已知 $\varphi(x)$ 和 $h(x)$, 求 $f(x)$. 解决此类问题, 一种方法是用变量代换法. 即令 $u = \varphi(x)$, 解出 $\varphi(x)$ 的反函数 $x = \varphi^{-1}(u)$ 代入函数 $h(x)$ 中, 求出 $f(u)$, 可得到 $f(x)$ 的表达式. 另外一种常用方法是“配凑法”, 这种方法简便, 但有一定的技巧性, 没有固定的规律可循, 要视 $f[\varphi(x)]$ 的表达式而定.

例 1.4 (1) 已知 $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$, 求 $f(x)$.

(2) 设 $f(x-2) = \frac{1}{x-1}$, 求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 (1) 用变量代换法.

令 $u = x+1$, 则 $x = u-1$. 代入原式, 得到:

$$f(u) = (u-1)^2 + 3(u-1) + 5 = u^2 + u + 3.$$

于是 $f(x) = x^2 + x + 3$.

(2) 令 $x-2 = u$, 则 $x = u+2$, 代入原式, 得到 $f(u) = \frac{1}{u+2-1} = \frac{1}{u+1}$.

再以 $\frac{1}{x}$ 代 u , 得到 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{1+x}$.

另解: 因为 $f(x-2) = \frac{1}{x-2+1} = \frac{1}{(x-2)\left(1+\frac{1}{x-2}\right)} = \frac{\frac{1}{x-2}}{1+\frac{1}{x-2}}$,

故 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1+x}$.

(3) 由复合函数求中间变量关于自变量的函数

例如, 在 $f[\varphi(x)] = h(x)$ 中, 已知 $f(x)$ 和 $h(x)$, 求 $\varphi(x)$. 这类问题实质是求 $f(u)$ 的反函数.

例 1.5 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 又由 $\ln(1-x) \geq 0$, 得到 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0$.

2. 函数的性质

函数的基本性质有: 函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性.

例 1.6 函数 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ ($-\infty < x < +\infty$) 是 ().

(A) 有界函数; (B) 单调函数; (C) 周期函数; (D) 偶函数.

解 因为 $|x \sin x|, e^{\cos x}$ 均为偶函数, 故其乘积仍为偶函数. 选(D).

例 1.7 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0; \end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于 ().

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0; \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0; \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0; \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

解 因为 $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0 \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$ 所以选

(D).

(二) 极 限

求数列与函数的极限或证明极限存在的方法很多, 有时一题可以有多种求解方法, 运用起来比较灵活. 求极限问题可分为求定式极限与求未定式极限. 若记“ o ”为无穷小量, “ ∞ ”为无穷大量, M 为有界变量. 那么, 一般的定式极限有: $o + o = o, o \cdot M = o, M/\infty = o, \infty \cdot \infty = \infty, (o + o)^{+\infty} = o$ 等. 未定式极限有: “ $0/0$ ”, “ ∞/∞ ”, “ $\infty \pm \infty$ ”, “ $(1+o)^\infty$ ”, “ ∞^0 ”, “ 0^0 ”, “ $o \cdot \infty$ ”等. 熟练掌握求极限的方法, 是极限部分学习的重点之一.

求极限的方法很多, 已经学过的主要有以下几种:

- (1) 极限的四则运算法则.
- (2) 利用两个重要极限.
- (3) 利用极限存在的两个准则.
- (4) 利用“有界函数与无穷小乘积仍为无穷小”.
- (5) 利用等价无穷小代换.
- (6) 利用变量代换.

1. 未定式的极限

下面分别介绍各种形式的未定式的极限的求解方法.

(1) “ $\frac{0}{0}$ ”型的求解方法

常用方法有:

1) 通过因式分解, 变量代换或有理化因式, 消去零因子, 然后求解.

2) 利用等价无穷小或 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

例 1.8 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^3+x-2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

解 (1) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 分子分母的极限均为零, 故不能直接用极限商的运算法则. 可以通过分子有理化, 变形后消去零因子.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^3+x-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2+x+2)(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

这里, 我们作如下解释:

① 在计算极限的过程中, 为了简化计算, 可以在乘积因子中把极限存在且不为零的部分先求出来, 如这一题中的 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

② 对乘积因子可以用等价无穷小代换, 如此题中 $x \sin x \sim x^2$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ($x \rightarrow 0$).

③ 注意下列做法是错误的:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0.$$

这是因为分子中 $\tan x$, $\sin x$ 不是以因式形式出现的, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\tan x - \sin x$ 与 $x - x$ 不是等价的无穷小. 所以不能直接用等价无穷小代换. 一般地, 在和或差中不使用等价无穷小代换, 否则会出现错误.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 2x}{x^2} = 4.$$

(2) “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的求解方法

此类题目可以通过恒等变形,约去分子分母中极限为无穷的因子,然后用极限的四则运算法则来求解.

例 1.9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arctan x}{x - \arctan x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{x+1}(x+3)^{x+3}}{(x+4)^{2x+4}}.$$

解 (1)先作恒等变形,分子分母同除以 x ,得到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arctan x}{x - \arctan x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\arctan x}{x}}{1 - \frac{\arctan x}{x}} = 1,$$

注意这里的 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$ 是使用了无穷小乘有界变量仍为无穷小.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{x+1}(x+3)^{x+3}}{(x+4)^{2x+4}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{x+1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} x^{x+3} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+3}}{x^{2x+4} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{2x+4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (1+x) \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3} \cdot 3} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^3}{\left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4} \cdot 4} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^4} \\ &= \frac{e \cdot 1 \cdot e^3 \cdot 1^3}{e^8 \cdot 1^4} = e^{-4}. \end{aligned}$$

注意在(2)题中用到了重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 这个极限是属于“ 1^∞ ”型极限. 凡是不属于“ 1^∞ ”型未定式,不能用这个重要极限.

(3) 其他未定式的求解方法

① 对“ $\infty - \infty$ ”型极限,可以通过根式有理化、通分、倒数代换转化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”或“ $\frac{0}{0}$ ”型极限求解.

② 对“ $0 \cdot \infty$ ”型极限,可利用倒数变换. 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim \frac{g(x)}{[f(x)]^{-1}} = \lim \frac{f(x)}{[g(x)]^{-1}}.$$

这样就把原极限转化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型或“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式求解. 但要注意,在一般情况下,对数函数、反三角函数不放在分母上.

③ 对“ 1^∞ ”型极限,有两种解法.一种方法是用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 求解,另一种方法是用对数恒等式求解极限.这里我们只研究前一种方法.后一种方法及其“ 0^0 ”型、“ ∞^0 ”型极限的求解方法留在以后讨论.

例 1.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^2+8} \right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{3n}} - \sqrt{n \cdot \sqrt{n}});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right); \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}.$$

解 (1) 此题为“ $\infty - \infty$ ”型未定式,可先通分转化为“ $\frac{0}{0}$ ”型后求解.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^2+8} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)}{(x^2 - 2x + 4)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) 此题为“ $\infty - \infty$ ”型未定式,可通过部分根式有理化转化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型求解.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2. \end{aligned}$$

(3) 此题为“ 1^∞ ”型未定式,可以用重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 求解.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \tan \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{\tan \frac{2}{n}}} \right]^{\tan \frac{2}{n} \cdot n}}{\left[\left(1 - \tan \frac{2}{n} \right)^{-\frac{1}{\tan \frac{2}{n}}} \right]^{(-n) \tan \frac{2}{n}}} = \frac{e^2}{e^{-2}} = e^4. \end{aligned}$$

(4) 此题为“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式,可以转化为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式求解.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi.$$

(5) 此题为“ 1^∞ ”型未定式极限,可用 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 来求解.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

2. 当 $n \rightarrow \infty$ 时的 n 项和数列的极限

这类题目不能直接用极限的四则运算法则.一般常用两种方法:一种是利用等差数列、等比数列及其他方法求和;另一种是用“迫敛性”定理(当 n 项按递增或递减排列时,可用迫敛性定理).

例 1.11 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right).$$

解 (1) 因 $\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } x_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}},$$

$$\text{因 } \frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq x_n \leq \frac{n}{n+\sqrt{1}}, \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{1}} = 1,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

3. 当 $n \rightarrow \infty$ 时的 n 项乘积数列的极限

对于 n 项乘积的数列的极限,不能直接用极限的乘法法则.一般是将各因子化为商的形式,使之公因子交错地处于分子分母上,然后约去公因子,再求极限.有时也可以用“迫敛性定理”求极限.还有一种方法是通过取对数使之变为 n

项和数列的极限求解.

例 1.12 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}, \text{ 其中 } x \neq 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}), \text{ 其中 } |x| < 1;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

解 (1) 由 $\cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}}$, 得

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{4}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2^n}},$$

$$\text{故原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

此题也可以用分子分母同乘以 $\sin \frac{x}{2^n}$ 来做. 即

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2^n}},$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$(2) \text{ 由 } 1-x^{2^{n+1}} = (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}), \text{ 即 } 1+x^{2^n} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) &= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}} \\ &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$